

دیدگاه جدیدی از مجموعه‌های برشی برای مجموعه‌های فازی مردد

بهرام فرهادی نیا*

۱- دانشیار، دانشگاه صنعتی قوچان، گروه ریاضی، قوچان، ایران

رسید مقاله: ۲۵ دی ۱۳۹۷

پذیرش مقاله: ۷ اردیبهشت ۱۳۹۹

چکیده

در این مقاله به دنبال آن هستیم تا دیدگاه جدیدی را در مورد مجموعه‌های برشی برای مجموعه‌های فازی مردد مطرح نماییم. در قیاس با تحقیقات انگشت شماری که در مورد مجموعه‌های برشی برای مجموعه‌های فازی مردد صورت گرفته است، نه تنها مفهوم جدید درگیر پیچیدگی‌هایی همچون وابستگی به پارامترهای اضافی مانند تنها تعریف موجود نمی‌باشد بلکه از یک سو با اصول پذیرفته‌شده برای سایر توسیع‌های مجموعه‌های فازی سازگار است و از سویی دیگر تحدید آن به مجموعه‌های خاص تر همچون مجموعه‌های فازی بازه‌ای-مقدار، مجموعه‌های فازی شهودی مجموعه‌های فازی شهودی بازه‌ای-مقدار و مجموعه‌های فازی سه بعدی نتایج کاملاً قابل انتظاری را به همراه دارد. در ادامه، بر پایه مفهوم ارایه شده از مجموعه‌های برشی برای مجموعه‌های فازی مردد، قضایای تجزیه و قضایای نمایش مربوطه ارایه می‌گردد که خود آنها می‌تواند مبنای کارهای آتی جهت کاربرد مجموعه‌های برشی در تصمیم‌گیری چند معیاره در مسایل مبتنی بر مجموعه‌های فازی مردد باشد.

کلمات کلیدی: مجموعه‌های فازی مردد، مجموعه برشی، قضایای تجزیه و نمایش.

۱ مقدمه و پیشینه تحقیق

مجموعه برشی تعریف شده بر روی مجموعه‌های فازی نقش مهمی در موضوعات مرتبط با نظریه مجموعه‌های فازی مخصوصاً جبر فازی [۱]، تصمیم‌گیری فازی [۲-۴] و علت یابی فازی [۵] دارد. از نقطه نظر بنیادین، مفهوم مجموعه برشی پلی ما بین مجموعه‌های فازی و مجموعه‌های کلاسیک می‌باشد. بر این اساس، تاکنون تعداد قابل توجهی از تحقیقات پایه‌گذاری و مورد بررسی قرار گرفته است. از جمله آنها می‌توان به تحقیقات یوان و همکاران [۶] اشاره نمود که در آن ویژگی‌های سه نوع مجموعه برشی براساس مفاهیم همسایگی و Q -همسایگی در توپولوژی فازی توضیح داده و بررسی شده است. سپس مفاهیم قضیه تجزیه، قضیه نمایش و اصول توسیع را براساس مجموعه‌های برشی تعریف کرده‌اند. در ادامه، یوان و همکاران [۷، ۸] نوعی مجموعه برشی را

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: bfarhadinia@qiet.ac.ir

برای مجموعه فازی شهودی (IFS^1) به عنوان تعمیم مواردی برای مجموعه‌های فازی ارایه داده است و علاوه بر این مفاهیمی از قضیه‌های نمایش، تجزیه و مجموعه برشی از مجموعه‌های فازی بازه‌ای-مقدار ($IVFS^2$) ارایه کرده‌اند. مارتینیتی و همکاران [۹] با ارایه مفهوم مجموعه برشی برای مجموعه فازی شهودی، ویژگی‌های آنها را از دیدگاه عاطفی و روابط نقیض توصیف کرده‌اند. وانگ [۱۰] روابط بین چهار نوع مجموعه برشی تعریف شده بر روی مجموعه‌های نرم مبهم (VSS^3) را بحث کرده و علاوه بر این قضایای تجزیه و نمایش از مجموعه‌های نرم مبهم را مورد بررسی قرار داده است. چن و چن [۱۱] قضیه تجزیه را برای تانسورهای فازی و چن [۱۲] قضیه تجزیه را برای تانسورهای فازی شهودی مطرح نمودند.

با این حال موضوع مجموعه برشی برای مجموعه‌های فازی مردد (HFS^4) به‌ندرت در مقالات بررسی شده است و از محدود کارهای ارایه شده می‌توان به مقاله الکانتوود و تورا [۱۳] اشاره نمود. در این مقاله، قضیه تجزیه برای مجموعه‌های فازی مردد معمولی ($THFS^5$) بیان می‌شود و علاوه بر این، تعدادی از ویژگی‌های مجموعه برشی به مفهوم یکنواختی مجموعه‌های فازی مردد معمولی اثبات شده است.

چیزی که باید به آن توجه داشت این است که مفهوم مجموعه برشی برای مجموعه‌های فازی مردد ارایه شده توسط الکانتوود و تورا [۱۳] بر این مبناست که تمامی عنصرهای فازی مردد ($HFEs^6$) از مجموعه‌های فازی مردد باید دارای تعداد یکسانی باشند (چه در حالت خوشینانه و چه در حالت بدینانه) و این در حالی است که چنین محدودیتی در ارایه مفهوم مجموعه برشی در این مقاله لازم نیست. از طرفی دیگر، در این مقاله، به‌جای فرایند محاسباتی پیچیده ارایه شده توسط الکانتوود و تورا [۱۳] فرایندی محاسباتی بسیار آسان و به‌کار برده شده برای سایر مجموعه‌های فازی، مجموعه‌های فازی بازه‌ای-مقدار، مجموعه‌های فازی شهودی مجموعه‌های فازی شهودی بازه‌ای-مقدار و مجموعه‌های فازی سه بعدی مورد باز تعریف قرار گرفته است.

در این مقاله نیت بر این است تا چهار نوع از مجموعه‌های برشی برای مجموعه‌های فازی مردد را تعریف نماییم که البته هر نوع مجموعه برشی دارای ویژگی‌های مشابهی با مابقی مجموعه‌های برشی دیگر می‌باشد. علاوه بر این، قضیه‌های تجزیه و نمایش براساس هر نوع مجموعه برشی ارایه می‌گردد. موضوع مورد توجه در این مقاله این است که مجموعه‌های برشی پیشنهادی و قضیه‌های تجزیه و نمایش برای مجموعه‌های فازی مردد تعمیم‌هایی از مجموعه برشی برای مجموعه فازی [۶]، مجموعه‌های فازی بازه‌ای-مقدار [۸]، مجموعه‌های فازی شهودی [۸]، مجموعه‌های فازی شهودی بازه‌ای-مقدار [۱۴] و مجموعه‌های فازی سه بعدی [۷] هستند.

قابل به ذکر است که مفهوم مجموعه برشی ارایه شده در این مقاله به سادگی قابلیت توسیع به سایر مجموعه‌های گسترش‌یافته از مجموعه‌های فازی مردد مانند مجموعه‌های فازی مردد دوگان [۱۵]، مجموعه‌های فازی مردد تعمیم یافته [۱۶]، مجموعه‌های فازی مردد زبانی [۱۷، ۱۸] را دارد.

¹ Intuitionistic Fuzzy Set

² Interval-valued Fuzzy Set

³ Vague Soft Set

⁴ Hesitant Fuzzy Set

⁵ Typical Hesitant Fuzzy Set

⁶ Hesitant Fuzzy Element

ساختار این مقاله به صورت زیر می‌باشد: در بخش ۲ پس از بررسی برخی تعاریف اولیه، مجموعه برشی برای مجموعه‌های فازی مردد تعریف شده و ویژگی‌های آن مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش ۳ قضیه تجزیه برای مجموعه‌های فازی مردد ارایه گردیده است. بخش ۴ نیز به ارایه قضیه نمایش برای مجموعه‌های فازی مردد اختصاص یافته است. در نهایت، این مقاله در بخش ۵ نتیجه‌گیری‌های لازم را بیان نموده است.

