

## بهینه‌سازی هندسی تحت معادلات با مشتقات جزئی با داده‌های تصادفی

علی محمودی نهرانی<sup>۱</sup>، محمد کیانپور<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه گیلان، گروه ریاضی کاربردی، رشت، ایران

۲- استادیار، دانشگاه گیلان، گروه ریاضی کاربردی، رشت، ایران

رسید مقاله: ۹ اسفند ۱۳۹۳

پذیرش مقاله: ۷ مرداد ۱۳۹۴

### چکیده

مقاله حاضر بهینه‌سازی شکل هندسی سازه‌هایی را در نظر گرفته است که توسط معادلات با مشتقات جزئی در حضور داده‌های تصادفی، مدل‌سازی شده است. داده‌های تصادفی در پارامترها و ورودی‌های معادله با مشتقات جزئی، ظاهر می‌شود. مبانی نظری ارائه شده و با استفاده از آشفتگی روش همانی، مساله بهینه‌سازی شکل به دامنه ثابت تبدیل شده و سپس به صورت یک مساله کنترل بهینه تصادفی فرمول‌بندی شده است. داده‌های تصادفی به صورت میدان تصادفی در نظر گرفته شده و با استفاده از توسیع کارهونن-لوویو<sup>۱</sup> تقریب زده شده است. کمی‌سازی عدم قطعیت توسط روش‌های غیر نفوذی مانند هم‌محلی تصادفی صورت پذیرفت. روش گرادیان برای بهینه‌سازی به کار گرفته و مثال عددی برای نشان دادن قابلیت کاربرد روش ارائه شده است.

**کلمات کلیدی:** بهینه‌سازی هندسی، معادله با مشتقات جزئی تصادفی، گسسته‌سازی تصادفی، کنترل بهینه.

### ۱ مقدمه

مساله بهینه‌سازی شکل که در بخش‌های مختلفی از علوم مهندسی و فناوری مطرح است به صورت زیر بخش‌بندی می‌شود:

- مدل: اغلب به صورت معادله با مشتقات جزئی بیان می‌شود و به ما اجازه می‌دهد تا رفتار مکانیکی سازه‌ها را محاسبه و تحلیل کنیم.
- تابع هدف: که به دنبال یافتن مقدار کمینه و یا مقدار بیشینه آن هستیم.
- جهت قابل قبول بهینه‌سازی: که با در نظر گرفتن محدودیت‌هایی که روی دامنه اعمال شده، به دست می‌آید.

\* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: Keyanpour@guilan.ac.ir

<sup>1</sup> Karhunen-Loeve

بهینه‌سازی شکل در بسیاری از صنایع، کاربردهای فراوانی دارد؛ اما بسیار پیچیده‌تر از بهینه‌سازی معمولی است و در آن‌ها متغیرها، ویژگی‌های مکانیکی مواد هستند. مساله‌های بهینه‌سازی شکل را به سه دسته کلی می‌توان تقسیم کرد:

- بهینه‌سازی شکل پارامتری: که در آن شکل‌ها با استفاده از تعداد کاهش یافته‌ای از متغیرها، پارامتری می‌شود (به عنوان مثال ضخامت، قطر و یا بعد)، که محدودیت آن‌ها تعداد قابل توجهی از شکل‌های قابل قبول را در نظر می‌گیرد [۱].

- بهینه‌سازی شکل هندسی: که در آن با شروع از یک شکل اولیه و با تغییرات قابل قبول مرزهای شکل (بدون این که توپولوژی شکل را تغییر دهیم) به شکل بهینه می‌رسیم [۲].

- بهینه‌سازی توپولوژی: در آن بدون محدودیت صریح و یا ضمنی، شکل بهینه را جستجو می‌کنیم و تغییرات توپولوژی شکل نیز در نظر گرفته می‌شود [۳].

بهینه‌سازی توپولوژی، کلی‌تر و در عین حال دشوارترین نوع بهینه‌سازی شکل است. در این مقاله به مطالعه بهینه‌سازی هندسی سازه‌ها با در نظر گرفتن پارامترهای تصادفی خواهیم پرداخت.

اولین بار هادامارد در سال ۱۹۱۰ از فرمول‌بندی ریاضی برای تحلیل حساسیت معادله با مشتقات جزئی، نسبت به شکل دامنه استفاده کرد که به زمینه تحقیقاتی جدیدی به نام "طراحی بهینه شکل" انجامید. موضوع طراحی بهینه شکل که امروزه استفاده می‌شود از نتایج نظریه کنترل و بهینه‌سازی روی سیستم‌های توزیعی حاصل شده است [۴] و لذا بهینه‌سازی شکل را می‌توان شاخه‌ای از نظریه کنترل و بهینه‌سازی دانست. طراحی با استفاده از کمینه‌سازی یک معیار انجام می‌پذیرد که به متغیر حالت به عنوان جواب معادله با مشتقات جزئی و تابع کنترل به عنوان شکل وابسته است.

برای محاسبه شرایط بهینگی، پیرونو [۵]، سوکولوسکی [۶] و سیا [۷] برای مساله‌های پیوسته، ماروکو و دیگران [۸] برای مساله‌های گسسته، روش‌هایی را ارائه کرده‌اند. نتایج نظری برای وجود جواب در مقالات [۹-۱۲] به دست آمده است. برای مطالعه نظری مساله و بررسی وجود و یکتایی جواب و همچنین به دست آوردن شرایط بهینگی، دشواری‌هایی وجود دارد و برای حل آن‌ها لازم است توپولوژی مناسبی روی دامنه‌های شدنی اعمال گردد. راه حل مستقیمی برای این کار وجود ندارد؛ ولی روش‌هایی مانند نمایش دامنه به صورت توابع تراز [۱۳، ۱۴] و یا استفاده از تبدیل‌های مناسب [۱۵، ۱۶] معرفی شده است. توپولوژی‌های مختلفی نیز برای این کار پیشنهاد شده است که از میان آن‌ها می‌توان به توپولوژی کورانت [۱۷] که با توابع فاصله ایجاد شده است (مانند توابع مشخصه، اندازه هاسدورف و همچنین  $W^{1,p}$ -توپولوژی)، اشاره کرد. برای این که بتوانیم از نتایج به دست آمده در زمینه حساب دیفرانسیل در اینجا استفاده کنیم و به تحلیل پیوستگی و دیفرانسیل پذیری شکل‌ها پردازیم، ابتدا باید فضاهایی با ساختار خطی معرفی شود. دو روش معمول برای تعریف مشتق‌های شکل در حیطه تبدیل‌ها عبارت است از:

- روش سرعت که توسط زولزیو معرفی شد [۱۸].
- روش آشفته‌گی همانی که توسط مورات و سیمون ارائه گردید [۱۵، ۱۶].

با توجه به این که در مسایل مهندسی، صنعتی و غیره، مدل‌ها شامل پارامترهای تصادفی است، مساله بهینه‌سازی شکل با در نظر گرفتن پارامترها و یا بارهای تصادفی توجه محققان را به خود جلب کرده است. مدل‌سازی این مساله‌ها با بهینه‌سازی شکل بر پایه قابلیت اعتماد آغاز شد که در آن محدودیت‌های قابلیت اعتماد بر اساس احتمال شکست معرفی می‌شود [۱۹]. به دلیل مشکلاتی که در تعریف تابع شکست وجود دارد، روش بهینه‌سازی استوار به‌عنوان جایگزین، توسعه داده شده است که اغلب برای سیستم‌ها بدترین حالت را در نظر می‌گیرد و به دنبال جواب غیر حساس نسبت به پارامترها می‌گردد [۲۰-۲۲]. برخی محققان نیز از روش برنامه‌ریزی تصادفی برای حل مسایل بهینه‌سازی شکل استفاده کرده‌اند [۲۳]. کم‌تر منبعی یافت می‌شود که پارامترهای تصادفی را به‌صورت میدان تصادفی در نظر بگیرد [۲۴].

در مقاله حاضر بر آنیم تا روشی که "آشفته‌گی همانی" نامیده می‌شود و توسط مورات و سیمون [۱۶، ۱۵] ارایه شده است در فضاهای بخنر<sup>۱</sup> برای حل مساله بهینه‌سازی شکل تصادفی توسعه دهیم. روش ذکر شده چارچوب روشی را بر اساس فضای توابع ارایه می‌دهد که شیوه‌های کنترل بهینه تصادفی (نام‌گذاری که برای مساله کنترل بهینه با داده‌های تصادفی به کار می‌بریم) را قابل استفاده می‌کند. در ادامه نشان خواهیم داد که با این روش چگونه گرایان شکل به دست می‌آید.

با استفاده از فرمول‌بندی اشاره شده، این امکان را خواهیم داشت که از روش‌های کنترل بهینه تصادفی در بهینه‌سازی شکل تصادفی استفاده کنیم که در سال‌های اخیر توسعه داده شده است [۲۵-۲۷]. برای گسسته سازی تصادفی از روش نمونه‌گیری مونت کارلو و روش هم‌محلی تصادفی [۲۹، ۲۸] استفاده کرده‌ایم. در پایان روش به‌دست آمده برای حل مساله بهینه‌سازی نازل با ورودی تصادفی به کار برده شده و نتایج به‌دست آمده با شکل ارایه شده است.

ساختار مقاله به این ترتیب است: در بخش دوم فرمول‌بندی عمومی مساله به همراه روش آشفته‌گی همانی برای پارامتری کردن مساله ارایه شده است. در بخش سوم، مساله در دامنه ثابت فرمول‌بندی شده و شرایط بهینگی به‌دست آمده است. در بخش چهارم گسسته‌گی تصادفی را مرور کرده‌ایم. بهینه‌سازی هندسی مقید به معادله با مشتقات جزئی برای یک مدل خاص در بخش پنجم ارایه شده است و در بخش شش به‌عنوان مثال عددی، مساله بهینه‌سازی شکل نازل حل و نتیجه‌گیری از مقاله در بخش هفت گنجانده شده است.

## ۲ فرمول‌بندی مساله

### ۲-۱ فرمول‌بندی مساله

مساله بهینه‌سازی شکل عموماً به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\min_{S \in \mathcal{O}_{ad}} \{J(S, u) \mid E(S, u) = 0, S \in \mathcal{O}_{ad}, u \in \mathcal{U}\}, \quad (1)$$

<sup>1</sup> Bochner space

که در آن  $\mathcal{U}$  فضای حالت مساله است و زیر فضایی از فضای هیلبرت انعکاسی در نظر گرفته خواهد شد. در مساله (۱)،  $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$  مرز آزاد<sup>۱</sup> (پارامتر طراحی) است و  $\mathcal{D}$  دامنه یا همان شکل موردنظر است. در ادامه برای سادگی در فرمول نویسی پارامتر طراحی را نیز با  $\mathcal{D}$  نمایش خواهیم داد.  $\mathcal{O}_{ad}$  مجموعه همه شکل های شدنی است.  $\mathcal{D}$  شامل مرزهای آزاد است و در طول فرایند بهینه سازی، تغییر می کند و در نتیجه شکل سازه موردنظر نیز تغییر می کند.  $E$  در (۱) نشان دهنده معادله حالت می باشد. در این نوع مسایل غالباً مجموعه شکل های شدنی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{O}_{ad} := \{D \subset \mathbb{R}^d : \partial D \subset \mathcal{D}, \int_D dx = V\}. \quad (2)$$

که  $d \in \{2, 3\}$  عددی طبیعی است. همان طور که گفته شد پارامتر طراحی، مرزهای آزاد دامنه است که در اینجا برای جلوگیری از زیاد شدن تعداد متغیرها، با همان دامنه  $\mathcal{D}$  نشان می دهیم در ادبیات کنترل بهینه دامنه  $\mathcal{D}$  در واقع همان کنترل موردنظر است که ضمن برقراری معادله حالت و قیود فضای شدنی، باید تابع هدف مساله،  $J$ ، را کمینه کند. برای فرمول بندی مساله بهینه سازی شکل با پارامترهای تصادفی، متغیر حالت جواب یک معادله با مشتقات جزئی تصادفی در دامنه  $\mathcal{D}$  است. اغلب متغیر حالت به فضای باناخ (انعکاسی)  $X(\mathcal{D})$  از توابع تعلق دارد. معادله با مشتقات جزئی را که متغیر حالت در آن صدق می کند می توانیم با عملگر  $\bar{E}(\tilde{u}, \mathcal{D}) = 0$  نشان دهیم، فرض می کنیم که  $\bar{E}$  شرایط اولیه (در صورت وجود) و مرزی را شامل می شود.

