

تصمیم‌سازی بهینه در مدل گاما گزینش شده تحت یک تابع زیان تعمیم یافته

آزاده کیاپور^{۱*}، مهران نقی زاده قمی^۲

۱- استادیار، دانشگاه آزاد، واحد بابل، دانشکده علوم پایه، گروه آمار

۲- استادیار، دانشگاه مازندران، دانشکده علوم ریاضی، گروه آمار

رسید مقاله: ۱۶ اردیبهشت ۱۳۹۶

پذیرش مقاله: ۱۹ مهر ۱۳۹۶

چکیده

فرض کنید Π_1 و Π_2 دو جامعه گامای مستقل باشند که در آن Π_i دارای پارامتر مقیاس نامعلوم θ_i و پارامتر شکل معلوم و مشترک α باشد. با فرض این که X_1 و X_2 به طور تصادفی به ترتیب از جوامع Π_1 و Π_2 استخراج شوند و جامعه متناظر با مشاهده $X_{(1)} = \max(X_1, X_2)$ یا $X_{(2)} = \min(X_1, X_2)$ گزینش شود. هدف از این مقاله، یافتن تصمیم‌های بهینه برای پارامترهای مقیاس θ_M و θ_r از جامعه گامای گزینش شده تحت یک تابع زیان ناوردای مقیاس تعمیم یافته می‌باشد. به این منظور، تصمیم‌های پذیرفتنی و ناپذیرفتنی به فرم $cX_{(1)}$ یا $cX_{(2)}$ را در زیر کلاسی از تصمیم‌های ناوردای θ_M یا θ_r به دست می‌آوریم. همچنین تصمیم‌های بیز و بیز تعمیم یافته θ_M و θ_r را به دست آورده و نشان می‌دهیم که تصمیم‌های خطی پذیرفتنی هستند. نتایج به دست آمده را برای داده‌های سانسور شده و همچنین برای توزیع‌های رایلی و وایبول به کار می‌بریم.

کلمات کلیدی: تصمیم پذیرفتنی، توزیع گاما، داده‌های سانسور شده.

۱ مقدمه

در استنباط آماری و در مقوله برآورد پارامترهای یک یا چند جامعه، معمولاً پارامترهایی که قرار است برآورد شوند، قبل از جمع آوری نمونه، مشخص هستند و پس از جمع آوری نمونه، با استفاده از روش‌های معمول برآوردیابی مانند روش‌های گشتاوری و ماکسیمم درستنمایی، برآورد می‌شوند [۱]. همچنین تصمیم‌هایی مانند تصمیم‌های پذیرفتنی و مینیماکس را برای آن به دست می‌آورند؛ ولی در بعضی از مسائل آماری، پارامتر مورد نظر برای برآورد، قبل از جمع آوری نمونه، مشخص نیست و بر اساس نمونه‌هایی که برای استنباط مورد استفاده قرار می‌گیرند، مشخص (گزینش) می‌شود. فرض کنید کارخانه‌ای k ماشین مختلف تولید می‌کند و

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: kiapour@baboliau.ac.ir

می‌خواهد ماشینی با متوسط طول عمر بالا به خریدار بفروشد؛ بنابراین خریدار، علاقه مند است برآوردی از متوسط طول عمر ماشین خریداری شده از کارخانه را در اختیار داشته باشد.

در دهه‌های اخیر، مساله برآورد پارامترهای جامعه گزینش‌شده مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. خوانندگان علاقه مند می‌توانند به میسرا و همکاران [۲]، کومار و همکاران [۳] و نقی‌زاده قمی و همکاران [۴] مراجعه نمایند.

برای فرمول‌بندی مساله، فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل مستخرج از جامعه‌های Π_1 و Π_2 با توزیع گاما به ترتیب با پارامترهای مقیاس θ_1 و θ_2 و پارامتر شکل مشترک و معلوم α با تابع چگالی احتمال زیر:

$$f(x|\theta_i, \alpha) = \frac{1}{\theta_i^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta_i}}, \quad x > 0, \alpha > 0, \theta_i > 0, i=1,2. \quad (1)$$

و $X_{(1)} = \min(X_1, X_2)$ و $X_{(2)} = \max(X_1, X_2)$ باشند. جامعه متناظر با بزرگ‌ترین (کوچک‌ترین) پارامتر مقیاس، بهترین جامعه نامیده می‌شود. برای گزینش بهترین جامعه، قاعده گزینش طبیعی به این صورت است که جامعه متناظر با $X_{(1)}$ ($X_{(2)}$) گزینش می‌شود. پارامترهای متناظر با بهترین جامعه عبارتند از:

$$\theta_M = \begin{cases} \theta_1 & X_1 \geq X_2 \\ \theta_2 & X_1 < X_2 \end{cases}, \quad \theta_J = \begin{cases} \theta_1 & X_1 \leq X_2 \\ \theta_2 & X_1 > X_2 \end{cases} \quad (2)$$

لازم به ذکر است که برآوردگرهای $X_{(1)}$ و $X_{(2)}$ به ترتیب برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی برای پارامترهای θ_M و θ_J هستند.