۲ بیان مساله

در این قسمت، ابتدا به توصیف تعاریف اولیه مربوط به مجموعه‌های فازی خواهیم پرداخت و سپس تعمیم آن‌ها را بر روی مجموعه‌های فازی مردد [۱۹-۲۱] بیان می‌سازیم. قبل از پرداختن به هر مبحثی لازم است تا در اینجا مفهوم مجموعه‌های فازی را ارایه و تعریف نماییم. به طور کلی، مجموعه فازی معمولی [۲۲] مانند H بر روی X به صورت $H = \{x, H(x) : x \in X\}$ تعریف می‌شود که $H : X \rightarrow [0, 1]$ می‌باشد و علاوه بر این مقدار حقیقی $H(x)$ درجه عضویت x در H را مشخص می‌کند. تعریف ۱.۲. فرض کنید که H یک مجموعه فازی بر روی X باشد و علاوه بر این $\theta \in [0, 1]$ را در نظر می‌گیریم. سپس تعریف می‌کنیم

$$H_\theta = \{x | x \in X, H(x) \geq \theta\}, \quad (\text{مجموعه برشی } \theta - \text{ بالایی از } H) \quad (۱)$$

$$H_\theta = \{x | x \in X, H(x) > \theta\}, \quad (\text{مجموعه برشی } \theta - \text{ بالایی قوی از } H) \quad (۲)$$

$$H^\theta = \{x | x \in X, H(x) \leq \theta\}, \quad (\text{مجموعه برشی } \theta - \text{ پایینی از } H) \quad (۳)$$

$$H^\theta = \{x | x \in X, H(x) < \theta\}, \quad (\text{مجموعه برشی } \theta - \text{ پایینی قوی از } H) \quad (۴)$$

$$H_{[\theta]} = \{x | x \in X, \theta + H(x) \geq 1\}, \quad (\text{مجموعه برشی شبه } \theta - \text{ بالایی از } H) \quad (۵)$$

$$H_{[\theta]} = \{x | x \in X, \theta + H(x) > 1\}, \quad (\text{مجموعه برشی شبه } \theta - \text{ بالایی قوی از } H) \quad (۶)$$

$$H^{[\theta]} = \{x | x \in X, \theta + H(x) \leq 1\}, \quad (\text{مجموعه برشی شبه } \theta - \text{ پایینی از } H) \quad (۷)$$

$$H^{[\theta]} = \{x | x \in X, \theta + H(x) < 1\}, \quad (\text{مجموعه برشی شبه } \theta - \text{ پایینی قوی از } H) \quad (۸)$$

تعریف ۲.۲. یک لاتیس کاملاً توزیع پذیر L یک F لاتیس گفته می‌شود اگر یک نگاشت $L \rightarrow L : *$ وجود داشته باشد به طوری که $a \leq b \Rightarrow *(a) \geq *(b)$ و $*(a) = a$ برقرار باشد.

تعریف ۳.۲. یک مجموعه فازی مردد H_A در X عبارت است از

$$H_A = \{(x, h_A(x)) | x \in X\} \quad (۹)$$

که در آن $h_A(x) \in [0, 1]$ نشان‌دهنده درجه عضویت ممکن $x \in X$ به H_A می‌باشد.

از این پس، از نماد $h_A(x)$ به عنوان عنصر فازی مردد نام می‌بریم و در این حالت واضح است که هر مجموعه فازی مردد H_A یک فرم کلی از مجموعه‌های فازی است و وقتی تنها شامل یک عضو باشد به مجموعه فازی تقلیل می‌یابد. این موضوع ثابت می‌کند که نظریه مجموعه‌های فازی مردد شکل کلی نظریه مجموعه‌های فازی است.

با توجه به گوناگونی عنصرهای فازی مردد، فرض می‌کنیم که تمامی اعضا در هر عنصر فازی مردد به صورت افزایشی مرتب شده باشد و علاوه بر این، برای حالتی که دو عنصر فازی مردد $h_A(x)$ و $h_B(x)$ دارای طول مشابهی نیستند، توسیع عنصر فازی مردد کوتاه‌تر را با تکرار عضو ماکزیمم آن تا رسیدن به طول یکسان برای عنصرهای فازی مردد در نظر می‌گیریم. بر اساس این فرایند مشابه‌سازی تعداد مقادیر در عنصرهای فازی مردد، مجموعه تمام مجموعه‌های فازی مردد تعریف شده روی X را با $HFS(X, N)$ مشخص می‌کنیم که در آن‌ها عنصرهای فازی مردد طول یکسان N را دارند. بنابراین، تمامی مجموعه‌های فازی مردد در $HFS(X, N)$ می‌توانند با رابطه زیر نشان داده شوند

$$H_A = \langle X, h_A \rangle \quad (10)$$

که برای هر $x \in X$ به صورت زیر قابل نمایش است

$$H_A(x) = \langle h_A^{\sigma(1)}(x), \dots, h_A^{\sigma(N)}(x) \rangle. \quad (11)$$

حال برای هر $H_A = x, h_A \in HFS(X, N), H_B = x, h_B \in HFS(X, N), H_{A_i} = x, h_{A_i} \in HFS(X, N)$ با $i \in I$ که I مجموعه اندیس‌ها است، مجموعه عملگرهای زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} H_A \subseteq H_B &\Rightarrow h_A^{\sigma(j)}(x) \leq h_B^{\sigma(j)}(x), j = 1, \dots, N, \forall x \in X; \\ H_{A^c} &= \langle X, h_{A^c} \rangle \Leftrightarrow H_{A^c}(x) = \langle 1 - h_A^{\sigma(N)}(x), \dots, 1 - h_A^{\sigma(1)}(x) \rangle; \\ H_A \cup H_B &= \langle X, h_{A \cup B} \rangle \Leftrightarrow H_{A \cup B}(x) = \langle h_A^{\sigma(1)}(x) \vee h_B^{\sigma(1)}(x), \dots, h_A^{\sigma(N)}(x) \vee h_B^{\sigma(N)}(x) \rangle; \\ H_A \cap H_B &= \langle X, h_{A \cap B} \rangle \Leftrightarrow H_{A \cap B}(x) = \langle h_A^{\sigma(1)}(x) \wedge h_B^{\sigma(1)}(x), \dots, h_A^{\sigma(N)}(x) \wedge h_B^{\sigma(N)}(x) \rangle; \\ H_A = \bigcup_{i \in I} H_{A_i} &\Leftrightarrow H_A(x) = \langle \bigvee_{i \in I} h_{A_i}^{\sigma(1)}(x), \dots, \bigvee_{i \in I} h_{A_i}^{\sigma(N)}(x) \rangle; \\ H_A = \bigcap_{i \in I} H_{A_i} &\Leftrightarrow H_A(x) = \langle \bigwedge_{i \in I} h_{A_i}^{\sigma(1)}(x), \dots, \bigwedge_{i \in I} h_{A_i}^{\sigma(N)}(x) \rangle; \end{aligned}$$

با مشخص کردن $1 = X, 0 = X, \emptyset = X$ ، به آسانی از تعریف ۲.۲ نتیجه می‌گیریم که

$$(HFS(X, N), \cup, \cap, \langle 1 \rangle, \langle 0 \rangle)$$

یک F لاتیس است.

فرض کنید $(N+1)^X = \{H \mid H: X \rightarrow \left\{0, \dots, \left(1 - \frac{j}{N}\right), \dots, 1\right\}\}_{j=0}^N$ بیانگر گردهای از مجموعه‌های فازی

$N+1$ -مقداره در X برقرار باشد. آنگاه می‌توان ثابت کرد که $((N+1)^X, \cup, \cap, \bar{\cdot}, \cdot)$ یک F لاتیس

مطابق با عملگرهای مجموعه‌های فازی است که برای هر $H, H_i \in (N+1)^X$ به صورت زیر داده شده است

$$\begin{aligned} (H_1 \cup H_2)(x) &= H_1(x) \vee H_2(x); \\ (H_1 \cap H_2)(x) &= H_1(x) \wedge H_2(x); \\ H^c(x) &= 1 - H(x); \\ \bar{\cdot}(x) &= 0, \bar{1}(x) = 1; \\ (\bigcap_{i \in I} H_i)(x) &= \bigcap_{i \in I} H_i(x); \\ (\bigcup_{i \in I} H_i)(x) &= \bigcup_{i \in I} H_i(x); \end{aligned}$$

برای هر $x \in X$.

فرض کنید که $H_A = \langle X, h_A \rangle \in HFS(X, N)$ یک مجموعه فازی مردد و $\theta \in [0, 1]$ باشد. مبتنی بر قرارداد لحاظ شده در این مقاله، مقادیر یک عنصر فازی مردد $H_A(x) = \{h_A^{\sigma(1)}(x), \dots, h_A^{\sigma(N)}(x)\}$ به صورت افزایشی مرتب شده‌اند و لذا می‌توان افزایش $[h_A^{\sigma(1)}(x), 1], \dots, [h_A^{\sigma(N)}(x), 1]$ را در نظر گرفت. بر این اساس، نتیجه می‌گیریم که:

- اگر $\theta \in [0, h_A^{\sigma(1)}(x)]$ ، آنگاه x باید در H_A باشد به این مفهوم که $x \in H_A$ باید دارای درجه عضویت ۱ باشد؛

- اگر $\theta \in (h_A^{\sigma(j)}(x), h_A^{\sigma(j+1)}(x)]$ برای $j = 1, 2, \dots, N-1$ برقرار باشد. آنگاه $x \in H_A$ دارای درجه عضویت $\left(1 - \frac{j}{N}\right)$ است.