فضای کامل احتمال را با  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  نشان می دهیم، مجموعه  $\Omega$  را در مقاله حاضر مجموعه پیشامدهای  $\omega$  در نظر خواهیم گرفت،  $\mathcal{F}$  سیگما جبری از پیشامدهاست و  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  اندازه احتمال است. مساله بهینه سازی شکل را به صورت زیر تعریف می کنیم:

تعریف ۱: فرض کنید  $\mathcal{O}_{ad} \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$  مجموعه ای شامل دامنه های شدنی باشد ( $\Lambda$  مجموعه همه زیر مجموعه هاست)،  $\mathcal{D}$  را دامنه کران دار با مرز لیشیتس<sup>۲</sup> در نظر بگیرید. به علاوه برای هر  $D \in \mathcal{O}_{ad}$  فضاهای بخنر  $L^2(\Omega; X(\mathcal{D}))$  و  $L^2(\Omega; Z(\mathcal{D}))$  را روی  $\mathcal{D}$  در نظر می گیریم. فرض کنید  $\bar{J}$  تابع هدف موردنظر باشد و  $\bar{E}$  عملگری بین مجموعه هایی از فضاهای توابع شدنی باشد

$$\bar{E}: \{(\tilde{u}, \mathcal{D}) | \tilde{u} \in L^2(\Omega; X(\mathcal{D})), \mathcal{D} \in \mathcal{O}_{ad}\} \rightarrow \{\tilde{z} | \tilde{z} \in L^2(\Omega; Z(\mathcal{D}))\},$$

آنگاه

$$\min \bar{J}(\tilde{u}, \mathcal{D}) \text{ s.t. } \{\bar{E}(\tilde{u}, \mathcal{D}) = 0, \mathcal{D} \in \mathcal{O}_{ad}\}, \quad (3)$$

را مساله بهینه سازی شکل تصادفی می نامیم.

برای بررسی مسایل بهینه سازی شکل ابتدا لازم است تا یک توپولوژی مناسب روی مجموعه دامنه های شدنی،  $\mathcal{O}_{ad} \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$  قرار دهیم؛ ولی همان طور که اشاره شد، راه حل مستقیمی برای این کار وجود ندارد. برای به دست آوردن متغیرهایی از جنس زیر مجموعه های  $\mathbb{R}^d$ ، محققان روش های مختلفی را برای بیان دامنه ها پیشنهاد

<sup>1</sup> Free boundary

<sup>2</sup> Lipschitz

کرده‌اند. روشی که در اینجا به کار می‌بریم، تصویر تبدیلی<sup>۱</sup> از دامنه مرجع (که آن را با  $D_{ref}$  نشان خواهیم داد) است که توسط مورات و سیمون [۱۶، ۱۵] معرفی شده است. بسته به نحوه نمایش دامنه، مفاهیم توپولوژیکی متفاوتی را می‌توان به کاربرد. در اینجا از اندازه کورانت و  $W^{1,p}$ -توپولوژی استفاده می‌کنیم و با کمک روش آشفتگی همانی به فرمول‌بندی مساله در فضاهای بختر می‌پردازیم.

## ۲-۲ روش آشفتگی همانی

ابتدا دامنه مرجع کران‌دار  $D_{ref} \in \mathcal{O}_{ad}$  را ثابت می‌گیریم. فرض کنیم دامنه شدنی  $D \in \mathcal{O}_{ad}$  می‌تواند با استفاده از تبدیل متناظر مناسب  $\tau \in T(D_{ref})$  مشخص شود به‌طوری که  $\tau(D_{ref}) = D$  در اینجا  $T(D_{ref}) = \{\tau: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid (\tau - id) \in S\}$  را فضای آفینی از تبدیل‌ها در نظر می‌گیریم که روی  $D_{ref}$  تعریف شده است و  $S$  فضای باناخ مناسبی است. به‌علاوه تبدیل‌های  $\tau \in T(D_{ref})$  را به مجموعه  $T_{ad}$  از توابع بیلشیتس<sup>۲</sup> محدود می‌کنیم که  $(\tau - id)$  به زیرمجموعه باز از  $S$  تعلق دارد. برای مرتبط کردن این روش با دامنه‌های شدنی، فرض می‌کنیم  $T_{ad} = \{\tau \in T(D_{ref}) \mid \tau(D_{ref}) \in \mathcal{O}_{ad}\}$ . با استفاده از این فرمول‌بندی، بهینه‌سازی شکل به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۲: فرض کنید  $T_{ad} \subset T(D_{ref})$  مجموعه‌ای از تبدیل‌های شدنی از دامنه مرجع  $D_{ref} \in \mathcal{O}_{ad}$  باشد. به‌علاوه برای هر  $\tau \in T_{ad}$  فرض کنیم  $L^{\vee}(\Omega; X(\tau))$  و  $L^{\vee}(\Omega; Z(\tau))$  فضای بختر باشند که روی  $\tau(D_{ref})$  تعریف شده است.  $\tilde{J}: \{(\tilde{u}, \tau) \mid \tilde{u} \in L^{\vee}(\Omega; X(\tau)), \tau \in T_{ad}\} \rightarrow \mathbb{R}$  تابع هدف است و  $\tilde{E}$  عملگری بین مجموعه‌هایی از فضاهای توابع شدنی است:

$$\tilde{E}: \{(\tilde{u}, \tau) \mid \tilde{u} \in L^{\vee}(\Omega; X(\tau)), \tau \in T_{ad}\} \rightarrow \{ \tilde{z} \mid \tilde{z} \in L^{\vee}(\Omega; Z(\tau)) \}.$$

در این صورت

$$\min \tilde{J}(\tilde{u}, \tau), \text{ s.t. } \tilde{E}(\tilde{u}, \tau) = 0, \tau \in T_{ad}, \quad (4)$$

را مساله بهینه‌سازی شکل تصادفی با تبدیل‌ها می‌نامیم.

برای رسیدن به خوش‌تعریفی مساله باید در نظر بگیریم که با فرض  $\tau_1, \tau_2 \in T_{ad}$  که  $\hat{D} := \tau_1(D_{ref}) = \tau_2(D_{ref})$ ، آنگاه برای جواب‌های  $u_1$  و  $u_2$  از  $\tilde{E}(u_1, \tau_1) = 0$  و  $\tilde{E}(u_2, \tau_2) = 0$  داریم  $\hat{u} = u_1 \circ \tau_1^{-1} = u_2 \circ \tau_2^{-1}$ . این فرض ضروری است؛ زیرا تبدیل‌های مختلفی که دامنه یکسان  $\hat{D}$  را بیان می‌کنند باید متغیر حالت یکسان  $\hat{u}$  را معرفی کنند، به‌طوری که  $\tilde{E}(\hat{u}, \hat{\tau}) = 0$  تضمین شده باشد. با وجود این، معمولاً این فرض به‌راحتی برقرار می‌شود. با این ساختار،  $\tau$  متعلق به فضای آفین تبدیل‌هاست؛ ولی  $\hat{u}$  در مجموعه  $\bigcup_{\tau \in T_{ad}} L^{\vee}(\Omega; X(\tau))$  قرار می‌گیرد که هنوز به هیچ توپولوژی‌ای مجهز نشده است. هدف تبدیل فضای  $L^{\vee}(\Omega; X(\tau))$  به فضای  $L^{\vee}(\Omega; X_{ref})$  است که توابع آن در دامنه مرجع  $D_{ref}$  تعریف شده است. در واقع

<sup>1</sup> Projecting transformation

<sup>2</sup> biLipschitz

متغیر  $(\tilde{u} \in L^1(\Omega; X(\tau)))$  با استفاده از تبدیل  $\tau$  می‌تواند به متغیر  $u = \tilde{u} \circ \tau$  که روی  $\mathcal{D}_{ref}$  تعریف شده است تبدیل شود. برای رسیدن به این منظور  $u = \tilde{u} \circ \tau$  که روی  $\mathcal{D}_{ref}$  و در فضای آفینی از تبدیل‌ها  $T(\mathcal{D}_{ref})$  و فضای بخنر  $(\tau \in L^1(\Omega; X(\tau)))$  قرار دارد، باید با دقت انتخاب شود. برای دست یافتن به این منظور معمولاً تبدیل‌ها طوری انتخاب می‌شود که درجه مشخصی از هموار بودن را داشته باشد. اغلب مجموعه تبدیل‌های شدنی  $T_{ad}$  باید به اندازه کافی کوچک انتخاب شود به این معنی که تنها آشفتگی‌های کوچک از دامنه مورد قبول قرار گیرد. برای این که بتوانیم فضای مناسبی از تبدیل‌ها  $T(\mathcal{D}_{ref})$  را تعریف کنیم، متناظر با فضای باناخ  $S$  فضای سوبولوف  $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d) = W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)^d$  را در نظر می‌گیریم. با به کار بردن  $S = W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)$  فضای  $T(\mathcal{D}_{ref})$  به فرم فضای  $\mathcal{V}^{k,\infty}$  خواهد بود که توسط مورات و سیمون در [۱۶] به صورت زیر تعریف شده است:

$$\mathcal{V}^{k,\infty} := \{\tau: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid (\tau - id) \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)\}.$$

که در آن  $k \geq 1$ . در اینجا برای هر تبدیل  $\tau \in \mathcal{V}^{k,\infty}$  جابه‌جایی متناظر  $(\tau - id) \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)$  را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که  $id \in \mathcal{V}^{1,\infty}$ ، از آنجا که  $id - id \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ ، در حالی که  $id \notin L^\infty(\mathbb{R}^d) \subset W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$  به روشنی داریم

$$\mathcal{V}^{k,\infty} = \{\tau: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid (\tau - id) \in L^\infty(\mathbb{R}^d), D^\alpha \tau \in L^\infty(\mathbb{R}^d), \forall \alpha \in \mathbb{N}_+^d, 1 \leq |\alpha| \leq k\}, \quad (5)$$

به علاوه  $\mathcal{V}^{k,\infty}$  می‌تواند به صورت زیر تعریف شود [۱۶ و ۱۰]:

$$\mathcal{V}^{k,\infty} = \{\tau: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid (\tau - id) \in L^\infty(\mathbb{R}^d), D^\alpha \tau \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \\ \sup_{x,y \in \mathbb{R}^d, x \neq y} \frac{\|D^\alpha \tau(y) - D^\alpha \tau(x)\|}{\|y - x\|} < +\infty, \forall \alpha \in \mathbb{N}_+^d, 1 \leq |\alpha| \leq k\},$$

حداقل فرض لازم برای تبدیل‌ها، به این صورت است که  $T_{ad}$  زیرمجموعه‌ای از

$$\mathcal{T}^{k,\infty} := \{\tau: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \tau \in \mathcal{V}^{k,\infty}, \tau^{-1} \in \mathcal{V}^{k,\infty}\}$$

باشد که  $k \geq 1$ ؛ بنابراین رابطه زیر را داریم:

$$T_{ad} \subset \mathcal{T}^{k,\infty} \subset \mathcal{V}^{k,\infty} = T(\mathcal{D}_{ref}) = \{\tau: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid (\tau - id) \in S\}.$$

که در آن  $S = W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)$  فضای سوبولوف است. توجه کنید که فضای آفین  $T(\mathcal{D}_{ref})$  (و بنابراین  $T_{ad}$ ) می‌تواند به توپولوژی‌ای که از فضای جابه‌جایی  $S$  به ارث رسیده، مجهز شود. با توجه به حفظ هموار بودن مرز و منظم بودن توابع تبدیل، مورات و سیمون در [۱۶] نتایج پایه‌ای را برای تکمیل بحث بررسی کرده‌اند.