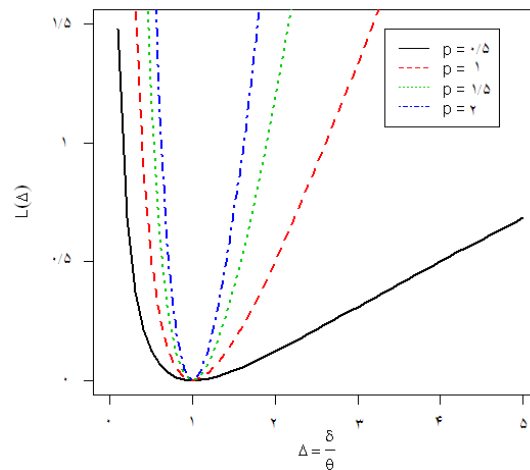
برای فهم بهتر مساله، دو دستگاه را در نظر بگیرید که به‌طور مستقل قطعاتی با طول عمر θ_1 و θ_2 تولید می‌کنند. فرض کنید X_1 و X_2 به ترتیب طول عمر یک قطعه انتخابی به‌طور تصادفی از دستگاه شماره ۱ و ۲ باشند. اگر $X_1 \geq X_2$ ، آن‌گاه θ_1 و در غیر این صورت θ_2 پارامتر جامعه گزینش‌شده خواهد بود. بنابراین θ_M که یک پارامتر تصادفی است، پارامتر جامعه گزینش‌شده خواهد بود و مهندس کارخانه علاقه مند به برآورد آن است.

مساله برآورد پارامترهای جامعه گامای گزینش‌شده توسط ولایسامی و شارما [۵] و ولایسامی [۶] تحت تابع زیان توان دوم خطا آغاز شد. میسرا و همکاران [۷] نتایج پذیرفتنی و ناپذیرفتنی ولایسامی و شارما [۵] را برای مقادیر دلخواه و معلوم پارامتر شکل توزیع گاما تعمیم دادند. نعمت‌الهی و معتمدشریعتی [۸] به برآوردیابی پارامتر مقیاس جامعه گامای گزینش‌شده تحت تابع زیان آنتروپی پرداختند. در این مقاله، به برآوردیابی پارامتر مقیاس جامعه‌ی گامای گزینش‌شده تحت تابع زیان ناوردای مقیاس تعمیم‌یافته به فرم زیر:

$$L(\theta, \delta) = \left[\left(\frac{\delta}{\theta} \right)^{\frac{p}{2}} - \left(\frac{\theta}{\delta} \right)^{\frac{p}{2}} \right]^2 = \left(\frac{\delta}{\theta} \right)^p + \left(\frac{\theta}{\delta} \right)^p - 2 = \Delta^p + \frac{1}{\Delta^p} - 2 \quad (3)$$

پرداخته می شود. شکل ۱ تابع زیان (۳) را برای مقادیر انتخابی p نشان می دهد. تابع زیان (۳) یک تابع اکیداً محدب بوده و به عنوان تابعی از Δ دارای مینیمم یکتا در نقطه‌ی $\Delta = 1$ می باشد. همچنین برای مقادیر کوچک (بزرگ) p ، تابع زیان، تابعی نامتقارن (متقارن) است.

در بخش دوم، تصمیم های پذیرفتنی θ_M و θ_J داده شده در رابطه (۲) را در کلاس برآوردهای ناوردا به فرم $cX_{(1)}$ و $cX_{(2)}$ به دست می آوریم. در بخش سوم، تصمیم های بیز و بیز تعمیم یافته θ_M و θ_J را به دست می آوریم. یک محاسبه عددی برای مقایسه برآوردها در بخش ۴ انجام شده است. نتایج به دست آمده را با داده های سانسور شده نوع دوم و همچنین در توزیع های رایلی و وایبول به کار می بریم. در پایان به بحث و نتیجه گیری پرداخته می شود.