- اگر $\theta \in (h_A^{\sigma(N)}(x), 1]$ آنگاه x باید در H_A نباشد. بنابراین درجه عضویت $x \in H_A$ باید ۰ باشد. مباحث بعدی مواردی خواهند بود که برای تعریف مجموعه برشی مجموعه فازی مردد کمک‌کننده است. تعریف ۴.۲. فرض کنید $H_A = \langle X, h_A \rangle \in HFS(X, N)$ یک مجموعه فازی مردد در X و $\theta \in [0, 1]$ باشد. آنگاه تعریف می‌کنیم

$$H_{A\theta} = \begin{cases} 1 & h_A^{\sigma(1)}(x) \geq \theta \\ \left(1 - \frac{j}{N}\right) & h_A^{\sigma(j)}(x) < \theta \leq h_A^{\sigma(j+1)}(x), j = 1, \dots, N-1 \\ 0 & h_A^{\sigma(N)}(x) < \theta \end{cases}$$

$$H_{A\bar{\theta}} = \begin{cases} 1 & h_A^{\sigma(1)}(x) > \theta \\ \left(1 - \frac{j}{N}\right) & h_A^{\sigma(j)}(x) \leq \theta < h_A^{\sigma(j+1)}(x), j = 1, \dots, N-1 \\ 0 & h_A^{\sigma(N)}(x) \leq \theta \end{cases}$$

$$H_{A^\theta} = \begin{cases} 1 & h_A^{\sigma(N)}(x) \leq \theta \\ \left(1 - \frac{j}{N}\right) & h_A^{\sigma(N-j)}(x) \leq \theta < h_A^{\sigma(N-j+1)}(x), j = 1, \dots, N-1 \\ 0 & h_A^{\sigma(1)}(x) > \theta \end{cases}$$

$$H_{A^\theta} = \begin{cases} 1 & h_A^{\sigma(N)}(x) < \theta \\ \left(1 - \frac{j}{N}\right) & h_A^{\sigma(N-j)}(x) < \theta \leq h_A^{\sigma(N-j+1)}(x), j = 1, \dots, N-1 \\ 0 & h_A^{\sigma(1)}(x) \geq \theta \end{cases}$$

$$H_{A[\theta]} = \begin{cases} 1 & \theta + h_A^{\sigma(1)}(x) \geq 1; \\ \left(1 - \frac{j}{N}\right) & h_A^{\sigma(j)}(x) < 1 - \theta \leq h_A^{\sigma(j+1)}(x), j = 1, \dots, N-1 \\ 0 & \theta + h_A^{\sigma(N)}(x) < 1, \end{cases}$$

$$H_{A[\underline{\theta}]} = \begin{cases} 1 & \theta + h_A^{\sigma(1)}(x) > 1; \\ \left(1 - \frac{j}{N}\right) & h_A^{\sigma(j)}(x) \leq 1 - \theta < h_A^{\sigma(j+1)}(x), j = 1, \dots, N-1 \\ 0 & \theta + h_A^{\sigma(N)}(x) \leq 1, \end{cases}$$

$$H_A^{[\theta]} = \begin{cases} 1 & \theta + h_A^{\sigma(N)}(x) \leq 1, \\ \left(1 - \frac{j}{N}\right) & h_A^{\sigma(N-j)}(x) \leq 1 - \theta < h_A^{\sigma(N-j+1)}(x), j = 1, \dots, N-1, \\ 0 & \theta + h_A^{\sigma(1)}(x) > 1 \end{cases}$$

$$H_{A[\bar{\theta}]} = \begin{cases} 1 & \theta + h_A^{\sigma(N)}(x) < 1, \\ \left(1 - \frac{j}{N}\right) & h_A^{\sigma(N-j)}(x) < 1 - \theta \leq h_A^{\sigma(N-j+1)}(x), j = 1, \dots, N-1, \\ 0 & \theta + h_A^{\sigma(1)}(x) \geq 1 \end{cases}$$

قابل توجه است که

- اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم $h_A^{\sigma(1)}(x) = \dots = h_A^{\sigma(N)}(x)$. آنگاه مجموعه فازی مجدد H_A به مجموعه فازی تبدیل شده و در این حالت تعریف ۴.۲ منطبق بر تعریف ارایه شده در مرجع [۶] می‌باشد.

- اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم $H_x(x) = \langle h_A^{\sigma(1)}(x), h_A^{\sigma(r)}(x) \rangle$ که $h_A^{\sigma(1)}(x) = \mu(x)$ و $h_A^{\sigma(r)}(x) = 1 - \nu(x)$. آنگاه مجموعه فازی مجدد H_A به مجموعه فازی شهودی آتاناسو تبدیل می‌گردد و در این حالت تعریف ۴.۲ منطبق بر تعریف ارایه شده در مرجع [۸] می‌باشد.

- اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم $H_A(x) = \langle h_A^{\sigma(1)}(x), h_A^{\sigma(r)}(x) \rangle$ که $h_A^{\sigma(1)}(x) = H_A^-(x) = \max_j \{h_A^{\sigma(j)}(x)\}$ و $h_A^{\sigma(r)}(x) = H_A^+(x) = \min_j \{h_A^{\sigma(j)}(x)\}$. آنگاه مجموعه فازی مجدد H_A به مجموعه فازی بازه‌ای مقدار تبدیل شده و در این حالت تعریف ۴.۲ منطبق بر تعریف ارایه شده در مرجع [۸] می‌باشد.

- اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم $H_A(x) = \langle h_A^{\sigma(1)}(x), h_A^{\sigma(r)}(x), h_A^{\sigma(r)}(x) \rangle$. آنگاه مجموعه فازی مجدد H_A به مجموعه فازی سه بعدی تبدیل شده و در این حالت تعریف ۴.۲ منطبق بر تعریف ارایه شده در مرجع [۷] می‌باشد.

- اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم، $H_A(x) = \langle h_A^{\sigma(l)}(x), h_A^{\sigma(r)}(x), h_A^{\sigma(r)}(x), h_A^{\sigma(l)}(x) \rangle$ که $h_A^{\sigma(l)}(x) = \mu^-(x)$ و $h_A^{\sigma(r)}(x) = \mu^+(x)$ و $h_A^{\sigma(r)}(x) = 1 - \nu^-(x)$ و $h_A^{\sigma(l)}(x) = 1 - \nu^+(x)$ می باشد به طوری که مجموعه فازی مجدد H_A به مجموعه فازی شهودی بازه مقدار تبدیل شده و در این حالت تعریف ۴.۲ منطبق بر تعریف ارایه شده در مرجع [۱۴] می باشد.

به عنوان نتیجه ای از موارد بالا، مشاهده می گردد که تعریف مجموعه برشی برای مجموعه فازی مجدد، شکل تعمیم یافته ای از مجموعه های فازی، فازی شهودی، فازی بازه ای-مقدار، مجموعه های فازی سه بعدی و فازی شهودی بازه ای-مقدار هستند.

اکنون به بررسی تعدادی از ویژگی های مرتبط با مجموعه های برشی برای مجموعه های فازی مجدد خواهیم پرداخت.