<sup>1</sup> Sobolev space

## ۲-۳ دامنه‌های تبدیل، مرزها و توابع

برای دامنه کران دار  $D_{ref}$  و  $\tau \in T^{k,\infty}$  مجموعه  $\tau(D_{ref})$  نیز دامنه کران دار است. به علاوه برای منظم بودن دامنه‌ها نتایج زیر را داریم:

لم ۱: فرض کنید  $D_{ref}$  دامنه کران داری با مرز  $W^{k,\infty}$  باشد که  $k \geq 1$  و همچنین فرض کنیم  $\tau \in T^{k,\infty}$  در این صورت  $\tau(D_{ref})$  دامنه‌ای با مرز  $W^{k,\infty}$  خواهد بود [۱۶].

در صورتی که تبدیل‌های  $(\mathbb{R}^d)^{1,\infty}$  به اندازه کافی کوچک باشند، دامنه‌های لپشیتس حفظ می‌شود (ر.ک. لم ۳ در [۳۰]).

لم ۲: فرض کنید  $D_{ref}$  دامنه کران داری با مرز لپشیتس باشد در این صورت ثابت  $c(D_{ref}) < 1$  وجود دارد که برای هر  $\tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$  داریم:  $\|\tau - id\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)} < c(D_{ref})$  و  $\tau(D_{ref})$  دامنه کران داری با مرز لپشیتس است [۳۰].

اکنون تبدیل توابع به دامنه مرجع را تحلیل می‌کنیم. فرض کنید  $\tilde{f}: \Omega \times D \rightarrow \mathbb{R}^m$  تابعی با دامنه  $D = \tau(D_{ref})$  باشد که  $\tilde{f} \in L^1(\Omega; L^1(\tau))$ . برای نگاشت داده شده  $\tau \in T^{k,\infty}$  تابع تبدیل متناظر زیر را تعریف می‌کنیم:

$$f: \Omega \times D_{ref} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad f(\omega; x) := (\tilde{f}\tau)(\omega; x) = \tilde{f}(\omega; \tau(x)), \quad \forall \omega \in \Omega,$$

در این صورت  $f$  یک بازگشت<sup>۱</sup> از  $\tilde{f}$  به  $D_{ref}$  با  $\tau$  است. اگر  $f$  دیفرانسیل پذیر باشد، مشتق‌ها را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$D_{\tilde{x}} \tilde{f}(\omega; \tau(x)) = D_x f(\omega; x) \tau'(x)^{-1}, \quad \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}(\omega; \tau(x)) = \tau'(x)^{-T} \nabla_x f(\omega; x), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

که در آن  $\tilde{x} = \tau(x)$  متغیر فضای معین روی  $\tau(D_{ref})$  است. مورات و سیمون تأثیر تبدیل، روی منظم بودن تابع را بررسی کرده‌اند. مشابه لم ۴.۱ از [۱۶] داریم:

لم ۳: فرض کنید  $D$  دامنه‌ای باز باشد همچنین  $\tau \in T^{1,\infty}$  و  $1 \leq p \leq \infty$  آنگاه

$$f \in L^p(\Omega; \tau(D)) \Leftrightarrow f\tau \in L^p(\Omega; L^p(D)),$$

$$f \in L^1(\Omega; W^{1,p}(\tau(D))) \Leftrightarrow f\tau \in L^1(\Omega; W^{1,p}(D)),$$

$$f \in L^1(\Omega; W^{1,p}(\tau(D))) \Leftrightarrow f\tau \in L^1(\Omega; W^{1,p}(D)) \quad \text{اگر } p \in (1, +\infty) \text{ آنگاه}$$

این لم بسیاری از ابزارهای مورد نیاز برای بهینه‌سازی شکل را (که در آن متغیر حالت معادله با مشتقات جزئی موردنظر به فضاها بخنر  $L^1(\Omega; L^p(D))$  یا  $L^1(\Omega; W^{1,p}(D))$  تعلق دارد) فراهم می‌کند.

<sup>1</sup> pulback

### ۳ فرمول بندی در دامنه ثابت

اکنون می توانیم مساله بهینه سازی را به طور کامل روی دامنه ثابت  $D_{ref}$  (مرجع) تعریف کنیم. این کار با انتقال معادله با مشتقات جزئی مورد نظر بر روی دامنه مرجع، انجام می گیرد. با توجه به مساله (۴) عملگر  $\tilde{E}$  بین فضاها به صورت زیر تعریف شده است:

$$\tilde{E} : \{(\tilde{u}, \tau) | \tilde{u} \in L^{\vee}(\Omega; X(\tau)), \tau \in T_{ad}\} \rightarrow \{\tilde{z} | \tilde{z} \in L^{\vee}(\Omega; Z(\tau))\}.$$

در ادامه از نماد  $T_{ref}$  برای نمایش  $T(D_{ref})$  استفاده خواهیم کرد. اکنون فضاها  $L^{\vee}(\Omega; X(\tau))$  و  $L^{\vee}(\Omega; Z(\tau))$  را به فضاها  $L^{\vee}(\Omega; X_{ref})$  و  $L^{\vee}(\Omega; Z_{ref})$  منتقل کرده ایم،  $L^{\vee}(\Omega; X_{ref}) = \{\tilde{u} \circ \tau : \tilde{u} \in L^{\vee}(\Omega; X(\tau))\}$ . همچنین  $E : L^{\vee}(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \rightarrow L^{\vee}(\Omega; Z_{ref})$  حال  $\tilde{u} \in L^{\vee}(\Omega; X(\tau)) \mapsto u := \tilde{u} \circ \tau \in L^{\vee}(\Omega; X_{ref})$  عملگر تبدیل شده است، به طوری که برای همه  $\tau \in T_{ad}$  و هر  $\tilde{u} \in L^{\vee}(\Omega; X(\tau))$  داشته باشیم  $E(u, \tau) = \cdot \Leftrightarrow \tilde{E}(\tilde{u}, \tau) = \cdot$ .

به طور مشابه تابع هدف  $J : X_{ref} \times T_{ref} \rightarrow \mathbb{R}$  برای  $u = \tilde{u} \circ \tau \in L^{\vee}(\Omega; X_{ref})$  و  $\tau \in T_{ad}$  به صورت  $J(u, \tau) = \tilde{J}(\tilde{u}, \tau)$  تعریف می شود. همچنین فرض می کنیم که  $L^{\vee}(\Omega; Z(\tau))$  می تواند به طور مشابه منتقل شود. اکنون مساله (۴) را می توانیم به صورت زیر بیان کنیم:

تعریف ۳: مساله کمینه سازی

$$\min J(u, \tau) \quad \text{s.t. } E(u, \tau) = \cdot, \tau \in T_{ad}, \quad (6)$$

که در آن  $J : L^{\vee}(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \rightarrow \mathbb{R}$  تابع هدف است و  $E : L^{\vee}(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \rightarrow L^{\vee}(\Omega; Z_{ref})$  مساله بهینه سازی شکل با تبدیل ها روی دامنه ثابت نامیده می شود.

در این فرمول بندی یک مساله بهینه سازی روی دامنه ثابت در فضای توابع خواهیم داشت که در آن نقش متغیر کنترل را در مساله دارد؛ بنابراین می توانیم شیوه های کنترل بهینه را برای به دست آوردن شرایط بهینگی به کار ببریم و در ادامه از الگوریتم های بهینه سازی برای حل آن استفاده کنیم. توجه داریم که در مقابل سایر بردها و فضاهای تصویر از  $J$  و  $E$ ، فضای آفین  $T_{ref}$  فضای برداری نخواهد بود. در واقع داریم:

$$T_{ref} = \{\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d | (\tau - id) \in S\} = \{\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d | \tau = id + \hat{\tau}, \hat{\tau} \in S\} =: id + S,$$

با وجود این، از آنجا که یک نگاشت یک-به-یک بین تبدیل  $\tau \in T_{ref}$  و جابه جایی متناظر  $\hat{\tau} = \tau - id$  داریم، می توانیم  $T_{ref}$  را با فضای باناخ  $S$  مشخص کنیم. از آنجا که می خواهیم از شیوه های کنترل بهینه برای تحلیل مساله بهینه سازی شکل استفاده کنیم، می توانیم از این موضوع که برای  $E$  و  $J$  مشتقات جهتی نسبت به  $\tau$  در تمام جهتها، در فضای باناخ  $S$  قابل محاسبه هستند، استفاده کنیم. بنابراین می توانیم از جفت دوگان برای فضای باناخ  $S$  در همه جهتها نسبت به  $\tau$  استفاده کنیم. به عبارت دیگر  $\langle J_{\tau}(u, \tau), v \rangle_{S^*, S}$  برای هر  $u \in L^{\vee}(\Omega; X_{ref})$  و  $\tau \in T_{ad}$  و  $v \in S$  خوش تعریف است. اکنون معادله حالت را با فرم تغییری

$$\langle \tilde{E}(\tilde{u}, \tau), \tilde{v} \rangle_{L^Y(\Omega; Z(\tau))} = 0, \quad \forall \tilde{v} \in L^Y(\Omega; Z(\tau)^*), \quad (7)$$

بیان می کنیم. نماد  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  زوج دوگان است و  $Z(\tau)^*$  فضای مناسبی از توابع آزمون است که بر روی  $D = \tau(D_{ref})$  با  $\tau \in T_{ad}$  تعریف شده است. مانند متغیر حالت، توابع آزمون را نیز از  $D$  به  $D_{ref}$  برای هر  $x \in D_{ref}$  با استفاده از بازگشت  $v(x) := (\tilde{v} \circ \tau)(x)$  تبدیل می کنیم که در آن توابع آزمون برای مساله ای هستند که روی  $D = \tau(D_{ref})$  تعریف شده است. حال  $E(u, \tau)$  برای هر  $\tilde{v} \in L^Y(\Omega; Z(\tau)^*)$  و هر  $\tau \in T_{ad}$  به صورت زیر است:

$$\langle E(\tilde{u} \circ \tau, \tau), \tilde{v} \circ \tau \rangle_{L^Y(\Omega; Z_{ref})} := \langle \tilde{E}(\tilde{u}, \tau), \tilde{v} \rangle_{L^Y(\Omega; Z(\tau))}, \quad \forall \tilde{u} \in L^Y(\Omega; X(\tau)),$$

مفروضات زیر را داریم:

- برای هر  $\tau \in T_{ad}$ ،  $L^Y(\Omega; X_{ref})$  را طوری انتخاب می کنیم که
- $L^Y(\Omega; X_{ref}) \subset \{\tilde{u} \circ \tau \mid \tilde{u} \in L^Y(\Omega; X(\tau))\}.$
- برای هر  $\tau \in T_{ad}$ ،  $L^Y(\Omega; Z_{ref})$  را طوری انتخاب می کنیم که
- $L^Y(\Omega; Z_{ref}^*) = \{\tilde{v} \circ \tau \mid \tilde{v} \in L^Y(\Omega; Z(\tau)^*)\}.$
- جواب  $\tilde{u}(\tau)$  از معادله

$$\tilde{E}(\tilde{u}(\tau), \tau) = 0. \quad (8)$$

برای هر  $\tau \in T_{ad}$  در رابطه  $\tilde{u} \circ \tau \in L^Y(\Omega; X_{ref})$  صدق می کند.