شکل ۱. نمودار تابع زیان (۳) برای مقادیر مختلف p

۲ کلاس تصمیم های پذیرفتنی خطی

فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل باشند به طوری که X_i ، $i = 1, 2$ دارای تابع چگالی احتمال گاما داده شده در (۱) باشد. مساله برآورد پارامترهای تصادفی نامعلوم θ_M و θ_J تحت تابع زیان (۳) نسبت به گروه تبدیل های مقیاس و جایگشتی، ناوردا است؛ بنابراین طبیعی است تنها برآوردهای δ که ناوردا ی مقیاس و جایگشتی هستند، یعنی برآوردهایی را که در دو شرط زیر صدق می کنند مورد بررسی قرار دهیم.

$$۱) \delta(X_1, X_2) = \delta(X_2, X_1),$$

$$۲) \delta(cX_1, cX_2) = c\delta(X_1, X_2), \quad c > 0$$

فرض کنید $X_{(1)} = \min(X_1, X_2)$ و $X_{(2)} = \max(X_1, X_2)$ باشند. در این بخش، تصمیم های پذیرفتنی و ناپذیرفتنی خطی به فرم $cX_{(1)}$ و $cX_{(2)}$ در برآورد پارامترهای θ_M و θ_J را به ترتیب در زیر کلاس های D_1 و D_2 به فرم زیر به دست می آوریم:

$$D_1 = \{\delta_c : \delta_c(X_1, X_2) = cX_{(2)}, \quad c > 0\}, \quad D_2 = \{\delta_c : \delta_c(X_1, X_2) = cX_{(1)}, \quad c > 0\}$$

برای یافتن تصمیم های پذیرفتنی θ_M و θ_J در زیر کلاس های D_1 و D_2 لم زیر را بیان می کنیم.

لم ۱ فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل باشند بطوری که X_i ، $i=1,2$ دارای تابع چگالی

احتمال گاما داده شده در (۱) با $\alpha > p$ باشد. همچنین فرض کنید $S = \frac{X_{(2)}}{\theta_M}$ ، $U = \frac{X_{(1)}}{\theta_J}$

و $G_{a,b}(t) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^t x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$ تعریف می کنیم $a, b > 0$ و به ازای $\mu = \frac{\max(\theta_1, \theta_2)}{\min(\theta_1, \theta_2)} \geq 1$

$H_{a,b}(t) = G_{a,b}(t) + G_{a,b}(1-t)$ که در آن $B(0,0)$ تابع بتا است. در این صورت:

الف. $E(S^k) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} H_{\alpha, \alpha+k} \left(\frac{1}{1+\mu} \right)$ که تابعی صعودی (نزولی) نسبت به μ به ازای

$k < 0$ ($k > 0$) می باشد.

ب. $E(U^k) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} \left[1 - H_{\alpha, \alpha+k} \left(\frac{1}{1+\mu} \right) \right] = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} H_{\alpha+k, \alpha} \left(\frac{1}{1+\mu} \right)$ که تابعی صعودی

(نزولی) نسبت به μ به ازای $k > 0$ ($k < 0$) می باشد.

اثبات: برای اثبات به نقی زاده قمی و همکاران [۹] مراجعه شود.

در قضیه ی زیر تصمیم های پذیرفتنی به فرم $cX_{(2)}$ در کلاس برآوردگرهای ناوردای D_1 را به دست می آوریم.

قضیه ۲ تصمیم های به فرم $\delta_{1c}(X_1, X_2) = cX_{(2)}$ در زیر کلاس D_1 از تصمیم های ناوردای θ_M ، پذیرفتنی

هستند اگر و تنها اگر $c \in [c_1^*, c_2^*]$ ، که در آن $\alpha > p$ ، $c_1^* = \left[\frac{\Gamma(\alpha-p)}{\Gamma(\alpha+p)} \frac{G_{\alpha, \alpha-p}(1/\mu)}{G_{\alpha, \alpha+p}(1/\mu)} \right]^{1/p}$ و

$$c_2^* = \left[\frac{\Gamma(\alpha-p)}{\Gamma(\alpha+p)} \right]^{1/p}$$

اثبات تابع مخاطره ی $\delta_{1c}(X_1, X_2) = cX_{(2)}$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} R(\theta_M, cX_{(2)}) &= E \left(\left(c \frac{X_{(2)}}{\theta_M} \right)^p + \left(\frac{\theta_M}{cX_{(2)}} \right)^p - 2 \right) \\ &= c^p E(S^p) + \frac{1}{c^p} E(S^{-p}) - 2 \end{aligned}$$

با قراردادن مشتق تابع مخاطره نسبت به c برابر صفر داریم:

$$\frac{\partial R(\theta_M, cX_{(2)})}{\partial c} = pc^{p-1} E(S^p) - pc^{-p-1} E(S^{-p}) = 0$$