گزاره ۵.۲. فرض کنید که $H_A = \langle X, h_A \rangle \in HFS(X, N)$ ، $H_B = X, h_B \in HFS(X, N)$ و $H_{A_i} = x, h_{A_i} \in HFS(X, N)$ که $i \in I$ که I مجموعه اندیس ها است. آنگاه

$$H_A^\theta = (H_{A\theta})^c, H_A^\theta = (H_{A\theta})^c, H_{A[\theta]} = H_{A(1-\theta)}, \quad (12)$$

$$H_{A[\theta]} = H_{A(1-\theta)}; H_A^{[\theta]} = (H_{A(1-\theta)})^c, H_A^{[\theta]} = (H_{A(1-\theta)})^c, \quad (13)$$

$$H_{A[\theta]} \subset H_{A\theta}; \quad (14)$$

$$\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow H_{A\theta_1} \supset H_{A\theta_2}, H_{A\theta_1} \supset H_{A\theta_2}, H_{A\theta_1} \supset H_{A\theta_2}; \quad (15)$$

$$H_A \subset H_B \Rightarrow H_{A\theta} \subset H_{B\theta}, H_{A\theta} \subset H_{B\theta}; \quad (16)$$

$$(H_A^c)_\theta = (H_{A(1-\theta)})^c, (H_A^c)_\theta = (H_{A(1-\theta)})^c; \quad (17)$$

$$(H_A \cup H_B)_\theta = H_{A\theta} \cup H_{B\theta}, (H_A \cup H_B)_\theta = H_{A\theta} \cup H_{B\theta}$$

$$(H_A \cap H_B)_\theta = H_{A\theta} \cap H_{B\theta}, (H_A \cap H_B)_\theta = H_{A\theta} \cap H_{B\theta}; \quad (18)$$

$$\left(\bigcup_{i \in I} H_{A_i} \right)_\theta \supset \bigcup_{i \in I} (H_{A_i})_\theta, \left(\bigcup_{i \in I} H_{A_i} \right)_\theta = \bigcup_{i \in I} (H_{A_i})_\theta,$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} H_{A_i} \right)_\theta = \bigcap_{i \in I} (H_{A_i})_\theta, \left(\bigcap_{i \in I} H_{A_i} \right)_\theta \subset \bigcap_{i \in I} (H_{A_i})_\theta; \quad (19)$$

$$H_{A(\theta_1 \wedge \theta_2)} = H_{A\theta_1} \cup H_{A\theta_2}, H_{A(\theta_1 \wedge \theta_2)} = H_{A\theta_1} \cup H_{A\theta_2},$$

$$H_{A(\theta_1 \vee \theta_2)} = H_{A\theta_1} \cap H_{A\theta_2}, H_{A(\theta_1 \vee \theta_2)} = H_{A\theta_1} \cap H_{A\theta_2}, \quad (20)$$

$$\theta_i \in [0, 1], i \in I, \alpha = \bigwedge_{i \in I} \theta_i, \beta = \bigvee_{i \in I} \theta_i \Rightarrow$$

$$\bigcup_{i \in I} H_{A\theta_i} \subset H_{A\alpha}, \bigcap_{i \in I} H_{A\theta_i} = H_{A\beta}, \bigcup_{i \in I} H_{A\theta_i} = H_{A\alpha}, \bigcap_{i \in I} H_{A\theta_i} \supset H_{A\beta} \quad (21)$$

$$H_{A_1} = *, H_{A_1} = X. \quad (22)$$

اثبات: بخش های (۱۵)-(۱۲) و (۲۲) می توانند به طور مستقیم اثبات شوند.

اثبات (۱۶): با توجه به تعریف ۴.۲ برای $j = 1, 2, \dots, N-1$ داریم

$$\begin{aligned} (H_A^c)_\theta &= \begin{cases} 1 & h_{A^c}^{\sigma(1)}(x) \geq \theta; \\ \left(1 - \frac{j}{N}\right) & h_{A^c}^{\sigma(j)}(x) < \theta \leq h_{A^c}^{\sigma(j+1)}(x); \\ 0 & h_{A^c}^{\sigma(N)}(x) < \theta, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & 1 - h_A^{\sigma(N)}(x) \geq \theta; \\ \left(1 - \frac{j}{N}\right) & 1 - h_A^{\sigma(N-j+1)}(x) < \theta \leq 1 - h_A^{\sigma(N-(j+1)+1)}(x); \\ 0 & 1 - h_A^{\sigma(1)}(x) < \theta, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & 1 - \theta \geq h_A^{\sigma(N)}(x); \\ \left(1 - \frac{j}{N}\right) & h_A^{\sigma(N-j+1)}(x) > 1 - \theta \geq h_A^{\sigma(N-(j+1)+1)}(x); \\ 0 & 1 - \theta < h_A^{\sigma(1)}(x), \end{cases} \end{aligned}$$

حال با قرار دادن $\hat{j} = N - j$ نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} (H_A^c)_\theta &= \begin{cases} 1 & 1 - \theta \geq h_A^{\sigma(N)}(x); \\ \left(1 - \frac{N - \hat{j}}{N}\right) & h_A^{\sigma(j+1)}(x) > 1 - \theta \geq h_A^{\sigma(j)}(x); \\ 0 & 1 - \theta < h_A^{\sigma(1)}(x), \end{cases} \\ &= 1 - \begin{cases} 0 & 1 - \theta \geq h_A^{\sigma(N)}(x); \\ \left(1 - \frac{N - \hat{j}}{N}\right) & h_A^{\sigma(j+1)}(x) > 1 - \theta \geq h_A^{\sigma(j)}(x); \\ 1 & 1 - \theta < h_A^{\sigma(1)}(x), \end{cases} \\ &= 1 - H_{A(1-\theta)}. \end{aligned}$$

آنگاه از واقعیت $H_A^C = 1 - H_A$ داریم

$$(H_A^c)_\theta = 1 - H_{A(1-\theta)} = (H_{A(1-\theta)})^c;$$

نتایج بالا و این حقیقت که $(H_A^c)_\theta, (H_{A(1-\theta)})^c \in (N+1)^X$ نتیجه می‌دهد که $(H_A^c)_\theta = (H_{A(1-\theta)})^c$ با

روشی مشابه می‌توان نشان داد که $(H_A^c)_\theta = (H_{A(1-\theta)})^c$.

اثبات رابطه (۱۷): می‌دانیم

$$\begin{aligned}
(H_A \cup H_B)_\theta &= \begin{cases} 1 & h_{(A \cup B)}^{\sigma(1)}(x) \geq \theta; \\ \left(1 - \frac{j}{N}\right) & h_{(A \cup B)}^{\sigma(j)}(x) < \theta \leq h_{(A \cup B)}^{\sigma(j+1)}(x); \\ 0 & h_{(A \cup B)}^{\sigma(N)}(x) < \theta, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & h_A^{\sigma(1)}(x) \vee h_B^{\sigma(1)}(x) \geq \theta; \\ \left(1 - \frac{j}{N}\right) & h_A^{\sigma(j)}(x) \vee h_B^{\sigma(j)}(x) < \theta \leq h_A^{\sigma(j+1)}(x) \vee h_B^{\sigma(j+1)}(x); \\ 0 & h_A^{\sigma(N)}(x) \vee h_B^{\sigma(N)}(x) < \theta, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & h_A^{\sigma(1)}(x) \geq \theta \vee h_B^{\sigma(1)}(x) \geq \theta; \\ \left(1 - \frac{j}{N}\right) & h_A^{\sigma(j)}(x) \theta \leq h_A^{\sigma(j+1)}(x) \vee h_B^{\sigma(j)}(x) < \theta \leq h_B^{\sigma(j+1)}(x); \\ 0 & h_A^{\sigma(N)}(x) < \theta \vee h_B^{\sigma(N)}(x) < \theta, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & h_A^{\sigma(1)}(x) \geq \theta; \\ \left(1 - \frac{j}{N}\right) & h_A^{\sigma(j)}(x) \theta \leq h_A^{\sigma(j+1)}(x) \vee \begin{cases} 1 & h_B^{\sigma(1)}(x) \geq \theta; \\ \left(1 - \frac{j}{N}\right) & h_B^{\sigma(j)}(x) < \theta \leq h_B^{\sigma(j+1)}(x); \\ 0 & h_B^{\sigma(N)}(x) < \theta, \end{cases} \\ 0 & h_A^{\sigma(N)}(x) < \theta, \end{cases} \\
&= H_{A\theta} \cup H_{B\theta}
\end{aligned}$$

نتایج بالا و این حقیقت که $(H_A \cup H_B)_\theta, (H_{A\theta} \cup H_{B\theta}) \in (N+1)^X$ نتیجه می دهد که $(H_A \cup H_B)_\theta = H_{A\theta} \cup H_{B\theta}$.
 با روشی مشابه می توان نشان داد که $(H_A \cup H_B)_\theta = H_{A\theta} \cup H_{B\theta}$ و $(H_A \cap H_B)_\theta = H_{A\theta} \cap H_{B\theta}$ و
 $(H_A \cap H_B)_\theta = H_{A\theta} \cap H_{B\theta}$ برقرار است.