فرض کنید  $\tau \in T_{ad}$  در این صورت معادله حالت تبدیل یافته، در فرم تغییری به صورت زیر خواهد بود:

$$\langle E(u, \tau), v \rangle_{L^Y(\Omega; Z_{ref})} = 0, \quad \forall v \in L^Y(\Omega; Z_{ref}^*), \quad (9)$$

با این ترتیب معادله (۹) در واقع برابر (۸) است؛  $\tilde{u}(\tau)$  مساله (۸) را حل می کند اگر و فقط اگر  $u = \tilde{u}(\tau) \circ \tau$  مساله (۹) را حل کند. برعکس  $u(\tau) \in L^Y(\Omega; X_{ref})$  مساله (۹) را حل می کند اگر و فقط اگر  $\tilde{u}(\tau) := u(\tau) \circ \tau^{-1}$  مساله (۸) را حل کند.

### ۳-۱ تبدیل فرم تغییری به معادله حالت

معمولاً یک فرم تغییری صرف بعد از تبدیل به دامنه مرجع، با استفاده از قاعده تبدیل برای انتگرال ها و مشتق ها، از معادله حالت اولیه به دست می آید. فرض کنید  $\tau \in T^{1, \infty}$  و  $\tilde{f} \in L^Y(\Omega; L^1(D_{ref}))$ ، سپس با استفاده از قاعده تبدیل برای انتگرال ها  $f = (\tilde{f} \circ \tau) |\det \tau'|$  روی  $\Omega \times D_{ref}$  انتگرال پذیر است:

$$\int_{\Omega} \int_{D_{ref}} (\tilde{f} \circ \tau)(\omega, x) dx \mu(d\omega) = \int_{\Omega} \int_{\tau(D_{ref})} f(\omega, x) |\det(\tau^{-1})'(x)| dx \mu(d\omega), \quad (10)$$

در تحلیل ویژگی های دیفرانسیل پذیری مساله بهینه سازی (۶) بررسی دیفرانسیل پذیری  $E(u, \tau)$  نسبت به  $u$  و  $\tau$  بسیار مفید خواهد بود. برای انتقال فرم تغییری معادله حالت از دامنه  $\tau(D_{ref})$  به دامنه مرجع  $D_{ref}$ ، قاعده

تبدیل برای انتگرال ها به کار می رود. در این حالت دیفرانسیل پذیری نگاشت های  $\tau \rightarrow |\det \tau'|$  و

$(\tau^{-1})' \rightarrow \tau$  باید توجه شود؛ بنابراین لم زیر را خواهیم داشت:

لم ۴: (الف) فرض کنید  $\tau \in T^{1,\infty}$  آنگاه  $\delta > 0$  وجود دارد که

$$|\det \tau'| \geq \delta, \quad a.a. \ x \in \mathbb{R}^d,$$

(ب) فرض کنید  $k \geq 1$ ، نگاشت  $g_1(\tau) = |\det \tau'|$  برای هر  $\tau \in T^{k,\infty}$  از  $T^{k,\infty}$  به  $W^{k-1,\infty}(\mathbb{R}^d)$

دیفرانسیل پذیر است. به علاوه برای هر  $\varphi \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)^d$  داریم:

$$g_1'(\tau)\varphi = \text{tr}((\tau^{-1})'\varphi') |\det \tau'|, \quad (11)$$

(پ) فرض کنید  $k \geq 1$ ، نگاشت  $g_2(\tau) = (\tau^{-1})'$  برای هر  $\tau \in T^{k,\infty}$  از  $T^{k,\infty}$  به  $W^{k-1,\infty}(\mathbb{R}^d)^{d \times d}$

دیفرانسیل پذیر است. به علاوه برای هر  $\varphi \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)^d$  داریم:

$$g_2'(\tau)\varphi = -(\tau^{-1})'\varphi'(\tau^{-1})', \quad (12)$$

**برهان.** (الف) از قسمت ii) در برهان لم ۴.۲ در مرجع [۱۶] آمده است. دیفرانسیل پذیری فرشت در قسمت (ب)

و (پ) نیز از لم های ۴.۲ و ۴.۳ همین منبع به دست می آید.

اگر تبدیل  $\tau$  دامنه ای را نشان دهد که بسیار به دامنه مرجع نزدیک است، آنگاه  $\delta > 0$   $|\det \tau'| \geq \delta$  و می توانیم قدر مطلق را از (۱۱) حذف کنیم.

### ۳-۲ مساله کاهش یافته، وجود جواب ها و شرایط بهینگی

فرض کنید  $L^2(\Omega; X_{ref})$  و  $L^2(\Omega; Z_{ref})$  فضاهای بخنر باشند و  $T_{ref} = id + S$  در این صورت مساله (۶)

یک مساله کنترل بهینه با کنترل  $\tau$  و حالت  $u(\tau)$  است و می توانیم از نظریه کنترل بهینه برای تحلیل وجود جواب و شرایط بهینگی استفاده کنیم. مطابق معمول ابتدا مجموعه های شدنی، جواب های بهینه و عملگر کنترل-به-حالت (عملگر طراحی-به-حالت) را معرفی می کنیم.

تعریف ۴: مجموعه  $\mathcal{G} = \{(u, \tau) \in L^2(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \mid E(u, \tau) = 0, \tau \in T_{ad}\}$  مجموعه شدنی مساله (۶)

می نامیم. به علاوه  $(\bar{u}, \bar{\tau})$  را جواب بهینه سرتاسری می نامیم هرگاه:

$J(\bar{u}, \bar{\tau}) \leq J(u, \tau), \quad \forall (u, \tau) \in \mathcal{G}$  اگر  $\epsilon > 0$  وجود داشته باشد به طوری که

$$J(\bar{u}, \bar{\tau}) \leq J(u, \tau), \quad \forall (u, \tau) \in \mathcal{G} \cap L^2(\Omega; X_{ref}) \times B_{||\cdot||_S}(\bar{\tau}, \epsilon),$$

اگر برای هر  $\tau \in T_{ad}$ ، حالت یکتای  $u(\tau) \in L^2(\Omega; X_{ref})$  وجود داشته باشد به طوری که  $E(u(\tau), \tau) = 0$ ،

آنگاه عملگر یکتای طراحی-به-حالت زیر را معرفی می کنیم:

$$S_u : T_{ad} \rightarrow L^2(\Omega; X_{ref}), \quad \tau \rightarrow u(\tau),$$

به علاوه می توانیم مساله بهینه سازی شکل کاهش یافته را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\min j(\tau) := \min J(S_u(\tau), \tau) \quad \text{s.t. } \tau \in T_{ad}. \quad (13)$$

براندنبرگ در [۳۱] چارچوبی را معرفی کرده است که وجود جواب برای مساله بررسی می شود:

لم ۵: فرض کنید  $S$  فضای باناخ باشد،  $T_{ref} = id + S$  و  $T_{ad}$  ناتهی، بسته و کران دار و  $L^Y(\Omega; X_{ref})$  فضای بخنر انعکاسی باشد. به علاوه معادله حالت  $E : L^Y(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \rightarrow L^Y(\Omega; Z_{ref})$  و تابع هدف  $J : L^Y(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \rightarrow \mathbb{R}$  را در نظر می گیریم. عملگر جواب  $S_u : T_{ad} \rightarrow L^Y(\Omega; X_{ref})$  را پیوسته در نظر می گیریم. همچنین فرض کنید  $\bar{S}$  فضای باناخ انعکاسی با جانشانی فشرده  $S \mapsto \bar{S}$  باشد و  $\bar{T}_{ad} \subset id + \bar{S}$  ناتهی، بسته، کران دار و محدب باشد که  $\bar{T}_{ad} \cap T_{ad} \neq \emptyset$  آنگاه مساله بهینه سازی شکل (۱۳) در  $\bar{T}_{ad} \cap T_{ad}$  جواب بهینه سرتاسری دارد.

برهان لم در منبع [۳۱] با استفاده از شیوه کنترل بهینه ارایه شده است.

برای به دست آوردن شرایط بهینگی فرض زیر را داریم:

فرض ۱:

۱. مجموعه  $T_{ad} \subset T_{ref}$  ناتهی، بسته و محدب است.

۲. تابع هدف  $J : L^Y(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \rightarrow \mathbb{R}$  و  $E : L^Y(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \rightarrow L^Y(\Omega; Z_{ref})$  به طور

پیوسته دیفرانسیل پذیر هستند.

۳. همسایگی باز  $\tilde{T}_{ref}$  از  $T_{ad}$  با  $T_{ad} \subset \tilde{T}_{ref} \subset T_{ref}$  وجود دارد به طوری که عملگر طراحی به-حالت

$S_u : \tilde{T}_{ref} \rightarrow L^Y(\Omega; X_{ref})$  موجود و  $S_u$  به طور پیوسته دیفرانسیل پذیر است.

۴. مشتق  $E_u(u(\tau), \tau)$  برای هر  $\tau \in T_{ad}$  یک-به-یک است و  $u(\tau) = S_u(\tau)$ .

برای به دست آوردن شرایط بهینگی، تابع لاگرانژ  $\mathcal{L} : L^Y(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \times L^Y(\Omega; Z_{ref}^*) \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر معرفی می کنیم:

$$\mathcal{L}(u, \tau, \lambda) := J(u, \tau) + \langle \lambda, E(u, \tau) \rangle_{L^Y(\Omega; Z_{ref})}, \quad (14)$$

تحت فرض ۱، جواب بهینه موضعی  $(\bar{u}, \bar{\tau}) \in L^Y(\Omega; X_{ref}) \times T_{ad}$  از مساله (۱۳) با در نظر گرفتن حالت الحاقی مناسب  $\bar{\lambda} \in L^Y(\Omega; Z_{ref}^*)$  در شرایط لازم بهینگی مرتبه اول زیر که شرایط کاروش-کان-تاكر نیز نامیده می شود، صدق می کند:

$$\langle \mathcal{L}_\lambda(\bar{u}, \bar{\tau}, \bar{\lambda}), \delta \lambda \rangle_{L^Y(\Omega; Z_{ref})} = \langle E(\bar{u}, \bar{\tau}), \delta \lambda \rangle_{L^Y(\Omega; Z_{ref})} = 0,$$

$$\langle \mathcal{L}_u(\bar{u}, \bar{\tau}, \bar{\lambda}), \delta u \rangle_{L^Y(\Omega; X_{ref})} = \langle J_u(\bar{u}, \bar{\tau}), \delta u \rangle_{L^Y(\Omega; X_{ref})} + \langle \bar{\lambda}, E_u(\bar{u}, \bar{\tau}) \delta u \rangle_{L^Y(\Omega; Z_{ref})} = 0,$$

$$\langle \mathcal{L}_\tau(\bar{u}, \bar{\tau}, \bar{\lambda}), \hat{\tau} - \bar{\tau} \rangle_S = \langle J_\tau(\bar{u}, \bar{\tau}) + E_\tau(\bar{u}, \bar{\tau}) \bar{\lambda}, \hat{\tau} - \bar{\tau} \rangle_S \geq 0, \quad \forall \hat{\tau} \in T_{ad},$$

که در آن اولین معادله، معادله حالت سیستم است و دومین معادله، معادله الحاقی است. معادله آخر برای ساختارهای مناسب  $S$  و  $T_{ad}$  می تواند به صورت معادله طراحی نوشته شود.