در نتیجه $c = \left(\frac{E(S^{-p})}{E(S^p)} \right)^{1/p} = c_1(\mu)$ با توجه به این که $\frac{\partial^2 R(\theta_M, cX_{(2)})}{\partial c^2} = \frac{2p^2}{c^{p+2}} E(S^{-p}) > 0$ ؛ بنابراین

تابع مخاطره، مقدار مینیم خود را به ازای مقدار $c_1(\mu) = \left(\frac{E(S^{-p})}{E(S^p)} \right)^{1/p}$ اختیار می کند. با استفاده از قسمت

الف لم ۱ نتیجه می شود که $[E(S^p)]^{-1}$ و $E(S^{-p})$ توابعی پیوسته، صعودی و مثبت نسبت به μ هستند:

بنابراین تابع $c_1(\mu)$ تابعی پیوسته و صعودی از μ بوده و داریم:

$$\inf_{\mu \geq 1} c_1(\mu) = c_1(1) = \left[\frac{\Gamma(\alpha - p) / \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + p) / \Gamma(\alpha)} \frac{H_{\alpha, \alpha - p} \left(\frac{1}{2} \right)}{H_{\alpha, \alpha + p} \left(\frac{1}{2} \right)} \right]^{\frac{1}{rp}},$$

$$= \left[\frac{\Gamma(\alpha - p) G_{\alpha, \alpha - p} \left(\frac{1}{2} \right)}{\Gamma(\alpha + p) G_{\alpha, \alpha + p} \left(\frac{1}{2} \right)} \right]^{\frac{1}{rp}} = c_1^*,$$

و

$$\sup_{\mu \geq 1} c_1(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} c_1(\mu) = \left[\frac{\Gamma(\alpha - p) / \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + p) / \Gamma(\alpha)} \frac{H_{\alpha, \alpha - p}(\infty)}{H_{\alpha, \alpha + p}(\infty)} \right]^{\frac{1}{rp}},$$

$$= \left[\frac{\Gamma(\alpha - p)}{\Gamma(\alpha + p)} \right]^{\frac{1}{rp}} = c_1^*$$

بنابراین برای هر $c \in [c_1^*, c_2^*]$ ، یک $\mu \geq 1$ وجود دارد که تابع مخاطره‌ی $R(\theta_M, cX_{(1)})$ مینیمم مقدار خود را اختیار می‌کند و در نتیجه چنین c متناظر با یک تصمیم‌های پذیرفتنی است. پذیرفتنی بودن $\delta_{c_1^*}$ از پیوسته بودن تابع مخاطره نتیجه می‌شود. همچنین برای هر $\mu \geq 1$ ثابت، تابع مخاطره‌ی $R(\theta_M, cX_{(1)})$ برای $c_1(\mu) < c$ یک تابع صعودی از c و برای $c_1(\mu) > c$ یک تابع نزولی از c است. چون برای هر $\mu \geq 1$ ، $c_1^* \leq c_1(\mu) \leq c_2^*$ ، نتیجه می‌شود که تصمیم‌های $\delta_{c_1}(X_1, X_2) = cX_{(1)}$ برای $c \in (-\infty, c_1^*) \cup (c_2^*, \infty)$ در برآورد θ_M ناپذیرفتنی هستند، که این قضیه را کامل می‌کند.

در قضیه‌ی زیر تصمیم‌های پذیرفتنی به فرم $cX_{(1)}$ را در کلاس برآوردگرهای ناوردای D_2 به دست می‌آوریم.

قضیه ۳ تصمیم‌های به فرم $\delta_{c_1}(X_1, X_2) = cX_{(1)}$ در زیر کلاس D_2 از تصمیم‌های ناوردای θ_J ، پذیرفتنی هستند اگر و تنها اگر $c \in [c_2^*, c_3^*]$ ، که در آن

$$c_2^* = \left[\frac{\Gamma(\alpha - p)}{\Gamma(\alpha + p)} \right]^{\frac{1}{rp}}, \quad c_3^* = \left[\frac{\Gamma(\alpha - p) G_{\alpha - p, \alpha}(\cdot / 5)}{\Gamma(\alpha + p) G_{\alpha + p, \alpha}(\cdot / 5)} \right]^{\frac{1}{rp}}$$