اثبات رابطه (۱۸): می دانیم

$$\begin{aligned}
 \bigcup_{i \in I} (H_{A_i})_\theta &= \bigvee_{i \in I} \begin{cases} 1 & h_{A_i}^{\sigma(1)}(x) \geq \theta; \\ \left(1 - \frac{j}{N}\right) & h_{A_i}^{\sigma(j)}(x) < \theta \leq h_{A_i}^{\sigma(j+1)}(x) \\ 0 & h_{A_i}^{\sigma(N)}(x) < \theta, \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1 & h_{A_i}^{\sigma(1)}(x) \geq \theta; \\ \left(1 - \frac{j}{N}\right) & h_{A_i}^{\sigma(j)}(x) < \theta \leq h_{A_i}^{\sigma(j+1)}(x) \\ 0 & h_{A_i}^{\sigma(N)}(x) < \theta, \end{cases} \bigvee \begin{cases} 1 & h_{A_i}^{\sigma(1)}(x) \geq \theta; \\ \left(1 - \frac{j}{N}\right) & h_{A_i}^{\sigma(j)}(x) < \theta \leq h_{A_i}^{\sigma(j+1)}(x) \\ 0 & h_{A_i}^{\sigma(N)}(x) < \theta, \end{cases} \bigvee \dots \\
 &\subseteq \begin{cases} 1 & \bigvee_{i \in I} h_{A_i}^{\sigma(1)}(x) \geq \theta; \\ \left(1 - \frac{j}{N}\right) & \bigvee_{i \in I} h_{A_i}^{\sigma(j)}(x) < \theta \leq \bigvee_{i \in I} h_{A_i}^{\sigma(j+1)}(x); \\ 0 & \bigvee_{i \in I} h_{A_i}^{\sigma(N)}(x) < \theta, \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1 & h_{\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)}^{\sigma(1)}(x) \geq \theta; \\ \left(1 - \frac{j}{N}\right) & h_{\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)}^{\sigma(j)}(x) < \theta \leq h_{\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)}^{\sigma(j+1)}(x); \\ 0 & h_{\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)}^{\sigma(N)}(x) < \theta, \end{cases} \\
 &= \left(\bigcup_{i \in I} (H_{A_i}) \right)_\theta.
 \end{aligned}$$

با روشی مشابه می‌توان نشان داد که

$$\left(\bigcup_{i \in I} H_{A_i} \right)_\theta = \bigcup_{i \in I} (H_{A_i})_\theta, \quad \left(\bigcap_{i \in I} H_{A_i} \right)_\theta = \bigcap_{i \in I} (H_{A_i})_\theta,$$

و

$$\left(\bigcap_{i \in I} H_{A_i} \right)_\theta \subseteq \bigcap_{i \in I} (H_{A_i})_\theta.$$

سایر رابطه‌های باقیمانده (۲۲)–(۲۰) به طریق مشابه ثابت می‌شوند.

همان‌گونه که در ادامه مشاهده می‌شود، چهار نوع مجموعه برشی مجموعه‌های فازی مجدد دارای ویژگی‌های مشابهی هستند.

گزاره ۶.۲. فرض کنید که $H_B = X, h_B \in HFS(X, N)$ ، $H_A = \langle X, h_A \rangle \in HFS(X, N)$ با $H_A = x, h_A \in HFS(X, N)$ که I مجموعه اندیس‌ها است. آنگاه

$$\begin{aligned}
 H_A^\theta &\subset H_A^\theta; \\
 \theta_1 < \theta_2 &\Rightarrow H_A^{\theta_1} \subset H_A^{\theta_2}, H_A^{\theta_1} \subset H_A^{\theta_2}, H_A^{\theta_1} \subset H_A^{\theta_2}; \\
 H_A &\subset H_B \Rightarrow H_A^\theta \supset H_B^\theta, H_A^\theta \supset H_B^\theta; \\
 (H_A^c)^\theta &= (H_A^{1-\theta})^c, (H_A^c)^\theta = (H_A^{1-\theta})^c;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (H_A \cup H_B)^\theta &= H_A^\theta \cap H_B^\theta, (H_A \cup H_B)^\theta = H_A^\theta \cup H_B^\theta; \\
 (H_A \cap H_B)^\theta &= H_A^\theta \cup H_B^\theta, (H_A \cap H_B)^\theta = H_A^\theta \cap H_B^\theta; \\
 (\bigcup_{i \in I} H_{A_i})^\theta &= \bigcap_{i \in I} (H_{A_i})^\theta, (\bigcup_{i \in I} H_{A_i})^\theta \subset \bigcap_{i \in I} (H_{A_i})^\theta, (\bigcap_{i \in I} H_{A_i})^\theta \supset \bigcup_{i \in I} (H_{A_i})^\theta, (\bigcap_{i \in I} H_{A_i})^\theta = \bigcup_{i \in I} (H_{A_i})^\theta; \\
 H_A^{\theta_1 \wedge \theta_2} &= H_A^{\theta_1} \cap H_A^{\theta_2}, H_A^{\theta_1 \wedge \theta_2} = H_A^{\theta_1} \cap H_A^{\theta_2}, H_A^{\theta_1 \vee \theta_2} = H_A^{\theta_1} \cup H_A^{\theta_2}, H_A^{\theta_1 \vee \theta_2} = H_A^{\theta_1} \cup H_A^{\theta_2}; \\
 \theta_i &\in [\cdot, 1], i \in I, \alpha = \bigwedge_{i \in I} \theta_i, \beta = \bigvee_{i \in I} \theta_i \Rightarrow \\
 \bigcap_{i \in I} H_A^{\theta_i} &= H_A^\alpha, \bigcup_{i \in I} H_A^{\theta_i} \subset H_A^\beta, \bigcap_{i \in I} H_A^{\theta_i} \supset H_A^\alpha, \bigcup_{i \in I} H_A^{\theta_i} \subset H_A^\beta; \\
 H_A^\cdot &= X, H_A^\circ = \circ.
 \end{aligned}$$

گزاره ۷.۲. فرض کنید که $H_B = X, h_B \in HFS(X, N)$ ، $H_A = \langle X, h_A \rangle \in HFS(X, N)$ و $H_A = x, h_A \in HFS(X, N)$ با $i \in I$ که مجموعه اندیس ها است. آنگاه

$$\begin{aligned}
 H_{A[\theta]} &\subset H_{A[\theta]}; \\
 \theta_1 < \theta_2 &\Rightarrow H_{A[\theta_1]} \subset H_{A[\theta_2]}, H_{A[\theta_1]} \subset H_{A[\theta_2]}, H_{A[\theta_1]} \subset H_{A[\theta_2]}; \\
 H_A &\subset H_B \Rightarrow H_{A[\theta]} \subset H_{B[\theta]}, H_{A[\theta]} \subset H_{B[\theta]}; \\
 (H_A^c)_{[\theta]} &= (H_{A[1-\theta]})^c, (H_A^c)_{[\theta]} = (H_{A[1-\theta]})^c; \\
 (H_A \cup H_B)_{[\theta]} &= H_{A[\theta]} \cup H_{B[\theta]}, (H_A \cup H_B)_{[\theta]} = H_{A[\theta]} \cup H_{B[\theta]}; \\
 (H_A \cap H_B)_{[\theta]} &= H_{A[\theta]} \cap H_{B[\theta]}, (H_A \cap H_B)_{[\theta]} = H_{A[\theta]} \cap H_{B[\theta]}; \\
 (\bigcup_{i \in I} H_{A_i})_{[\theta]} &\supset \bigcup_{i \in I} (H_{A_i})_{[\theta]}, (\bigcup_{i \in I} H_{A_i})_{[\theta]} = \bigcup_{i \in I} (H_{A_i})_{[\theta]}, \\
 (\bigcap_{i \in I} H_{A_i})_{[\theta]} &= \bigcap_{i \in I} (H_{A_i})_{[\theta]}, (\bigcap_{i \in I} H_{A_i})_{[\theta]} \subset \bigcap_{i \in I} (H_{A_i})_{[\theta]}; \\
 H_{A[\theta_1 \wedge \theta_2]} &= H_{A[\theta_1]} \cap H_{A[\theta_2]}, H_{A[\theta_1 \wedge \theta_2]} = H_{A[\theta_1]} \cap H_{A[\theta_2]}, \\
 H_{A[\theta_1 \vee \theta_2]} &= H_{A[\theta_1]} \cup H_{A[\theta_2]}, H_{A[\theta_1 \vee \theta_2]} = H_{A[\theta_1]} \cup H_{A[\theta_2]};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bigcap_{i \in I} H_{A[\theta_i]} &\supset H_{A[\alpha]}, \bigcup_{i \in I} H_{A[\theta_i]} \subset H_{A[\beta]}, \bigcap_{i \in I} H_{A[\theta_i]} \supset H_{A[\alpha]}, \bigcup_{i \in I} H_{A[\theta_i]} \subset H_{A[\beta]}; \\
 H_{A[\cdot]} &= X, H_{A[\cdot]} = \circ.
 \end{aligned}$$