### ۳-۳ محاسبه مشتق شکل مرتبه اول

تحت فرض ۱ مشتق‌های تابع هدف کاهش یافته  $j(\tau) := J(u(\tau), \tau)$  را می‌توان مانند معمول با استفاده از قاعده زنجیره‌ای محاسبه کرد و  $u(\tau) = S_u(\tau)$  می‌تواند به صورت نماد جایگزینی برای عملگر طراحی-به-حالت به کار رود. در حقیقت برای مشتق‌های  $j \in \tau \in T_{ad}$  در جهت  $\delta\tau$  داریم:

$$\langle j'(\tau), \delta\tau \rangle_S = \langle J_u(u(\tau), \tau), u'(\tau)\delta\tau \rangle_{L^Y(\Omega; X_{ref})} + \langle J_\tau(u(\tau), \tau), \delta\tau \rangle_S,$$

$$= \langle u'(\tau)^* J_u(u(\tau), \tau), \delta\tau \rangle_S + \langle J_\tau(u(\tau), \tau), \delta\tau \rangle_S,$$

$$= \langle u'(\tau)^* J_u(u(\tau), \tau) + J_\tau(u(\tau), \tau), \delta\tau \rangle_S,$$

که در آن  $u'(\tau) \in Y(S, L^Y(\Omega; X_{ref}))$  عملگر الحاقی  $u'(\tau)^* \in Y(L^Y(\Omega; X_{ref}^*), S^*)$  است (توجه کنید که در اینجا  $Y(.,.)$  مجموعه همه عملگرهای خطی پیوسته بین دو فضا است)؛ بنابراین مشتق کاهش یافته  $j'(\tau) \in S^*$  برابر خواهد بود با

$$j'(\tau) = u'(\tau)^* J_u(u(\tau), \tau) + J_\tau(u(\tau), \tau). \quad (15)$$

اغلب محاسبه کارای عبارت دوم در (۱۵) در دسترس است. برای عبارت اول از روش الحاقی استفاده خواهیم کرد تا از محاسبه مستقیم  $u'(\tau)$  خودداری شود. کاربرد روش الحاقی در کنترل بهینه معمول و بر اساس ملاحظات زیر است:

مشتق معادله حالت  $E(u(\tau), \tau) = 0$  نتیجه می‌دهد:

$$E_u(u(\tau), \tau)u'(\tau) = -E_\tau(u(\tau), \tau), \quad (16)$$

و بنابراین  $u'(\tau)^* E_u(u(\tau), \tau)^* = -E_\tau(u(\tau), \tau)^*$ . حال معادله الحاقی زیر را معرفی می‌کنیم:

$$E_u(u(\tau), \tau)^* \lambda = -J_u(u(\tau), \tau).$$

اکنون با فرض ۱، عملگر  $E_u(u(\tau), \tau)^*$  پوشاست. بنابراین معادله الحاقی دارای جواب  $\lambda \in L^Y(\Omega; Z_{ref}^*)$  است. اکنون از عبارت اول (۱۵) داریم:

$$u'(\tau)^* J_u(u(\tau), \tau) = u'(\tau)^* (E_u(u(\tau), \tau)^* \lambda) = E_\tau(u(\tau), \tau)^* \lambda.$$

در نتیجه برای محاسبه مشتقات کاهش یافته به رابطه ساده زیر خواهیم رسید:

$$j'(\tau) = E_\tau(u(\tau), \tau)^* \lambda + J_\tau(u(\tau), \tau).$$

در مسایل بهینه‌سازی شکل،  $j'(\tau)$  را مشتق شکل می‌نامیم. الگوریتم محاسبه مشتق شکل در زیر خلاصه شده است:

### الگوریتم محاسبه گرادیان مرتبه اول

۱. فرض کنید  $\tau \in T_{ad}$  داده شده باشد، متغیر حالت  $u \in L^Y(\Omega; X_{ref})$  با حل معادله حالت به دست می آید:

$$\langle E(u(\tau), \tau), v \rangle_{L^Y(\Omega; Z_{ref})} = 0, \quad \forall v \in L^Y(\Omega; Z_{ref}^*).$$

۲. متغیر الحاقی متناظر  $\lambda \in L^Y(\Omega; Z_{ref}^*)$  را با حل معادله الحاقی زیر به دست آورید:

$$\langle \lambda, E_u(u(\tau), \tau) v \rangle_{L^Y(\Omega; Z_{ref})} = -\langle J_u(u(\tau), \tau), v \rangle_{L^Y(\Omega; X_{ref})}, \quad \forall v \in L^Y(\Omega; X_{ref}^*),$$

۳. مشتق کاهش یافته  $j'(\tau)$  از رابطه زیر به دست می آید:

$$\langle j'(\tau), \delta\tau \rangle_S = \langle \lambda, E_\tau(u(\tau), \tau) \delta\tau \rangle_{L^Y(\Omega; Z_{ref})} + \langle J_\tau(u(\tau), \tau), \delta\tau \rangle_S \quad \forall \delta\tau \in S^*.$$

### ۴ گسسته سازی تصادفی

#### ۴-۱ فرض نويز متناهی

متغیر تصادفی  $y_k: \Omega \rightarrow \Gamma_k \subset \mathbb{R}$  را برای  $k = 1, 2, \dots, M$  با  $M < +\infty$ ، حقیقی مقدار در نظر می گیریم که

دارای تابع چگالی احتمال  $\rho_k: \Gamma_k \rightarrow \mathbb{R}^+$  است. اکنون  $\rho(y) = \prod_{k=1}^M \rho_k(y_k)$  را چگالی توأم

$y \in \Gamma \equiv \prod_{k=1}^M \Gamma_k \subset \mathbb{R}^M$  تعریف می کنیم، همچنین می دانیم  $y = [y_1, y_2, \dots, y_M]^T$  برداری با بعد متناهی

است. در حل معادلات با مشتقات جزئی با روش های عددی، فرض متناهی بودن پارامترهای تصادفی بسیار حیاتی است. در این پژوهش این فرض را در نظر گرفته و برای سادگی نمایش روابط، از نمادگذاری فضاهای متناهی استفاده می کنیم. با این فرض تابع منبع تصادفی  $f$  به تعداد متناهی از متغیرهای تصادفی وابسته خواهند بود. به طور نمادین می توانیم بنویسیم  $f(y(\omega), x) = f(y_1(\omega), \dots, y_M(\omega); x)$  که در آن  $y = (y_1, \dots, y_M)$  یک بردار تصادفی است. فرض می کنیم که  $y_k$  برای  $k = 1, \dots, M$  دارای میانگین صفر و واریانس واحد هستند و همچنین دو به دو از هم مستقل اند. با فرض وابستگی خطی  $f$  به  $y$ ، خواهیم داشت:

$$f(y, x) = \mathbb{E}[f](x) + \sum_{k=1}^M f_k(x) y_k(\omega),$$

که در آن  $f_k$  برای  $k = 1, \dots, M$  به طور یکنواخت کران دار هستند. این گسترش همان توسیع کارهون-لویو است. در این مقاله برای این گسترش ها توسیع کارهون-لویو را به کار بسته ایم. این فرمول بندی برای انتگرال گیری بسیار مفیدتر خواهد بود. ابتدا برای فرمول بندی در فضای متناهی، با استفاده از قضیه دووب-دینکین<sup>۱</sup> داریم [۳۲]:

$$\int_{\Omega} \int_{\mathcal{D}} f(\omega, x) dx \mu(d\omega) = \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} f(y, x) dx \rho(y) dy.$$

<sup>1</sup> Doob-Dynkin

این فرمول‌بندی را برای استفاده از روش‌های عددی در ادامه به کار خواهیم بست. نحوه محاسبه توسیع کارهونن - لویو در [۳۳] مطالعه شد.

#### ۴-۲ روش نمونه‌گیری مونت کارلو

روش نمونه‌گیری مونت کارلو بر اساس ایجاد سیستمی از متغیرهای تصادفی  $y$  است که مستقل و با توزیع یکسان می‌باشد؛ بنابراین حل سیستم (۹) به صورت حل  $M$  سیستم معین، برای  $M$  حقیقی سازی متفاوت از  $Y$  است و بنابراین  $M$  جواب  $u^i(\tau) = u(y^j; \tau)$  را به دست خواهیم آورد که  $y^j$ ،  $i=1, \dots, M$  امین حقیقی سازی  $y$  است. زمانی که  $M$  جواب محاسبه شد با استفاده از آن‌ها می‌توان آماره‌های مورد نیاز را تخمین زد. برای مثال می‌توان میانگین را با استفاده از قضیه لم مرکزی به صورت  $\bar{u} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M u^i(\tau)$  تخمین زد. نرخ همگرایی این روش نسبتاً کند و برابر است با  $o(M^{-\frac{1}{2}})$  [۲۸].

#### ۴-۳ روش‌های هم‌محلی تصادفی

روش هم‌محلی تصادفی، در حالت کلی بر اساس توسیع چندجمله‌ای و به‌ویژه، درونیاب لاگرانژ است. ایده کلی، انتخاب مجموعه نقاط هم‌محلی  $y_M = \{y^j\}_{j=1}^M$  در فضای تصادفی است. بر این اساس معادله (۹) در هریک از نقاط  $y^j$  باید برقرار باشد، به این معنی که سیستم زیر برای  $j=1, 2, \dots, M$  حل می‌شود:

$$E(u(y^j; \tau), \tau) = 0, \quad (17)$$

برای هر  $j$ ، (۱۷) یک سیستم معین است و در نتیجه روش هم‌محلی شامل حل  $M$  سیستم معین خواهد بود. البته این یک تعریف گسترده برای روش هم‌محلی است که روش نمونه‌گیری مونت کارلو را نیز شامل می‌شود. معمولاً زمانی که روش‌های هم‌محلی به کار می‌رود، انتخاب هوشمندانه نقاط هم‌محلی انجام می‌گیرد. جواب معادله با مشتقات مورد نظر را می‌توان با استفاده از توابع درونیاب لاگرانژ نمایش داد. اکنون جواب معادله حالت (۱۷) با استفاده از درونیابی به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\tilde{u}(y) \equiv \mathcal{I}(u) = \sum_{j=1}^M u(y^j) h_j(y) v,$$

که در آن  $h_j$  چندجمله‌ای‌های لاگرانژ است و  $u(y^j) = u(y^j; \tau)$ . یادآوری می‌کنیم که چندجمله‌ای‌های لاگرانژ در فضای درونیابی مناسب، تعریف می‌شود و برای هر  $i, j \in \{1, 2, \dots, M\}$  داریم  $h_i(y^j) = \delta_{i,j}$ . در نتیجه درونیابی  $\tilde{u}(y)$  برابر جواب دقیق در هر  $M$  نقطه هم‌محلی است. با استفاده از جواب‌های معین در نقاط هم‌محلی، آماره‌های درونیابی را می‌توان محاسبه کرد و بنابراین می‌توان آماره‌های جواب تصادفی (۱۷) را به دست آورد. میانگین درونیابی  $\hat{u}$  برای مثال می‌تواند به صورت زیر نمایش داده شود:

$$\mathbb{E}[\tilde{u}] = \sum_{j=1}^M u(y^j) \int_{\Gamma} h_j(y) \rho(y) dy. \quad (18)$$

محاسبه امید ریاضی می تواند به صورت غیر بدیهی به دست آید که برای این کار اطلاعات چندجمله ای های لاگرانژ مورد نیاز است. یک روش استفاده از ماتریس وارون از نوع واندرموند، است که به محاسبات زیادی نیاز دارد. روش دیگر استفاده از قاعده انتگرال گیری<sup>۱</sup> برای به دست آوردن انتگرال است که به رابطه زیر می انجامد:

$$\mathbb{E}[\tilde{u}] = \sum_{j=1}^M u(y^j) \sum_{k=1}^M h_j(y_k) \rho(y_k) w_k,$$