اثبات: تابع مخاطره‌ی $\delta_{c_1}(X_1, X_2) = cX_{(1)}$ عبارت است از:

$$R(\theta_J, cX_{(1)}) = E \left(\left(c \frac{X_{(1)}}{\theta_J} \right)^p + \left(\frac{\theta_J}{cX_{(1)}} \right)^p - 2 \right),$$

$$= c^p E(U^p) + \frac{1}{c^p} E(U^{-p}) - 2,$$

که تابعی اکیدا محدب نسبت به c و دارای مینیمم یکتا در $c = c_r(\mu) = \left(\frac{E(U^{-p})}{E(U^p)} \right)^{\frac{1}{rp}}$ می باشد. با استفاده از قسمت ب لم ۱ نتیجه می شود که $[E(U^p)]^{-1}$ و $E(U^{-p})$ توابعی پیوسته، نزولی و مثبت نسبت به μ هستند؛ بنابراین تابع $c_r(\mu)$ تابعی پیوسته و نزولی از μ بوده و در نتیجه داریم:

$$\inf_{\mu \geq 1} c_r(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} c_r(\mu) = \left[\frac{\Gamma(\alpha - p) / \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + p) / \Gamma(\alpha)} \frac{H_{\alpha-p, \alpha}(\circ)}{H_{\alpha+p, \alpha}(\circ)} \right]^{\frac{1}{rp}},$$

$$= \left[\frac{\Gamma(\alpha - p)}{\Gamma(\alpha + p)} \right]^{\frac{1}{rp}} = c_r^*$$

و

$$\sup_{\mu \geq 1} c_r(\mu) = c_r(1) = \left[\frac{\Gamma(\alpha - p) / \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + p) / \Gamma(\alpha)} \frac{H_{\alpha-p, \alpha}\left(\frac{1}{2}\right)}{H_{\alpha+p, \alpha}\left(\frac{1}{2}\right)} \right]^{\frac{1}{rp}},$$

$$= \left[\frac{\Gamma(\alpha - p)}{\Gamma(\alpha + p)} \frac{G_{\alpha-p, \alpha}\left(\frac{1}{2}\right)}{G_{\alpha+p, \alpha}\left(\frac{1}{2}\right)} \right]^{\frac{1}{rp}} = c_r^*$$

با بحثی مشابه با اثبات قضیه ۲، اثبات کامل می شود.

۳ تصمیم های بیز و بیز تعمیم یافته

در این بخش تصمیم های بیز و بیز تعمیم یافته را برای پارامترهای θ_M و θ_r به دست می آوریم. با استفاده از روش ساکروویتز و ساموئل-کان [۱۰]، ابتدا تصمیم بیز را در حالت تک مولفه ای برای θ_i ، $i = 1, 2$ می یابیم. با در نظر گرفتن توزیع پیشین مزدوج گامای وارونه برای θ_i ، $i = 1, 2$ به صورت $IGamma(v + \alpha, (x_i + \beta)^{-1})$ با تابع چگالی احتمال زیر:

$$\pi_i^{v, \beta}(\theta_i) = \frac{\beta^v}{\Gamma(v) \theta_i^{v+1}} e^{-\frac{\beta}{\theta_i}}, \quad v > 0, \beta > 0, i = 1, 2. \quad (4)$$

توزیع پسین $\theta_i | X_i$ نیز گامای وارونه به صورت $IGamma(v + \alpha, (x_i + \beta)^{-1})$ است. تصمیم بیزی θ_i با توجه به پیشین (۴) و تحت تابع زیان (۳) برابر است با

$$\delta_{v, \beta}^i(X_i) = \left(\frac{E(\theta_i^p | X_i)}{E(\theta_i^{-p} | X_i)} \right)^{\frac{1}{rp}} = \left[\frac{\Gamma(v + \alpha - p)}{\Gamma(v + \alpha + p)} \right]^{\frac{1}{rp}} (X_i + \beta), \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

حال فرض کنید θ_1 و θ_r دارای پیشین‌های مستقل و هم‌توزیع با تابع چگالی احتمال (۴) باشند. از رابطه (۶) و لم ۳-۲ ساکروویتز و ساموئل-کان [۱۰]، تصمیم‌های ییز یکتای پارامترهای θ_M و θ_J تحت تابع زیان (۳) با توجه به توزیع پیشین $\pi^{v,\beta} = (\pi_1^{v,\beta}, \pi_r^{v,\beta})$ به ترتیب عبارتند از:

$$\delta_{v,\beta}^1(X_1, X_r) = \left[\frac{\Gamma(v+\alpha-p)}{\Gamma(v+\alpha+p)} \right]^{\frac{1}{vp}} (X_{(r)} + \beta)$$

و

$$\delta_{v,\beta}^r(X_1, X_r) = \left[\frac{\Gamma(v+\alpha-p)}{\Gamma(v+\alpha+p)} \right]^{\frac{1}{vp}} (X_{(1)} + \beta)$$