گزاره ۸.۲. فرض کنید که $H_B = X, h_B \in HFS(X, N)$ ، $H_A = \langle X, h_A \rangle \in HFS(X, N)$ و $H_A = x, h_A \in HFS(X, N)$ با $i \in I$ که مجموعه اندیس ها است. آنگاه

$$\begin{aligned}
 H_A^{[\theta]} &\subset H_A^{[\theta]}; \\
 \theta_1 < \theta_2 &\Rightarrow H_A^{[\theta_1]} \supset H_A^{[\theta_2]}, H_A^{[\theta_1]} \supset H_A^{[\theta_2]}, H_A^{[\theta_1]} \supset H_A^{[\theta_2]}; \\
 H_A &\subset H_B \Rightarrow H_A^{[\theta]} \supset H_B^{[\theta]}, H_A^{[\theta]} \supset H_B^{[\theta]}; \\
 (H_A^c)^{[\theta]} &= (H_A^{[1-\theta]})^c, (H_A^c)^{[\theta]} = (H_A^{[1-\theta]})^c;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (H_A \cup H_B)^{[\theta]} &= H_A^{[\theta]} \cup H_B^{[\theta]}, \quad (H_A \cup H_B)^{[\underline{\theta}]} = H_A^{[\underline{\theta}]} \cup H_B^{[\underline{\theta}]}; \\
 (H_A \cap H_B)^{[\theta]} &= H_A^{[\theta]} \cap H_B^{[\theta]}, \quad (H_A \cap H_B)^{[\underline{\theta}]} = H_A^{[\underline{\theta}]} \cap H_B^{[\underline{\theta}]}; \\
 (\bigcup_{i \in I} H_{A_i})^{[\theta]} &= \bigcap_{i \in I} (H_{A_i})^{[\theta]}, \quad (\bigcup_{i \in I} H_{A_i})^{[\underline{\theta}]} \subset \bigcap_{i \in I} (H_{A_i})^{[\underline{\theta}]}, \\
 (\bigcap_{i \in I} H_{A_i})^{[\theta]} &\supset \bigcap_{i \in I} (H_{A_i})^{[\theta]}, \quad (\bigcap_{i \in I} H_{A_i})^{[\underline{\theta}]} \supset \bigcap_{i \in I} (H_{A_i})^{[\underline{\theta}]}; \\
 H_A^{[\theta \wedge \theta_i]} &= H_A^{[\theta]} \cap H_A^{[\theta_i]}, \quad H_A^{[\theta \vee \theta_i]} = H_A^{[\theta]} \cup H_A^{[\theta_i]}, \\
 H_A^{[\theta \wedge \theta_i]} &= H_A^{[\theta]} \cap H_A^{[\theta_i]}, \quad H_A^{[\theta \vee \theta_i]} = H_A^{[\theta]} \cup H_A^{[\theta_i]}; \\
 \theta_i &\in [\cdot, 1], \quad i \in I, \quad \alpha = \bigwedge_{i \in I} \theta_i, \quad \beta = \bigvee_{i \in I} \theta_i \Rightarrow \\
 \bigcap_{i \in I} H_A^{[\theta_i]} &\subset H_A^{[\alpha]}, \quad \bigcup_{i \in I} H_A^{[\theta_i]} = H_A^{[\beta]}, \quad \bigcap_{i \in I} H_A^{[\theta_i]} = H_A^{[\alpha]}, \quad \bigcup_{i \in I} H_A^{[\theta_i]} \supset H_A^{[\beta]}; \\
 H_A^{[1]} &= \cdot, \quad H_A^{[\cdot]} = X.
 \end{aligned}$$

برطبق گزاره‌های بالا می‌توان نتیجه گرفت که مفاهیم مجموعه برشی مجموعه‌های فازی مردد ویژگی‌های مشابهی همانند آنچه برای مجموعه‌های فازی، فازی شهودی، فازی بازه‌ای-مقدار، مجموعه‌های فازی سه بعدی و فازی شهودی بازه‌ای-مقدار بیان می‌گردند می‌باشند و این امر کاملاً طبیعی است چرا که همه این مجموعه‌ها حالت‌های خاصی از مجموعه‌های فازی مردد هستند.

۳ قضایای تجزیه مجموعه‌های فازی مردد

قبل از پرداختن به قضایای تجزیه مجموعه‌های فازی مردد، ابتدا برخی از مفاهیم لازم را توضیح می‌دهیم. فرض کنید $I = \{1, 2, \dots, N\}$ و $I_j = \{1, 2, \dots, j\}$ و $I_{\bar{j}} = \{j+1, j+2, \dots, N\}$ باشند و $E_i = \{\cdot, \dots, 1, \dots, 1\}$ ($i = 1, \dots, N$) به مجموعه فازی مردد همانی با $h_{E_i}^{(\sigma(i))}(x) = 1$ اشاره داشته باشد. واضح است که $\bigvee_{i \in I_{\bar{j}}} E_i = \bigvee_{i \in I_{\bar{N}}} E_i = \{\cdot, \dots, \cdot, \dots, \cdot\}$ و $\bigvee_{i \in I_j} E_i = \bigvee_{i \in I_N} E_i = \{1, \dots, 1, \dots, 1\}$ که به ترتیب به عنوان مجموعه‌های فازی مردد کامل و پوچ می‌باشند. مجموعه‌های فازی مردد کامل و پوچ را از این پس به ترتیب با ۱ و ۰ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۳ فرض کنید $H_A \in (N+1)^X$ و $\theta \in [\cdot, 1]$ و $f_{k(k=1, \dots, N)}: [\cdot, 1] \times (N+1)^X \rightarrow N^X$ نگاشت‌های زیر باشند:

$$f_1(\theta, H_A) = \begin{cases} \theta(\bigvee_{i \in I_{\bar{j}}} E_i) & H_A(x) = 1; \\ \theta(\bigvee_{i \in I_{\bar{j}}} E_i) & H_A(x) = \left(1 - \frac{j}{N}\right), j = 1, \dots, N-1; \\ \theta(\bigvee_{i \in I_{\bar{N}}} E_i) & H_A(x) = \cdot, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
f_{\gamma}(\theta, H_A) &= \begin{cases} \theta \left(\bigvee_{i \in I_{\perp}} E_i \right) \vee \left(\bigvee_{i \in I_{\tau}} E_i \right) & H_A(x) = \gamma; \\ \theta \left(\bigvee_{i \in I_{\perp}} E_i \right) \vee \left(\bigvee_{i \in I_{\bar{\gamma}}} E_i \right) & H_A(x) = \left(\gamma - \frac{j}{N} \right), j = 1, \dots, N - \gamma; \\ \theta \left(\bigvee_{i \in I_{\bar{N}}} E_i \right) \vee \left(\bigvee_{i \in I_{\bar{N}}} E_i \right) & H_A(x) = \circ, \end{cases} \\
f_{\tau}(\theta, H_A) &= \begin{cases} \theta \left(\bigvee_{i \in I_{\bar{N}}} E_i \right) & H_A(x) = \gamma; \\ \theta \left(\bigvee_{i \in I_{\bar{\gamma}}} E_i \right) & H_A(x) = \left(\gamma - \frac{j}{N} \right), j = 1, \dots, N - \gamma; \\ \theta \left(\bigvee_{i \in I_{\tau}} E_i \right) & H_A(x) = \circ, \end{cases} \\
f_{\gamma}(\theta, H_A) &= \begin{cases} \theta \left(\bigvee_{i \in I_{\bar{N}}} E_i \right) \vee \left(\bigvee_{i \in I_{\bar{N}}} E_i \right) & H_A(x) = \gamma \\ \theta \left(\bigvee_{i \in I_{\bar{\gamma}}} E_i \right) \vee \left(\bigvee_{i \in I_{\bar{\gamma}}} E_i \right) & H_A(x) = \left(\gamma - \frac{j}{N} \right), j = 1, \dots, N - \gamma; \\ \theta \left(\bigvee_{i \in I_{\perp}} E_i \right) \vee \left(\bigvee_{i \in I_{\tau}} E_i \right) & H_A(x) = \circ, \end{cases} \\
f_{\delta}(\theta, H_A) &= \begin{cases} (1 - \theta) \left(\bigvee_{i \in I_{\tau}} E_i \right) & H_A(x) = \gamma; \\ (1 - \theta) \left(\bigvee_{i \in I_{\bar{\gamma}}} E_i \right) & H_A(x) = \left(\gamma - \frac{j}{N} \right), j = 1, \dots, N - \gamma; \\ (1 - \theta) \left(\bigvee_{i \in I_{\bar{N}}} E_i \right) & H_A(x) = \circ, \end{cases} \\
f_{\varepsilon}(\theta, H_A) &= \begin{cases} (1 - \theta) \left(\bigvee_{i \in I_{\perp}} E_i \right) \vee \left(\bigvee_{i \in I_{\tau}} E_i \right) & H_A(x) = \gamma; \\ (1 - \theta) \left(\bigvee_{i \in I_{\perp}} E_i \right) \vee \left(\bigvee_{i \in I_{\bar{\gamma}}} E_i \right) & H_A(x) = \left(\gamma - \frac{j}{N} \right), j = 1, \dots, N - \gamma; \\ (1 - \theta) \left(\bigvee_{i \in I_{\bar{N}}} E_i \right) \vee \left(\bigvee_{i \in I_{\bar{N}}} E_i \right) & H_A(x) = \circ, \end{cases} \\
f_{\gamma}(\theta, H_A) &= \begin{cases} (1 - \theta) \left(\bigvee_{i \in I_{\bar{N}}} E_i \right) & H_A(x) = \gamma; \\ (1 - \theta) \left(\bigvee_{i \in I_{\bar{\gamma}}} E_i \right) & H_A(x) = \left(\gamma - \frac{j}{N} \right), j = 1, \dots, N - \gamma; \\ (1 - \theta) \left(\bigvee_{i \in I_{\tau}} E_i \right) & H_A(x) = \circ, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$f_{\lambda}(\theta, H_A) = \begin{cases} (1-\theta) \left(\bigvee_{i \in I_N} E_i \right) \vee \left(\bigvee_{i \in I_{\bar{N}}} E_i \right) & H_A(x) = 1; \\ (1-\theta) \left(\bigvee_{i \in I_j} E_i \right) \vee \left(\bigvee_{i \in I_j^c} E_i \right) & H_A(x) = \left(1 - \frac{j}{N} \right), j = 1, \dots, N-1; \\ (1-\theta) \left(\bigvee_{i \in I_+} E_i \right) \vee \left(\bigvee_{i \in I_-} E_i \right) & H_A(x) = 0, \end{cases}$$