که در آن  $y_k$  نقاط و  $w_k$  وزن های انتگرال گیری هستند. تقریب انتگرال در (۱۸) دقیق خواهد بود؛ زیرا چندجمله ای لاگرانژ از مرتبه  $M$  هستند و انتگرال گیری درجه دوم برای چندجمله ای هایی از این مرتبه دقیق است. رابطه به دست آمده برای میانگین درونیابی را می توان با انتخاب هوشمندانه نقاط هم محلی، ساده تر کرد. با تابع مشخصه چندجمله ای های لاگرانژ برای  $i, j \in \{1, 2, \dots, M\}$  که برابر  $h_i(y^j) = \delta_{i,j}$ ، است و بازنویسی روابط، میانگین به رابطه زیر کاهش می یابد:

$$\mathbb{E}[\tilde{u}] = \sum_{j=1}^M u(y^j) \rho(y^j) w_j,$$

به همین ترتیب واریانس درونیابی می تواند به صورت زیر محاسبه شود:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\tilde{u}] &= \sum_{k=1}^M \left( \sum_{j=1}^M u(y^j) \delta_{i,j}(y_k) - \mathbb{E}[\tilde{u}] \right)^2 \rho(y_k) w_k \\ &= \sum_{k=1}^M (u(y_k) - \mathbb{E}[\tilde{u}])^2 \rho(y_k) w_k \end{aligned}$$

## ۵ بهینه سازی هندسی با قید معادله با مشتقات جزئی بیضوی تصادفی

روش ارائه شده در بخش های قبلی را برای حل مساله بهینه سازی

$$J(\mathcal{D}) = \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} j(u(\mathcal{D})) dx dy. \quad (19)$$

و قید معادله با مشتقات جزئی زیر به کار می گیریم:

$$-\Delta u(y; x) + bu(y; x) = f(y; x), \quad \text{in } \Gamma \times \mathcal{D}, \quad (20)$$

با توجه به این که استخراج معادله حالت و الحاقی نیازی به انتقال دامنه ندارد، ابتدا آن ها را با معرفی لاگرانژین برای مساله بالا به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{D}, u(y; \mathcal{D}), p(y; \mathcal{D})) &= \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} j(u(\mathcal{D})) dx dy \\ &+ \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} p(y; \mathcal{D}) (-\Delta u(y; x) + bu(y; x) - f(y; x)) dx dy. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Quadrature Rule

به راحتی می توان دید که انتقال این انتگرال ها به دامنه ثابت با استفاده از تبدیل های  $\tau \in T_{ad}$  و رابطه (۱۰) انجام می پذیرد. همچنین توجه کنید که در اینجا برای سادگی، از فرمول بندی بر اساس دامنه استفاده می کنیم (توجه کنید که  $(D = (\tau + I)(D_{ref}))$  برای مساله بهینه سازی ساختار، غالباً متناظر قید معادله با مشتقات جزئی، با دو نوع شرایط مرزی سروکار داریم: شرط مرزی دیریکله و شرط مرزی نیومن که به طور جداگانه به بررسی آنها خواهیم پرداخت.

## ۵-۱ شرط مرزی نیومن

فرض کنیم  $u$  جواب سیستم (۲۰) با شرط مرزی نیومن زیر باشد:

$$\nabla u \cdot n = g_N(y, x), \quad \text{on } \Gamma \times \partial D_N \quad (21)$$

با تشکیل لاگرانژین برای مساله (۲۰) با شرط مرزی (۲۱) خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}(D, u, p) = \int_{\Gamma} \int_D j(u) dx dy + \int_{\Gamma} \int_D \nabla p \cdot \nabla u + b p u - p f dx dy - \int_{\Gamma} \int_{\partial D} p g_N dx dy,$$

که در آن  $u$  و  $p$  به فضای بخنر  $L^2(\Gamma; H^1(\mathbb{R}^d))$  تعلق دارند و  $d \in \{2, 3\}$ . باید توجه داشت که فضای  $H^1(\mathbb{R}^d)$  به دامنه  $D$  وابسته نیست و در نتیجه متغیرهای تابعک لاگرانژین از یکدیگر مستقل هستند. با محاسبه مشتق های جهتی لاگرانژین می توانیم سیستم بهینگی مساله کنترل بهینه به دست آمده را تشکیل دهیم. ابتدا مشتق جزئی  $\mathcal{L}$  نسبت به  $p$  و در جهت  $\delta p$  برابر خواهد بود با:

$$\mathcal{L}_p(D, u, p)(\delta p) = \int_{\Gamma} \int_D \nabla \delta p \cdot \nabla u + b \delta p u - \delta p f dx dy - \int_{\Gamma} \int_{\partial D} \delta p g_N dx dy, \quad (22)$$

که وقتی صفر می شود درواقع فرم تغییری معادله حالت را به دست می دهد. اکنون مشتق جزئی  $\mathcal{L}$  نسبت به  $u$  و در جهت  $\delta u \in L^2(\Gamma; H^1(\mathbb{R}^d))$  برابر خواهد بود با:

$$\mathcal{L}_u(D, u, p)(\delta u) = \int_{\Gamma} \int_D j'(u) \delta u dx dy + \int_{\Gamma} \int_D \nabla p \cdot \nabla \delta u + b p \delta u dx dy, \quad (23)$$

که وقتی صفر می شود فرم تغییری معادله الحاقی را به دست می دهد. اکنون برای محاسبه مشتق شکل باید مشتق جزئی  $\mathcal{L}$  را نسبت به دامنه  $D$  با فرض این که متغیرهای  $u$  و  $p$  ثابت هستند در جهت  $\tau$  محاسبه کنیم:

$$\mathcal{L}_D(D, u, p)(\tau) = \int_{\Gamma} \int_{\partial D_{ref}} \tau \cdot n (j(u) + \nabla p \cdot \nabla u + b p u - p f + \frac{\partial(p g_N)}{\partial n} + H p g_N) ds dy, \quad (24)$$

که در آن  $H$  خمیدگی میانگین است. اکنون باید توجه داشت که با متغیر حالت  $u(D_{ref})$  و الحاقی  $p$  دقیقاً به گرادیان تابع هدف (مشتق شکل) دست خواهیم یافت:

$$J'(D_{ref})(\tau) = \mathcal{L}_D(D_{ref}, u(D_{ref}), p)(\tau) + \int_{\Omega} \int_{D_{ref}} \mathcal{L}_u u(D_{ref}, u(D_{ref}), p) u'(D_{ref}) \tau ds dy,$$

در اینجا  $u$  به دامنه  $D$  وابسته و از متغیر الحاقی،  $p$  مستقل است. توجه کنید که از قضیه مشتق ترکیبی برای مشتق شکل استفاده کردیم. با قرار دادن  $p(D_{ref})$  که جواب معادله الحاقی است، عبارت دوم حذف می شود و در نتیجه خواهیم داشت:

$$J'(D_{ref})(\tau) = \mathcal{L}_D(D_{ref}, u(D_{ref}), p(D_{ref}))(\tau). \quad (25)$$

که مشتق پذیری تابع هدف نسبت به دامنه را برای محاسبه مشتق ترکیبی نیاز داریم.

## ۵-۲ شرط مرزی دیریکله

اکنون سیستم (۲۰) را با شرط مرزی دیریکله زیر در نظر می گیریم:

$$u = g_D(\omega, x), \quad \text{in } \Omega \times \partial D. \quad (26)$$

با توجه به این که شرط مرزی دیریکله تغییری نیست در نتیجه وارد کردن آن در فضای تابعی و به دست آوردن تابع لاگرانژین پیچیده خواهد بود. یک راه حل جایگزین برای حل این مشکل، استفاده از ضریب لاگرانژ

مکمل است. به عبارت دیگر برای  $\lambda$  لاگرانژین  $(u, p, \lambda) \in (L^2(\Gamma; H^1(\mathbb{R}^d)))^3$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathcal{L}(D, u, p, \lambda) = \int_{\Gamma} \int_D j(u) dx dy + \int_{\Gamma} \int_D \nabla p \cdot \nabla u + b p u - p f dx dy + \int_{\Gamma} \int_{\partial D} \lambda (u - g_D) ds dy.$$

در رابطه بالا متغیرها از یکدیگر مستقل هستند؛ زیرا متغیرهای  $(u, p, \lambda)$  به فضایی تعلق دارند که به دامنه  $D$  وابسته نیست. همچنین مشتق جزئی لاگرانژین  $\mathcal{L}$  نسبت به متغیرهای  $p$  و  $\lambda$  (با توجه به تعریف) به ترتیب به فرم تغییری معادله های حالت و شرط مرزی دیریکله می انجامد. برای به دست آوردن فرم تغییری معادله الحاقی،

مشتق جزئی لاگرانژین را نسبت به  $u$  و در جهت  $\delta u \in L^2(\Gamma; H^1(\mathbb{R}^d))$  محاسبه می کنیم:

$$\mathcal{L}_u(D, u, p, \lambda)(\delta u) = \int_{\Gamma} \int_D j'(u) \delta u dx dy + \int_{\Gamma} \int_D p \Delta \delta u + b p \delta u dx dy + \int_{\Gamma} \int_{\partial D} \lambda \delta u ds dy. \quad (27)$$

با استفاده از انتگرال گیری جزئی مجدداً خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u(D, u, p, \lambda)(\delta u) &= \int_{\Gamma} \int_D (j'(u) - \Delta p + b p) \delta u dx dy \\ &\quad + \int_{\Gamma} \int_{\partial D} (\nabla p \cdot n + \lambda) \delta u ds dy + \int_{\Gamma} \int_{\partial D} p \nabla \delta u \cdot n ds dy, \end{aligned}$$

حال شرط  $\mathcal{L}_u(D, u, p, \lambda)(\delta u) = 0$  برای همه  $\delta u \in L^2(\Gamma; H^1(\mathbb{R}^d))$  به سه رابطه خواهد انجامید. ابتدا  $\delta u$  را با محل فشرده در  $\Omega \times D_{ref}$  نظر می گیریم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$-\Delta p + b p = -j'(u), \quad \Omega \times D_{ref},$$

اکنون با صفر گرفتن  $\delta u$  روی  $\Omega \times \partial D_{ref}$  و با مقدار دلخواه برای  $\nabla \delta u \cdot n$  در فضای  $L^2(\Omega; L^2(\partial D_{ref}))$  روی  $\Omega \times \partial D_{ref}$  خواهیم داشت:  $p = 0$ . سرانجام با دلخواه گرفتن  $\delta u$  در فضای  $L^2(\Omega; H^1(D_{ref}))$  روی  $\Omega \times \partial D_{ref}$  خواهیم داشت:  $\nabla p \cdot n + \lambda = 0$ ، به این ترتیب دوباره به رابطه الحاقی خواهیم رسید. اکنون برای محاسبه مشتق شکل باید مشتق جزئی  $\mathcal{L}$  را نسبت به  $D$  و در جهت  $\tau$  به دست آوریم. با در نظر گرفتن جواب های  $u, p$  و ضریب لاگرانژ  $\lambda$  خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}_D(D, u, p)(\tau) = \int_{\Gamma} \int_{\partial D_{ref}} \tau n (j(u) + \nabla p \cdot \nabla u + b p u - p f + \frac{\partial(\lambda(u - g_D))}{\partial n} + H \lambda(u - g_D)) ds dy.$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی  $u = g_D, p = 0$  و همچنین  $\lambda = -\nabla p \cdot n$  روی  $\Omega \times \partial D_{ref}$  خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}_D(D_{ref}, u, p)(\tau) = J'(D_{ref})(\tau) + \int_{\Gamma} \int_{D_{ref}} \mathcal{L}_u(D_{ref}, u(D_{ref}), p) u'(D_{ref}) \tau ds dy.$$

یادآوری می کنیم که برای به دست آوردن این رابطه، با توجه به استقلال متغیرهای  $p$  و ضریب لاگرانژ  $\lambda$  از دامنه  $\mathcal{D}$  با استفاده از قضیه مشتق ترکیبی به دست آمد. اکنون با جایگذاری مقادیر  $p = p(\mathcal{D}_{ref})$  و  $\lambda = \nabla p(\mathcal{D}_{ref}).n$  که در آن جواب معادله الحاقی است، عبارت دوم حذف می شود و در نتیجه مشتق شکل موردنظر به دست می آید:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_{ref}, u, p)(\tau) = J'(\mathcal{D}_{ref})(\tau). \quad (28)$$