همچنین توجه کنید که تصمیم ییزی حلی پارامترهای θ_M و θ_J یعنی $X_{(r)}$ و $X_{(1)}$ به ترتیب به شکل زیر تعریف می‌شوند:

و $\delta_{v,\beta}^r(X_1, X_r) = \left[\frac{\Gamma(\alpha-p)}{\Gamma(\alpha+p)} \right]^{\frac{1}{vp}} X_{(1)}$ و $\delta_{v,\beta}^1(X_1, X_r) = \left[\frac{\Gamma(\alpha-p)}{\Gamma(\alpha+p)} \right]^{\frac{1}{vp}} X_{(r)}$ تصمیم‌های ییزی تعمیم‌یافته θ_M و θ_J با توجه به پیشین ناآگاهی‌بخش $\pi(\theta_1, \theta_r) = (\theta_1 \theta_r)^{-1}$ ، $\theta_1, \theta_r \in \mathbb{R}^+$ هستند.

پیامد ۴ فرض کنید $i = 1, 2$ ، $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ یک زوج نمونه‌های تصادفی مستقل از جامعه Π_i ، $i = 1, 2$ با تابع چگالی داده شده در (۱) باشند. در نتیجه $T_j(\mathbf{X}_i) = \sum_{i=1}^n X_{ij}$ یک آماره بسنده کامل برای θ_i است و همچنین دارای توزیع گاما با پارامترهای $n\alpha$ و θ_i می‌باشد. بنابراین تمام نتایج بخش‌های ۲ و ۳ با جایگذاری $n\alpha$ به جای α و $T_i(\mathbf{X}_i)$ به جای X_i برقرار خواهند بود.

۴ محاسبات عددی

در این بخش به مقایسه مخاطره برآوردگر ماکسیمم درستنمایی (ML) و تصمیم ییز تعمیم‌یافته (GB) برای پارامتر θ_M می‌پردازیم. جدول ۱ مقادیر مخاطره ML و GB را برای مقادیر انتخابی $\alpha = 2$ ، $p = 1$ ، $\mu = 0.1(0.1)$ و $n = 10, 30, 50$ نشان می‌دهد. از جدول ۱ مشاهده می‌شود که تصمیم GB دارای مخاطره کم‌تری نسبت به ML می‌باشد. همچنین با افزایش n از میزان مخاطره تصمیم‌ها کاسته می‌شود.

۵ کاربرد در داده‌های سانسور شده نوع دوم

در بسیاری از مطالعات پزشکی و صنعتی به زمان یا مرحله‌ای می‌رسیم که بعد از آن دیگر قادر به مشاهده یا ثبت واقعی مورد نظر نخواهیم بود. به این مرحله یا زمان، مرحله یا زمان سانسور می‌گویند. سانسور از راست زمانی رخ می‌دهد که واقعی مورد نظر پس از زمان یا مرحله‌ای سانسور رخ دهد که ما قادر به ثبت آن نبوده و فقط می‌توانیم بگوییم که تا زمان یا مرحله‌ای مشخص (زمان یا مرحله‌ای سانسور) آن واقعه رخ نداده است. این سانسور

بر اساس نوع زمانی یا مرحله ای بودن سانسور به دو نوع اول و دوم تقسیم می شود، که این دو نیز هر کدام بر اساس نوع تعیین زمان یا مرحله ای سانسور خود به انواع مختلفی تقسیم می شوند. یکی از پرکاربردترین انواع سانسور از راست، سانسور نوع دوم می باشد.