با استفاده از تعاریف بالا، قضایای تجزیه مجموعه‌های فازی مردد می‌تواند به صورت زیر بیان گردند.

قضیه ۲.۳ فرض کنید $H_A = \langle X, h_A \rangle \in HFS(X, N)$. آنگاه

$$H_A = \bigcup_{\theta \in [0,1]} f_{\lambda}(\theta, H_{A\theta}) = \bigcap_{\theta \in [0,1]} f_{\gamma}(\theta, H_{A\theta});$$

$$H_A = \bigcup_{\theta \in [0,1]} f_{\lambda}(\theta, H_{A\theta}) = \bigcap_{\theta \in [0,1]} f_{\gamma}(\theta, H_{A\theta}).$$

علاوه بر این، اگر نگاشت $H: [0,1] \rightarrow (N+1)^X$ با ویژگی $H_{A\theta} \subset \mathcal{H}(\theta) \subset H_{A\theta}$ در نظر بگیریم آنگاه نتیجه می‌شود که

$$H_A = \bigcup_{\theta \in [0,1]} f_{\lambda}(\theta, \mathcal{H}(\theta)) = \bigcap_{\theta \in [0,1]} f_{\gamma}(\theta, \mathcal{H}(\theta));$$

$$\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow \mathcal{H}(\theta_1) \supset \mathcal{H}(\theta_2);$$

$$H_{A\theta} = \bigcap_{\alpha < \theta} \mathcal{H}(\alpha), H_{A\theta} = \bigcup_{\alpha > \theta} \mathcal{H}(\alpha).$$

به طریق مشابه، به آسانی می‌توان نشان داد که اگر نگاشت $H: [0,1] \rightarrow (N+1)^X$ با ویژگی‌های

$$H_A^{[\theta]} \subset \mathcal{H}(\theta) \subset H_A^{[\theta]}$$

$$H_{A[\theta]} \subset \mathcal{H}(\theta) \subset H_{A[\theta]}$$

$$H_A^{\theta} \subset \mathcal{H}(\theta) \subset H_A^{\theta}$$

را در نظر بگیریم آنگاه نتایج قضیه ۳.۲ به راحتی قابل استنباط هستند.

قابل توجه است که اگر $H_A = X, h_A \in HFS(X, N)$ به ترتیب مجموعه‌ای فازی مردد به بالا $N=1, N=2, N=3, N=4$ در نظر گرفته شوند، آنگاه همه قضیه‌های تجزیه مجموعه‌های فازی مردد بالا دقیقاً متناظر با قضایای تجزیه مجموعه‌های فازی، فازی شهودی، فازی بازه‌ای-مقدار، مجموعه‌های فازی سه بعدی و فازی شهودی بازه‌ای-مقدار بیان می‌گردند. و این امر کاملاً طبیعی است چرا که همه این مجموعه‌ها حالت‌های خاصی از مجموعه‌های فازی مردد هستند.

۴ قضایای نمایش مجموعه‌های فازی مردد

برای بیان نتایج اصلی این بخش، نیاز به تعاریف زیر می‌باشد.

تعریف ۱.۴ فرض کنید $\mathcal{H}: [0,1] \rightarrow (N+1)^X$ یک نگاشت باشد. اگر گزاره زیر برقرار باشد

$$\theta_l < \theta_r \Rightarrow \mathcal{H}(\theta_l) \supset \mathcal{H}(\theta_r)$$

آنگاه نگاشت $N+1$ -مقداره $\mathcal{H}$ را به عنوان مجموعه مرتب مرتبه معکوس روی X می‌نامیم.

در مباحث بعدی، از نماد $\mathbb{H}^d(X)$ برای بیان خانواده تمام مجموعه‌های مرتب مرتبه معکوس روی X

استفاده شده است.

بر اساس ساختار بندی ذیل، عملگرهای روی $\mathbb{H}^d(X)$ برای هر $\alpha \in [0, 1]$ را به صورت زیر تعریف

می‌کنیم

$$\mathcal{H}_l \subset \mathcal{H}_r \Leftrightarrow \mathcal{H}_l(\alpha) \subset \mathcal{H}_r(\alpha);$$

$$\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i\right)(\alpha) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i(\alpha);$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{H}_i\right)(\alpha) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{H}_i(\alpha);$$

$$\mathcal{H}^c(\alpha) = (\mathcal{H}(1-\alpha))^c;$$

$$\bar{X}(\alpha) = X, \bar{\cdot}(\alpha) = \cdot.$$

با در نظر گرفتن ساختار بندی بالا، فضای $(\mathbb{H}^d(X), \cup, \cap, X, \bar{\cdot})$ یک F لاتیس نامیده می‌شود.

قضیه ۲.۴. فرض کنید $\Gamma_{i(i=1,2)}: \mathbb{H}^d(X) \rightarrow N^X$ به صورت نگاشت زیر باشد

$$\Gamma_l(\mathcal{H}) = \bigcup_{\theta \in [0,1]} f_l(\theta, \mathcal{H}(\theta)), \Gamma_r(\mathcal{H}) = \bigcap_{\theta \in [0,1]} f_r(\theta, \mathcal{H}(\theta)).$$

آنگاه

$$\Gamma_l(\mathcal{H}) = \Gamma_r(\mathcal{H});$$

$$\Gamma_l(\mathcal{H})_\theta = \bigcap_{\alpha < \theta} \mathcal{H}(\alpha), \Gamma_r(\mathcal{H})_\theta = \bigcup_{\alpha > \theta} \mathcal{H}(\alpha);$$

$\Gamma_l(\Gamma_r)$ پوشا است و

$$\Gamma_l\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i\right) = \bigcup_{i \in I} \Gamma_l(\mathcal{H}_i), \Gamma_r\left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{H}_i\right) = \bigcap_{i \in I} \Gamma_r(\mathcal{H}_i), \Gamma_l(\mathcal{H}^c) = (\Gamma_r(\mathcal{H}))^c.$$

لازم به ذکر است که روابط فوق به طور مشابهی برای حالت $\Gamma_{i(i=\gamma,\lambda)}: \mathbb{H}^d(X) \rightarrow N^X$ می‌تواند ارایه

گردد.

تعریف ۳.۴. فرض کنید $\mathcal{H}: [0, 1] \rightarrow (N+1)^X$ یک نگاشت باشد. اگر گزاره زیر برقرار باشد

$$\theta_l < \theta_r \Rightarrow \mathcal{H}(\theta_l) \subset \mathcal{H}(\theta_r)$$

آنگاه نگاشت $N+1$ -مقداره $\mathcal{H}$ را به عنوان مجموعه مرتب روی X می‌نامیم.

در مباحث بعدی، از نماد $\mathbb{H}^p(X)$ برای بیان خانواده تمام مجموعه‌های مرتب روی X استفاده شده است.

