

# یک روش مبتنی بر استانداردسازی برای حل مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی و کاربرد آن در تولید محصولات و فرآورده‌های چوبی

نعمت اله تقی نژاد<sup>۱\*</sup>، الهام مهدی زاده<sup>۲</sup>، مهرداد غزنوی<sup>۳</sup>

۱- استادیار، گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران

۲- کارشناسی ارشد، گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

۳- دانشیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

رسید مقاله: ۲۰ آذر ۱۴۰۲

پذیرش مقاله: ۱۶ اردیبهشت ۱۴۰۳

## چکیده

در حال حاضر روش‌های زیادی برای حل مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تحت متغیرهای فازی غیرمنفی وجود دارند. به دلیل ایرادات و محدودیت این روش‌ها، نمی‌توان از آنها برای حل مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی (FFLFP) که همه متغیرها و پارامترهای آن فازی هستند، استفاده کرد. این مقاله قصد دارد یک روش کارآمد برای مساله FFLFP با اعداد فازی دوزنقه‌ای پیشنهاد دهد که با اضافه کردن متغیرهای کمکی قیود نامساوی را به قیود مساوی تبدیل و بدون استفاده از رتبه‌بندی اقدام به حل مساله می‌کند. در نهایت با ارایه چند مثال، ضمن پیاده‌سازی عملی، روش پیشنهادی با روش‌های دیگر مقایسه و میزان مطلوبیت این روش را از نظر سادگی عملیات و دقت نتایج سنجیده خواهد شد و همچنین یک مثال واقعی از یک شرکت تولید فرآورده‌ها و محصولات چوبی نیز مورد بررسی و حل قرار خواهد گرفت.

**کلمات کلیدی:** برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی، برنامه‌ریزی خطی چندهدفه، اعداد فازی دوزنقه‌ای، جواب بهین.

## ۱ مقدمه

مساله برنامه‌ریزی کسری خطی بسیار حایز اهمیت است؛ زیرا بر اساس نسبتی از مقادیر فیزیکی یا مقادیر اقتصادی برای بهینه‌سازی همزمان ایجاد می‌شود. در بسیاری از حوزه‌های مختلف از جمله برنامه‌ریزی مالی (نسبت بدهی به حقوق صاحبان سهام، نسبت سود به سرمایه‌گذاری)، برنامه‌ریزی تولید (سرمایه‌گذاری به فروش)، برنامه‌ریزی بهداشت و درمان و بیمارستان (نسبت پرستار به بیماران) و برنامه‌ریزی دانشگاهی (نسبت دانشجو به معلم) و غیره قابل اجرا است [۱-۳].

\* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: ntaghinezhad@gmail.com

در چنین مسایلی، فرض می‌شود ضرایب تابع هدف و محدودیت‌ها و منابع به طور دقیق شناخته شده باشند. ولی در عمل، (برخی یا همه) ضرایب به دلیل خطاهای اندازه‌گیری یا تغییرات با شرایط بازار یا برخی مشکلات غیرقابل کنترل (اقلیم، ترافیک، مشتریان و غیره) دقیق نیستند. بهینه‌سازی تحت عدم قطعیت عموماً در سه دیدگاه مورد بررسی قرار می‌گیرد: بهینه‌سازی تصادفی [۴]، بهینه‌سازی استوار [۵] و بهینه‌سازی فازی. در بهینه‌سازی تصادفی [۴]، پارامترهای نامعین توسط تابع توزیع احتمالی تحت کنترل بوده و مدل به دنبال ارایه راه حلی است که هزینه انتظاری تابع هدف را کمینه سازد. در بسیاری از مسایل کاربردی اطلاعات دقیق راجع به توزیع احتمالی غیرقطعی به راحتی به دست نمی‌آید، که این به علت نبود داده‌های شهودی کامل و گسترده است. در بهینه‌سازی استوار [۵]، عدم قطعیت با یک مجموعه غیرقطعی نمایش داده می‌شود که عدم قطعیت همه داده‌ها را در بر می‌گیرد. گردایه داده‌های غیرقطعی ممکن است شامل متغیرهای پیوسته یا گسسته باشد. در حالت گسسته، برای هر پارامتر بر اساس تجارب گذشته و مطالعات و امکان‌سنجی صورت گرفته چندین عدد مختلف پیشنهاد می‌شود که به هر یک از آنها عنوان سناریو اطلاق شده و در حالت پیوسته هر پارامتر غیرقطعی با یک بازه مشخص تعیین می‌گردد. مهم‌ترین کاستی این روش، محتاطانه عمل کردن آن است که باعث اتلاف منابع در عمل می‌شود. اغلب مفاهیم در دنیای واقعی غیردقیق (مبهم) هستند برنامه‌ریزی تصادفی نمی‌تواند این خاصیت را با یک توزیع احتمال دقیق نمایش دهد و روش‌های بهینه‌سازی استوار بسیار پیچیده هستند در حالی که نظریه مجموعه فازی می‌تواند یک توصیف واضح از عدم قطعیت در داده‌های ورودی (پارامترها، بردار هزینه و ...) داشته باشد. استفاده از اعداد فازی برای پوشش عدم قطعیت داده‌ها بسیار کارآمد می‌باشد. لذا مساله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی فازی به وجود می‌آید [۶-۱۰].

## ۲ پیشینه تحقیق

لی و چن [۱۱] با استفاده از مفهوم و تعریف بهینه‌سازی فازی، فرم کلی برنامه‌ریزی کسری خطی فازی را حل کردند. داس و همکاران [۱۲] به توسعه یک الگوریتم کارآمد برای حل مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی پرداختند. برای این منظور، یک روش جدید از ترکیب روش چارنز و کوپر و مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه به دست آوردند. ورامانی و سوماتی [۱۳] یک الگوریتم جدید برای حل برنامه‌ریزی کسری خطی فازی بیان کردند که متغیرهای انحرافی را حداقل می‌کرد. آریا و همکاران [۱۴] با استفاده از یک تابع رتبه‌بندی و رویکرد وزن‌دهی، یک الگوریتم جدید برای حل مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی فازی چندهدفه ارایه دادند. بورزا و رامبلی [۱۵] از روش مین-ماکس برای تبدیل یک مساله برنامه‌ریزی خطی کسری فازی چندهدفه به یک مساله تک‌هدفه استفاده کردند و نشان دادند جواب بهینه مساله تک‌هدفه یک جواب کارا برای مساله چندهدفه است. ورامانی و همکاران [۱۶] یک روش کارآمد برای حل مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی ارایه نمودند در این روش، ابتدا توسط آلفا برش‌ها، تابع هدف و محدودیت‌های مساله به یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوهدفه قطعی تبدیل سپس به کمک برنامه‌ریزی چندهدفه حل شدند. دب [۱۷] ابتدا مساله برنامه‌ریزی کسری فازی را با استفاده از روش چارنز و کوپر و رتبه‌بندی به مساله برنامه‌ریزی خطی قطعی تبدیل کرد و در نهایت با