جدول ۱. مخاطره برآورد گر ML و GB برای مقادیر مختلف حجم نمونه

$n = 50$		$n = 30$		$n = 10$		μ
GBE	MLE	GBE	MLE	GBE	MLE	
۰/۰۹۰۹	۰/۱۰۰۱	۰/۱۴۲۸	۰/۱۶۷۱	۰/۲۴۷۷	۰/۳۷۷۱	۰/۱
۰/۰۹۰۸	۰/۱۰۰۲	۰/۱۴۲۰	۰/۱۶۷۸	۰/۲۳۹۶	۰/۳۵۱۳	۰/۲
۰/۰۹۰۷	۰/۱۰۰۲	۰/۱۳۹۲	۰/۱۷۱۵	۰/۲۲۹۱	۰/۳۷۱۶	۰/۳
۰/۰۹۰۴	۰/۱۰۰۶	۰/۱۳۴۲	۰/۱۷۷۸	۰/۲۱۸۲	۰/۳۸۹۹	۰/۴
۰/۰۸۸۹	۰/۱۰۲۳	۰/۱۲۹۲	۰/۱۸۵۲	۰/۲۰۸۹	۰/۴۰۶۳	۰/۵
۰/۰۸۴۶	۰/۱۰۹۲	۰/۱۲۴۱	۰/۱۹۲۲	۰/۲۰۱۷	۰/۴۱۹۲	۰/۶
۰/۰۸۳۲	۰/۱۱۲۸	۰/۱۲۰۱	۰/۱۹۷۸	۰/۱۹۶۷	۰/۴۲۸۳	۰/۷
۰/۰۸۰۳	۰/۱۱۵۶	۰/۱۱۷۲	۰/۲۰۱۶	۰/۱۹۳۵	۰/۴۳۳۷	۰/۸
۰/۰۷۸۰	۰/۱۱۷۱	۰/۱۱۵۷	۰/۲۰۳۶	۰/۱۹۱۸	۰/۴۳۶۶	۰/۹
۰/۰۷۶۷	۰/۱۱۷۶	۰/۱۱۵۲	۰/۲۰۴۳	۰/۱۹۱۴	۰/۴۳۷۵	۱

سانسور نوع دوم اغلب در انجام آزمون های طول عمر به کار می رود. در مجموعه نمونه ای سانسور شده ای نوع دوم، r کوچک ترین مشاهدات از یک نمونه ای تصادفی n تایی قابل مشاهده هستند. به عبارت دیگر تمام n عضو نمونه در آزمایش قرار می گیرند؛ اما به جای انجام آزمایش تا پایان از کارافتادگی تمامی اعضای نمونه، این کار را تا زمانی انجام می دهیم که r عضو از کار بیفتد. این کار موجب صرفه جویی در زمان و هزینه های آزمایش خواهد شد.

باید توجه کرد که در این نوع سانسور، تعداد مشاهدات لازم یعنی r مقداری ثابت است و پیش از شروع آزمایش تعیین می شود، اما طول دوره ای آزمایش یک متغیر تصادفی است.

فرض کنید $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ ، $i = 1, 2$ دو نمونه ای تصادفی مستقل از جامعه های نمایی Π_1 و Π_2 با تابع چگالی احتمال (۱) به ترتیب با پارامترهای مقیاس نامعلوم θ_1 و θ_2 و پارامتر شکل معلوم و مشترک $\alpha = 1$ باشند. فرض کنید $X_{i(j)}$ ، j آمین آماره ای ترتیبی X_i ، $i = 1, 2$ ، باشد. متغیر تصادفی $TT_i = \sum_{j=1}^r X_{i(j)} + (n-r)X_{i(r)}$ ، $i = 1, 2$ را در نظر بگیرید. با استفاده از قضیه ۴-۱-۱ صفحه ۱۵۳ لاولس ([۱۱])، TT_i ، $i = 1, 2$ ، دارای توزیع گاما با پارامترهای r و θ_i است. فرض کنید $TT_{(0)} = \min(X_1, X_2)$ و $TT_{(r)} = \max(X_1, X_2)$ باشد. جامعه ای متناظر با $TT_{(r)}$ را $TT_{(r)}$ و $TT_{(0)}$ را گزینش می کنیم. علاقه مند به برآورد پارامترهای تصادفی θ_M و θ_r تعریف شده به صورت زیر هستیم:

$$\theta_M = \begin{cases} \theta_1 & TT_1 \geq TT_2 \\ \theta_2 & TT_1 < TT_2 \end{cases}, \quad \theta_J = \begin{cases} \theta_1 & TT_1 \leq TT_2 \\ \theta_2 & TT_1 > TT_2 \end{cases}.$$

چون TT_i , $i=1,2$ ، دارای توزیع گاما با پارامترهای r و θ_i است، می‌توان نتایج بخش‌های ۲ و ۳ را با جایگزینی α با r و X_i با TT_i , $i=1,2$ با استفاده از داده‌های سانسور شده (سانسور راست از نوع دوم)، به کار برد.