### ۳-۵ الگوریتم بهینه سازی عددی

در این بخش، الگوریتم گرادیان را برای بهینه سازی شکل موردنظر، به کار می بریم. برای کمینه سازی عددی تابع هدف  $J(\mathcal{D}) = \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} j(u(\mathcal{D})) dx dy$ ، با قیود به دست آمده در سیستم بهینگی در نظر گرفته می شود. فرمول تحلیلی گرادیان تابع هدف نسبت به  $\tau$  که شکل موردنظر  $\mathcal{D} = \tau(\mathcal{D}_{ref}) = (I + \tau)(\mathcal{D}_{ref})$  را پارامتری می کند به صورت زیر خواهد بود:

$$J'(\mathcal{D}_{ref})(\tau) = \int_{\Gamma} \int_{\partial \mathcal{D}_{ref}} \tau.n j(\mathcal{D}_{ref}) dx dy,$$

که در آن  $j(\mathcal{D}_{ref})$  تابعی از متغیر حالت  $u$  و الحاقی  $p$  نیز است. در نتیجه می توانیم شکل جدید را با شروع از شکل اول  $\mathcal{D}_{ref}$  به صورت  $\mathcal{D}_s = (I + \tau_s)(\mathcal{D}_{ref})$  که  $\tau_s = -sj(\mathcal{D}_{ref}).n$  محاسبه کنیم که در آن  $s$  گام کاهش می است. برای  $s$  به اندازه کافی کوچک، می توان اطمینان داشت که  $J(\mathcal{D}_s) \leq J(\mathcal{D}_{ref})$ . توجه داریم که برای به دست آوردن شکل جدید  $\mathcal{D}_s$  دو مساله وجود دارد: نخست آنکه بردار  $\tau_s \in T_{ad}$  باید در هر گام محاسبه شود در حالی که  $j(\mathcal{D}_{ref}).n$  پیش تر روی مرز  $\partial \mathcal{D}_{ref}$  تعریف شده است؛ بنابراین اثر موردنظر باید به درون  $\mathcal{D}_{ref}$  گسترش یابد تا بتوانیم  $\tau_s$  را محاسبه کنیم. مساله دوم این است که با توجه به این که اغلب فرض می کنیم  $\tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  و این که تابع  $j(\mathcal{D}_{ref})$  ممکن است به اندازه کافی منظم نباشد، باید پارامتر موردنظر را به اندازه کافی منظم کنیم [۱]. مطلب دیگری که برای پیاده سازی عددی باید به آن توجه داشت، اعمال قید محدودیت حجم در مسایل بهینه سازی شکل است که در رابطه (۲) با  $\int_{\mathcal{D}} dx = V$  مشخص شده و در آن  $V$  حجم اولیه است. برای اعمال این دسته از قیود از ضریب لاگرانژ  $l$  استفاده می شود (با این ضریب می توان قید حجم را وارد تابع لاگرانژین کرد). با این توصیف و با در نظر گرفتن  $\mathcal{D}_k := \mathcal{D}_{ref}$  به عنوان شکل آغازین، قسمت اصلی الگوریتم در هر گام برابر خواهد بود با:

- محاسبه پارامتر طراحی

$$\tau_k = \begin{cases} s.n_k \left( \frac{1}{4} (u - u_d)^2 + (\nabla u \cdot \nabla p + bup - fp) - l_k \right) & \text{on } \mathcal{S}, \\ 0 & \text{on } \partial \mathcal{D} \setminus \mathcal{S}, \end{cases} \quad (29)$$

- به هنگام سازی شکل:  $\mathcal{D}_{k+1} = (I + \tau_k)(\mathcal{D}_k)$

باید توجه داشت که مقدار پارامتر طراحی روی مرزهای ثابت برابر صفر است.

استراتژی که ما برای حل مساله کنترل بهینه روی مرز ثابت به کار برده ایم بهینه سازی-سپس-گسسته سازی نامیده می شود. حال سیستم بهینگی محاسبه شده است برای اعمال روش عددی، همان طور که در بخش ۴ توضیح داده شده است، از روش هم محلی تصادفی برای گسسته سازی استفاده می کنیم. در اینجا فرض می کنیم که  $\gamma^j$  برای  $j=1,2,\dots,M$  نقاط هم محلی باشد،  $k \in \mathbb{N}$  را با  $k=0$  به عنوان گام آغازین، به عنوان شمارنده تکرارها در نظر می گیریم.  $\tau$  را متناظر با  $D$  نقطه شروع قرار می دهیم. اکنون الگوریتم بهینه سازی عددی به صورت زیر خلاصه می شود:

۱. حل معادلات حالت و الحاقی: برای هر نقطه هم محلی  $\gamma^j$  سیستم معین متناظر معادله با مشتقات جزئی

تصادفی (۲۲) و (۲۳) (۲۲) و (۲۷) در حالت دیریکله را برای به دست آوردن  $(u_k^j, p_k^j, \lambda_k^j)$  حل کنید.

۲. جستجوی جهت: با استفاده از  $(u_k^j, p_k^j, \lambda_k^j)$  به دست آمده از گام (۱)، با استفاده از توسیع چندجمله ای

(۱۸) و به کار بردن قاعده انتگرال گیری، مقدار  $(\bar{u}_k, \bar{p}_k, \bar{\lambda}_k)$  را محاسبه کرده و با استفاده از آن و رابطه

(۲۹)، پارامتر طراحی (جابه جایی شبکه) را به دست می آوریم.

۳. به هنگام سازی: قرار می دهیم،  $D_{k+1} = (I + \tau_k)(D_k)$  و  $k := k+1$

برای بیان بیش تر توضیحات زیر می تواند مفید واقع شود:

(الف) منظم سازی: باید توجه داشت که گرادیان تابع هدف از ضرب داخلی  $\langle J'(D_{ref}), \tau \rangle$  استخراج می کنیم

که در تعریف مشتق فرشت ظاهر می شود. ضرب داخلی دارای ساختار هیلبرت (برای مثال  $H^1(D)$ ) است.

بنابراین جهت کاهشی  $d \in H^1(D)$  را می توان به طور یکتا از رابطه زیر به دست آورد:

$$\int_D \nabla d \nabla \tau + d \tau dx = \langle J'(D_{ref}), \tau \rangle, \quad (30)$$

که علاوه بر این که منظم بودن دلخواه گرادیان به دست می آید، رابطه (۳۰) را می توان به گسترش طبیعی

جابه جایی شبکه به همه دامنه تعبیر کرد [۱].

(ب) محدودیت حجم: مقدار ضریب لاگرانژین در هر تکرار به هنگام سازی می شود. با در نظر گرفتن مشتق

شکل به صورت  $J'(D) + IV'(D) = 0$  لاگرانژین در هر گام با استفاده از رابطه زیر به هنگام می شود:

$$l_{k+1} = \frac{(l_k + l)}{2} + \varepsilon_l (V - V_*).$$

که در آن  $\varepsilon_l$  عدد مثبت به اندازه کافی کوچکی است. با توجه به این که پارامتر تغییر شبکه و حجم پارامترهای

غیر تصادفی هستند، محاسبات مانند مساله های معین انجام می پذیرد.

(پ) محاسبه طول گام: محاسبه طول گام در این مسایل بسیار دشوار است و محاسبات را به اندازه قابل توجه

افزایش می دهد. با توجه به دشواری های قابل توجهی که برای استفاده از روش های کارایی مانند آرمیژو و ولف

وجود دارد در مقاله حاضر، طول گام را با محاسبه جهت های کاهشی قبلی به دست آورده ایم. به این ترتیب که

ضرب داخلی  $\langle d_k, d_{k-1} \rangle$  معیاری برای کاهش یا افزایش طول گام در نظر گرفته می شود. همچنین

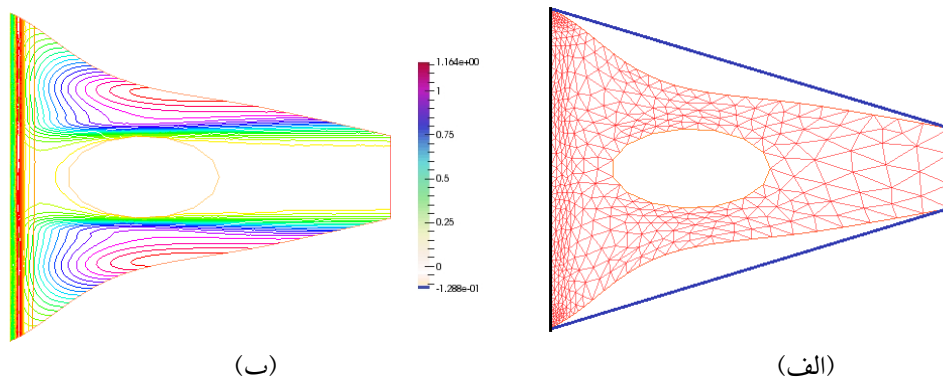
$\langle d_k, d_{k-1} \rangle$  می تواند معیاری را برای شرط توقف به دست دهد (در صورتی که جهت های کاهشی قبلی به اندازه کافی به هم نزدیک شود، می توان استنباط کرد که به نقطه بهینه رسیده ایم).

## ۶ مثال عددی

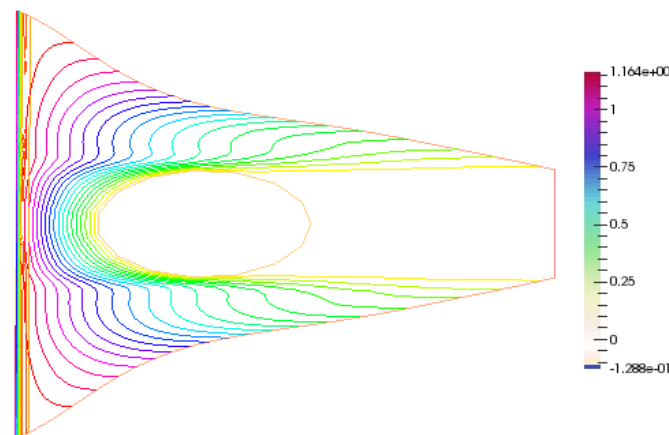
برای مطالعه مثال عددی، مساله آموزنده بهینه سازی شکل نازل را در نظر می گیریم. تابع هدف در رابطه (۱۹) برابر

$$J(\mathcal{D}, u) = \frac{1}{\gamma} \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} (u - u_d)^2 dx dy + \frac{\beta}{\gamma} \int_{\Gamma} \int_{\partial \mathcal{D}_N} g_N(y; x) u ds dy,$$

است و معادله حالت (۲۰)، با پارامترهای تصادفی، رفتار جریان در نازل را مدل سازی می کند. نازل شامل یک ورودی، یک خروجی و دیواره است. در این مساله حالت مساله تابع جریان  $u$  است و دیواره (مرز آزاد  $\mathcal{S}$ ) پارامتر طراحی است. همچنین فرض کرده ایم که جریان غیر چرخشی و متقارن است. در مقاله حاضر مساله نازل همگرا در نظر گرفته شده و در آن به دنبال جریان یکنواخت  $u_d$  در سراسر نازل هستیم، در حالی که جریان خروجی نازل ناچیز باشد. شکل ایده آل نازل ها که در کاربردهای مهندسی استفاده می شود هموار است که البته در اینجا با انتخاب مرز لپشیتس همواری مورد نظر به دست می آید. نازل اولیه در شکل ۱ نشان داده شده است. ورودی نازل با شرط مرزی دیریکله  $g_D = 2y_1x_2(1-x_2)$  که یک میدان تصادفی است، مدل شده است. در اینجا  $y_1$  دارای توزیع گاوسی با میانگین  $\bar{y}_1 = 2$  و واریانس  $Var[y_1] = 0.02$  در بازه  $[0, 2]$  است. جریان خروجی با شرط نیومن  $\xi \times 10^{-4}$ ، مدل شده که یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه  $[-1, 1]$  با مقدار کوچک (اغتشاش) در نظر گرفته شده است.  $b = 10^{-4} \times y_2(1-x_1)$  پارامتر تصادفی است که با توسیع کارهونن-لویو (بخش ۴) تقریب شده است. تابع منبع  $f = 10^{-2}(1-y_2^2)x_1$  که اثر دیواره نازل بر جریان را مدل کند، نیز میدان تصادفی در نظر گرفته شده که در آن  $y_2$  دارای توزیع نرمال در بازه  $[-1, 1]$  با میانگین و واریانس  $0.02$  است تا مدل مناسبی از اثر دیواره بر جریان، به دست دهد. در این مثال  $\beta = 1$  در نظر گرفته شده است. شکل ۲، جواب بهینه به دست آمده را برای نازل (که همان شکل بهینه است) نشان می دهد، همچنین تابع تراز میانگین جریان نیز در آن نشان داده شده است. در شکل ۳ نازل بهینه به همراه میانگین متغیر الحاقی نشان داده شده است.