بر اساس ساختار بندی ذیل، عملگرهای روی $\mathbb{H}^p(X)$ برای هر $\alpha \in [0, 1]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{H}_l \subset \mathcal{H}_r \Leftrightarrow \mathcal{H}_l(\alpha) \supset \mathcal{H}_r(\alpha);$$

$$\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i\right)(\alpha) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{H}_i(\alpha);$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{H}_i\right)(\alpha) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i(\alpha);$$

$$\mathcal{H}^c(\alpha) = (\mathcal{H}(\alpha))^c;$$

$$\underline{X}(\alpha) = \circ, \circ(\alpha) = X.$$

با در نظر گرفتن ساختار بندی بالا، فضای $(\mathbb{H}^p(X), \cup, \cap, X, \circ)$ یک F لاتیس نامیده می‌شود.

قضیه ۴.۴. فرض کنید $\Gamma_{i(i=2,3)}: \mathbb{H}^p(X) \rightarrow N^X$ به صورت نگاشت زیر باشد

$$\Gamma_{\gamma}(\mathcal{H}) = \bigcup_{\theta \in [0,1]} f_{\gamma}(\theta, \mathcal{H}(\theta)), \Gamma_{\gamma}(\mathcal{H}) = \bigcap_{\theta \in [0,1]} f_{\gamma}(\theta, \mathcal{H}(\theta)).$$

آنگاه

$$\Gamma_{\gamma}(\mathcal{H}) = \Gamma_{\gamma}(\mathcal{H});$$

$$\Gamma_{\gamma}(\mathcal{H})^{[\theta]} = \bigcap_{\alpha > \theta} \mathcal{H}(\alpha), \Gamma_{\gamma}(\mathcal{H})^{[\theta]} = \bigcup_{\alpha < \theta} \mathcal{H}(\alpha);$$

$\Gamma_{\gamma}(\Gamma_{\gamma})$ پوشا است و

$$\Gamma_{\gamma}\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i\right) = \bigcup_{i \in I} \Gamma_{\gamma}(\mathcal{H}_i), \Gamma_{\gamma}\left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{H}_i\right) = \bigcap_{i \in I} \Gamma_{\gamma}(\mathcal{H}_i), \Gamma_{\gamma}(\mathcal{H}^c) = (\Gamma_{\gamma}(\mathcal{H}))^c.$$

لازم به ذکر است که روابط فوق به طور مشابهی برای حالت $\Gamma_{i(i=0,1)}: \mathbb{H}^q(X) \rightarrow N^X$ می‌تواند ارایه

گردد.

قابل توجه است که اگر $H_A = X, h_A \in HFS(X, N)$ به ترتیب مجموعه‌ای فازی مردد به بالا $N=1, N=2, N=3, N=4$ در نظر گرفته شوند، آنگاه همه قضیه‌های نمایش مجموعه‌های فازی مردد بالا دقیقاً متناظر با قضایای نمایش مجموعه‌های فازی، فازی شهودی، فازی بازه‌ای-مقدار، مجموعه‌های فازی سه بعدی و فازی شهودی بازه‌ای-مقدار بیان می‌گردند. و این امر کاملاً طبیعی است چرا که همه این مجموعه‌ها حالت‌های خاصی از مجموعه‌های فازی مردد هستند.

۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مقاله، ابتدا دیدگاه جدیدی از مجموعه‌های برشی برای مجموعه‌های فازی مردد مطرح نمودیم که متفاوت با تعریف موجود در این زمینه می‌باشد. مبتنی بر مفهوم ارایه شده‌ی از مجموعه‌های برشی برای مجموعه‌های فازی مردد، قضایای تجزیه و قضایای نمایش مربوطه اثبات و ارایه گردید. آنچه که ارزشمند می‌نماید آن است که قضایای تجزیه و قضایای نمایش مجموعه‌های فازی مردد بیان شده دقیقاً متناظر با قضایای تجزیه و قضایای نمایش مجموعه‌های فازی، فازی شهودی، فازی بازه‌ای-مقدار، مجموعه‌های فازی سه بعدی و فازی شهودی بازه‌ای-مقدار است. این انتظار کاملاً طبیعی است چرا که همه این مجموعه‌ها حالت‌های خاصی از مجموعه‌های فازی مردد هستند. به هر حال، آنچه که می‌تواند به عنوان کارهای آتی در نظر گرفته شود بررسی کاربرد مجموعه‌های برشی برای مجموعه‌های فازی مردد در مسایل تصمیم‌گیری چند معیاره است به خصوص ارایه راهکارهایی مبتنی بر اندازه‌های اطلاعات مانند اندازه‌های فاصله، اندازه‌های شباهت و اندازه‌های آنتروپی.

منابع

- [۲] برزگری نژاد، ع.، حسین زاده لطفی، ف.، رستمی مال خلیفه، م.، (۱۳۹۵). مدلی غیرشعاعی برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم گیرنده با داده‌های فازی. *مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن*، ۱۳(۳)، ۱۱۱-۱۲۱.
- [۳] کردرستمی، س.، امیر تیموری، ع.، فاضلی سندیانی، س.، (۱۳۹۰). تخصیص مجدد منابع با حفظ پایداری مرزهای کارآ در مناطق. *مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن*، ۸(۴)، ۹۳-۱۰۵.
- [1] Mordeson J.N., Bhutani K.R., Rosenfeld A., (2005). *Fuzzy Group Theory*, Springer, New York.
- [4] Lai Y.J., Hwang C.L. (1992), *Fuzzy mathematical programming-methods and applications*, Springer-Verlag, Berlin.
- [5] Luo C.Z., Wang P.Z., (1990). Representation of compositional relations in fuzzy reasoning, *Fuzzy Sets and Systems*, 36, 327-337.
- [6] Yuan X.H., Li H.X., Stanley Lee E., (2009). Three new cut sets of fuzzy sets and new theories of fuzzy sets, *Computer and Mathematics with Applications*, 57, 691-701.
- [7] H.X. Li, X.H. Yuan, E.S. Lee, (2009). The three-dimensional fuzzy sets and their cut sets, *Computers and Mathematics with Applications* 58 1349-1359.
- [8] Yuan X.H., Li H.X. Sun., K.B., (2011). The cut sets, decomposition theorems and representation theorems on intuitionistic fuzzy sets and interval valued fuzzy sets, *Science China (Information Sciences)* 54 (1) 91-110.
- [9] Martinetti D., Janis V., Montes S., (2013). Cuts of intuitionistic fuzzy sets respecting fuzzy connectives, *Information Sciences*, 232, 267-275.
- [10] Wang Ch., (2017). Decomposition theorems and representation theorems of vague soft sets, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 32, 85-95.
- [11] Chen L, Chen Z., (2019). Decomposition theorem of fuzzy tensors and its applications. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 36, 575-581.
- [12] Chen L., (2020). Decomposition theorem of intuitionistic fuzzy tensors, *Computational and Applied Mathematics*, 39, <https://doi.org/10.1007/s40314-019-1000-8>.
- [13] Alcantud J.C.R, Torra V., (2018). Decomposition theorems and extension principles for hesitant fuzzy sets, *Information Fusion*, 41, 48-56.
- [14] Yuan X.H., Li H.X., (2009). Cut sets on interval-valued intuitionistic fuzzy sets, *Sixth Int. Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*, 167-171.
- [15] Zhu B., Xu Z.S., Xia M.M., (2012). Dual hesitant fuzzy sets, *Journal of Applied Mathematics* Article ID879629.
- [16] Qian G., Wang H., Feng X., (2013). Generalized hesitant fuzzy sets and their application in decision support system, *Knowledge-Based Systems*, 37, 357-365.
- [17] Liao H., Xu Z., Herrera-Viedma E., Herrera F., (2018), Hesitant fuzzy linguistic term set and its application in decision making: A state-of-the-art survey, *Int. J. Fuzzy Systems* 20, 2084-2110.
- [18] Rodriguez R.M., Martinez L., Herrera F., (2012). Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20, 109-119.
- [19] Farhadinia B., (2013). A novel method of ranking hesitant fuzzy values for multiple attribute decision-making problems, *International Journal of Intelligent Systems*, 28, 752-767.
- [20] Farhadinia B., (2013). Information measures for hesitant fuzzy sets and interval-valued hesitant fuzzy sets, *Information Sciences*, 240, 129-144.
- [21] Torra V., (2010). Hesitant fuzzy sets, *International Journal of Intelligent Systems*, 25, 529-539.
- [22] Zadeh L.A., (1965). Fuzzy sets, *Information and Computation*, 8, 338-353.