۶ کاربرد در توزیع‌های وایبول و رایلی

فرض کنید $(y_1, y_2, \dots, y_r)$ یک نمونه سانسور شده از توزیع وایبول با تابع چگالی احتمال

$$\delta_{v,\beta}^i(X_i) = \left(\frac{E(\theta_i^p | X_i)}{E(\theta_i^{-p} | X_i)} \right)^{\frac{1}{vp}} = \left[\frac{\Gamma(v+\alpha-p)}{\Gamma(v+\alpha+p)} \right]^{\frac{1}{vp}} (X_i + \beta), \quad i=1,2. \quad (6)$$

باشند که در آن v پارامتر شکل معلوم و θ پارامتر مقیاس نامعلوم باشند. در این صورت $X = Y^v$ دارای توزیع نمایی با پارامتر θ خواهد بود. زمان کل آزمایش برابر است با

$$S_r = \sum_{i=1}^r y_{(i)}^v + (n-r)y_{(r)}^v, \quad n > r.$$

و یک برآوردگر نارایب برای θ برابر است با $S^* = S_r / r$. همچنین $2S_r / \theta \sim \chi_{2r}^2$. همچنین دقت کنید که توزیع رایلی از توزیع وایبول به ازای $v=2$ به دست می‌آید. در این صورت علاقه مند به برآورد پارامترهای تصادفی θ_M و θ_J تعریف شده به صورت زیر:

$$\theta_M = \begin{cases} \theta_1 & S_1 \geq S_2 \\ \theta_2 & S_1 < S_2 \end{cases},$$

و

$$\theta_J = \begin{cases} \theta_1 & S_1 \leq S_2 \\ \theta_2 & S_1 > S_2 \end{cases}$$

هستیم؛ بنابراین تمام نتایج مطرح شده در بخش‌های قبل برای نمونه سانسور از توزیع وایبول با پارامتر شکل معلوم v و توزیع رایلی برقرار خواهد بود.

۷ بحث و نتیجه‌گیری

هدف از این مقاله، تصمیم‌سازی بهینه برای پارامترهای مقیاس θ_M و θ_J از جامعه گامای گزینش شده تحت یک تابع زیان ناوردای مقیاس تعمیم‌یافته می‌باشد. تصمیم‌های پذیرفتنی و ناپذیرفتنی به فرم $cX_{(r)}$ یا $cX_{(1)}$ در زیر کلاسی از تصمیم‌های ناوردای θ_M یا θ_J به دست آمدند. همچنین تصمیم‌های بیز و بیز تعمیم‌یافته θ_M و θ_J محاسبه شدند که همانگونه که بیان شد تصمیم‌های خطی پذیرفتنی بودند. سپس کاربردی از نتایج با داده‌های سانسور شده نوع دوم بیان شد. یکی از تصمیم‌های بهینه که در نظریه تصمیم آماری مورد توجه است، تصمیم‌های

مینیماکس می باشد. یافتن برآوردگرهای مینیماکس برای پارامترهای θ_M و θ_J به عنوان یک مساله باز باقی می ماند.

سپاسگزاری

نویسندگان مقاله از حمایت های مالی و معنوی دانشگاه آزاد بابل بابت به پایان رساندن طرح تحقیقاتی که منجر به یافته های مقاله حاضر شده است کمال تشکر و قدردانی را دارند.

منابع

- [۱] فیاض موقر، ا.، محمودی، ز.، (۱۳۹۴). استنباط آماری براساس برآوردگر گشتاوری وزنی احتمالی تعدیل یافته. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۷، ۸۷-۷۹.
- [2] Misra, N., Van Der Meulen, E. C., Branden, K.V., (2006a). On some inadmissibility results for the scale parameters of selected gamma populations. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 136, 2340-2351.
- [3] Kumar, S., Mahapatra, A. K., Vellaisamy, P., (2009). Reliability estimation of the selected exponential populations. *Statistics and Probability Letters*, 79, 1372-1377.
- [4] Naghizadeh, M., Namatollahi, N., Parsian, A., (2012). Estimation after selection under reflected normal loss function. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 41, 1040-1051.
- [5] Vellaisamy, P., Sharma, D., (1989). A note on the estimation of the mean of the selected gamma population. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 18(2), 555-560.
- [6] Vellaisamy, P., (1992). Inadmissibility results for the selected scale parameter. *Annals of Statistics*. 20, 2183-2191.
- [7] Misra, N., van der Meulen, E. C., Branden, K. V., (2006b). On estimating the scale parameter of the selected gamma population under the scale invariant squared error loss function. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 186, 268-282.
- [8] Nematollahi, N., Motamed-Shariati, F., (2009). Estimation of the scale parameter of the selected gamma population under the entropy loss function. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 38, 208-221.
- [9] Naghizadeh, M., Namatollahi, N., Parsian, A., (2010). On estimation following selection with applications in k-Records and censored data, *JIRSS*, 9(2), 59-79.
- [10] Sackrowitz, H., Cahn, E. S., (1987). Evaluating the chosen population: a Bayes and minimax approach. *IMS Lecture Notes-Monograph Series: Adaptive Statistical Procedures and Related Topics* 8, 386-395.
- [11] Lawless, J. F., (2003). *Statistical models and methods for lifetime data*. John Wiley, New York.