**شکل ۱.** (الف) شکل اولیه نازل (خط های پر) و شکل نهایی نازل شبکه بندی شده است، (ب) شکل نهایی نازل که تراز میانگین متغیر الحاقی را نشان می دهد (سمت چپ ورودی نازل را نشان می دهد و سمت راست خروجی نازل است).



شکل ۲. تراز میانگین حالت نهایی متناظر با شکل بهینه (سمت چپ ورودی نازل و سمت راست خروجی نازل است)

نتایج عددی به دست آمده نشان می دهد که برای رسیدن به جریان دلخواه ( $u_d$ ) در ناحیه اندازه گیری (که در اینجا همه دامنه نازل دوبعدی است) با جریان ورودی تصادفی و غیر چرخشی داده شده  $g_D$  درحالی که جریان خروجی باید برابر با  $g_N$  باشد باید شکل نازل (شکل ۱) تغییر آن باید به گونه ای باشد که انرژی کمینه شود (عبارت دوم در تابع هدف) و حالت به دست آمده تا آنجا که ممکن است به حالت دلخواه نزدیک شود. در این صورت همان طور که انتظار می رود شکل نازل جمع تر شده است. البته با توجه به اعمال قید حجم مجاز می توان دید که بررسی مساله دشوار است و تنها کم کردن حجم ما را به جواب بهینه نمی رساند. در اینجا ضریب عبارت دوم می تواند مانند پارامتر منظم ساز در نظر گرفته شود بسته به این که کمینه کردن تابع انرژی در دامنه چه اندازه حایز اهمیت باشد. این دسته از مسایل در مهندسی کاربرد فراوانی دارد که می توان به طراحی تونل باد با جریان یکنواخت در داخل تونل اشاره کرد (در این صورت ضریب انرژی را نادیده می گیریم) درحالی که جریان باد ورودی رفتار تصادفی نسبت به مکان دارد.

یکی از ویژگی های اساسی روش های غیر نفوذی، در کنار قابلیت بهبود با انتخاب هوشمندانه نقاط (مانند نقاط هم محلی در روش هم محلی)، قابلیت ترکیب آن ها با روش های موجود برای حل دستگاه های معین است. این ویژگی به ما اجازه داده است تا از ابزارها و الگوریتم های کارای در دسترس برای به دست آوردن نتایج عددی استفاده کنیم. برای مقاله حاضر، کدها در سیستم عامل لینوکس پیاده سازی شده و از بسته نرم افزاری FEniCS [۳۴] منطبق با Python استفاده شده است. میانبر اصلی FEniCS بسته محاسباتی DOLFIN [۳۵] است که ابزارهای مناسبی را برای حل معادلات با مشتقات جزئی در اختیار قرار می دهد. برای حل مساله جابه جایی شبکه از افزونه FEMorph که توسط دکتر اشمیت [۳۶] توسعه داده شده، استفاده شده است. شکل ها با استفاده از نرم افزار Paraview [۳۷] ایجاد شده است.

## ۷ نتیجه‌گیری

در این مقاله مساله بهینه‌سازی شکل هندسی با ورودی‌های تصادفی (که آن را بهینه‌سازی هندسی تصادفی نامیدیم) ارایه شده است. فرمول‌بندی ما بر اساس کارهای مورات و سیمون [۱۶] برای پارامتری کردن مساله پی‌ریزی شده و با استفاده از ابزارهای کنترل بهینه تصادفی که در سال‌های اخیر توسعه داده شده، به بررسی و حل آن‌ها پرداختیم. برای گسسته سازی تصادفی از روش‌های غیر نفوذی مانند روش هم‌محلی تصادفی با استفاده از روش انتگرال‌گیری برای انتخاب شبکه، استفاده شده است و میدان‌های تصادفی را با استفاده از توسیع کارهونن-لویو تقریب زدیم. در ادامه روش ارایه شده را برای حل یک مساله آموزنده به کار بردیم تا کاربری روش نشان داده شود. باید توجه داشت که این روش برای حل این دسته از مسایل، در آغاز راه است و بنابراین مساله مشابهی برای مقایسه، در اختیار نبوده است؛ این نوع فرمول‌بندی برای استفاده در بهینه‌سازی، به‌خوبی انجام شده است اما هنوز برای بررسی کارایی روش‌های اعمال شده و همچنین بهبود کارایی آن‌ها باید مطالعات بیش‌تری صورت پذیرد.

## منابع

- [۲۲] مرادی، م.، صلاحی، م.، بردسیری، م.، جمالیان، ع.، (۱۳۹۳). یک مدل جدید استوار در طراحی شبکه زنجیره تأمین تحت عدم قطعیت. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۴۱(۲)، ۲۶-۹.
- [1] Allaire, G., (2006). Conception Optimale De Structures, Mathematiques And Applications. Heidelberg: Springer.
  - [2] Delfour, M.C., Zolésio, J.P., (2011). Shapes and Geometries: Metrics, Analysis, Differential Calculus, And Optimization, 22, Siam.
  - [3] Allaire, G., (2012). Shape Optimization By The Homogenization Method: Vol. 146, Springer Science & Business Media.
  - [4] Lions, J.L., Lelong, P., (1968). Contrôle Optimal De Systemes Gouvernés Par Des Équations Aux Dérivées Partielles, 7, Paris: Dunod.
  - [5] Pironneau, O., (1973). On Optimum Profiles In Stokes Flow. Journal Of Fluid Mechanics, 59(01): 117-128.
  - [6] Sokolowski, J., Zolesio, J.P., (1992). Introduction To Shape Optimization, pp. 5-12. Berlin: Springer.
  - [7] Cea, J., (1986). Conception Optimale Ou Identification De Formes. Calcul Rapide De La Dérivée Directionnelle De La Fonction Coût, RAIRO-Modélisation Mathématique Et Analyse Numérique, 20(3): 371-402.
  - [8] Marrocco, A., Pironneau, O., (1978). Optimum Design With Lagrangian Finite Elements: Design Of An Electromagnet. Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, 15(3): 277-308.
  - [9] Mohammadi, B., (2002). Global Optimization By The Solution Of Over-Determined Boundary Value Problems. Paris: Comptes Rendus De l'Académie Des Sciences.
  - [10] Delfour, M., Zolezio, J.P., (2001). Surface Derivatives. SIAM Series.
  - [11] Guillaume, P., Masmoudi, M., (1994). Computation Of High Order Derivatives In Optimal Shape Design. Numerische Mathematik, 67(2): 231-250.
  - [12] Hinze, M., Pinnau, R., Ulbrich, M., Ulbrich, S., (2009). Optimization With PDE Constraints, Vol. 23. Mathematical Modelling: Theory And Applications.
  - [13] Sethian, J. A., (2003). Level Set Methods And Fast Marching Methods. Journal Of Computing And Information Technology, 11(1): 1-2.
  - [14] Allaire, G., Jouve, F., Toader, A.M., (2002). A Level-Set Method For Shape Optimization. Comptes Rendus Mathématique, 334(12): 1125-1130.
  - [15] Murat, F., Simon, J., (1975). Etude Des Problèmes d'Optimum Design, Conf. IFIP, Lectures Notes In Computer Sciences, 41: 54-62.

- [16] Murat, F., Simon, J., (1974). Quelques Résultats Sur Le Contrôle Par Un Domaine Géométrique, 4, Laboratoire d'Analyse Numérique.
- [17] Micheletti, A. M., (1972). Metrica Per Famiglie Di Domini Limitati E Proprieta Generiche Degli Autovalori. Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa-Classe Di Scienze, 26(3): 683-694.
- [18] Zolesio, J. P., (1979). Identification De Domaines Par Deformation. Dissertation. Universite De Nice.
- [19] Kharmanda, G., Olhoff, N., Mohamed, A., Lemaire, M., (2004). Reliability-Based Topology Optimization. Structural And Multidisciplinary Optimization, 26(5): 295-307.
- [20] Ben-Tal, A., Nemirovski, A., (2002). Robust Optimization Methodology And Applications. Mathematical Programming, 92(3): 453-480.
- [21] De Gournay, F., Allaire, G., Jouve, F., (2008). Shape And Topology Optimization Of The Robust Compliance Via The Level Set Method. ESAIM: Control, Optimisation And Calculus Of Variations, 14(1): 43-70.
- [23] Conti, S., Held, H., Pach, M., Rumpf, M., Schultz, R., (2009). Shape Optimization Under Uncertainty-A Stochastic Programming Perspective. SIAM Journal On Optimization, 19(4): 1610-1632.
- [24] Chen, S., Chen, W., Lee, S., (2010). Level Set Based Robust Shape And Topology Optimization Under Random Field Uncertainties. Structural And Multidisciplinary Optimization, 41(4): 507-524.
- [25] Kouri, D. P., (2012). An Approach For The Adaptive Solution Of Optimization Problems Governed By Partial Differential Equations With Uncertain Coefficients. Dissertation. Rice University.
- [26] Rosseel, E., Wells, G.N. (2012). Optimal Control With Stochastic PDE Constraints And Uncertain Controls. Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, 213: 152-167.
- [27] Keyanpou, M., Nehrani A.M., (2014). Optimal Thickness Of A Cylindrical Shell Subject To Stochastic Forces. Journal of Optimization Theory and Applications. In Publication. Doi.Org/10.1007/S10957-014-0663-Y
- [28] Xiu, D., (2010). Numerical Methods For Stochastic Computations: A Spectral Method Approach. Princeton University Press.
- [29] Kunoth, A., Schwab, C., (2013). Analytic Regularity And GPC Approximation For Control Problems Constrained By Linear Parametric Elliptic And Parabolic PDEs. SIAM Journal On Control And Optimization, 51(3): 2442-2471.
- [30] Bello, J. A., Fernández-Cara, E., Lemoine, J., Simon, J., (1997). The Differentiability Of The Drag With Respect To The Variations Of A Lipschitz Domain In A Navier-Stokes Flow. SIAM Journal On Control And Optimization, 35(2): 626-640.
- [31] Brandenburg, C., (2011). Adjoint-Based Adaptive Multilevel Shape Optimization Based On Goal-Oriented Error Estimators For The Instationary Navier-Stokes Equations. Verlag Dr. Hut.
- [32] Oksendal, B., (2003). Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer.
- [33] Loeve, M., (1946). Fonctions Aleatoires De Second Ordre. Revue Scientifique. 84:195-206.
- [34] FEniCS project website: <http://fenicsproject.org/>
- [35] DOLFIN is the C++/Python interface of FEniCS:  
<http://bitbucket.org/fenics-project/dolfin>
- [36] FEMorph addon for Python: <http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~schmidt/femorph.php>
- [37] ParaView official site: <http://www.paraview.org/>