استفاده از سیمپلکس جواب بهینه را به دست آورد. داس و همکاران [۱۸] یک رتبه‌بندی برای محاسبه پارامترهای بالا، میانی و پایین مساله برنامه‌ریزی کسری خطی فازی پیشنهاد دادند. با استفاده از این روش یک مساله برنامه‌ریزی کسری خطی سه هدفه تشکیل می‌گردد. لوگاناتان و گانسان [۱۹] به بررسی مساله FFLFP پرداختند و با استفاده از پارامتر R روشی ارایه کردند. فرنام و دره‌میرکی [۲۰] یک رویکرد جدید برای حل مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی فازی متقارن ارایه دادند که در آن از تعمیم نظریه بلمن و زاده استفاده شد. لوگاناتان و گانسان [۲۱] با تبدیل مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی به برنامه‌ریزی خطی قطعی و استفاده از یک رتبه‌بندی جدید به حل مساله پرداختند. یونسی-آبیاکی و مولایی [۲۲] مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه را با استفاده از روشی مبتنی بر جمع وزنی با انجام سه مرحله به برنامه‌ریزی کسری خطی تبدیل و حل کردند. کومار و داس [۲۳] به ایجاد یک تابع رتبه‌بندی جدید برای حل برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی که در آن با جایگزین کردن اضلاع غیرموازی عدد فازی دوزنقه‌ای به دست می‌آید، پرداختند. الحربی و خلیفه [۲۴] با استفاده از تقریب بازه بسته اعداد فازی، یک مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی را حل کردند. آن‌ها با استفاده از روابط ترتیبی به دست آمده از ترجیحات تصمیم گیرنده، مساله تک‌هدفه را به یک مساله چندهدفه تبدیل کرده و آن را حل کردند. بهاتیا و همکاران [۲۵] از رویکرد مهار برای حل مسایل برنامه‌ریزی کمینه جریان کسری خطی فازی استفاده کردند. محمودی‌راد و همکاران [۲۶] مساله برنامه‌ریزی کسری خطی فازی را ابتدا به برنامه‌ریزی خطی تبدیل و سپس با بهره‌گیری از بهینگی پارتو مساله را حل کردند که مزیت روش آنان در استفاده نکردن از رتبه‌بندی است. ورمانی و همکاران [۲۷] یک روش برای یافتن جواب بهینه پارتو برای مساله برنامه‌ریزی چند هدفه خطی با ترکیب تابع خطی و کسری خطی از طریق تابع عضویت غیرخطی ارایه دادند. چاوهان و همکاران [۲۸] یک روش بر پایه آلفا برش پیشنهاد کردند که مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی با متغیرهای فازی و پارامترهای نامحدود را حل می‌کند. نایاک و ماهارانا [۲۹] یک مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه کسری را در محیط فازی مورد بررسی قرار دادند، در این روش، ابتدا توابع هدف به ارزش فازی تبدیل و در نهایت به کمک برنامه‌ریزی آرمانی فازی یک راه حل کارآمد ارایه شد.

با بررسی‌های انجام گرفته مشخص است که روش‌های مطرح شده برای حل مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی دارای سه ایراد و محدودیت نسبتاً مهم هستند (۱) مراحل طولانی و پیچیده دارند در حالی که روش پیشنهاد شده در این مقاله با به کارگیری روندی بسیار قابل فهم و کاربردی می‌تواند جواب‌های بهینه را به دست آورد. (۲) منحصر به اعداد مثلثی فازی پرداخته‌اند در حالی که در این مقاله به اعداد کامل‌تر دوزنقه‌ای فازی پرداختیم و (۳) قیود مدل فازی را با روش‌های رتبه‌بندی به مدل قطعی تبدیل می‌کنند در حالی که در این مقاله به کمک محاسبات و برابری فازی قیود را به صورت فازی مورد بررسی قرار می‌دهیم و در قیود از رتبه‌بندی استفاده نکردیم.

در بخش سوم تعاریف اولیه فازی و عملیات حساب فازی بیان می‌شود. در بخش چهارم به ارایه روش جدید حل برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی می‌پردازیم. در بخش پنجم با مطرح کردن چند مثال و حل آنها با توجه به روش پیشنهادی می‌توانیم به بررسی و مقایسه روش پیشنهادی جدید پردازیم. در بخش ششم یک مثال واقعی

از یک شرکت تولید محصولات چوبی مدلسازی و حل می‌شود و در نهایت در فصل هفتم نتیجه‌گیری ارایه می‌شود.

### ۳ تعاریف فازی

در این بخش مفاهیم اولیه، حساب و مقایسه اعداد فازی ارایه می‌شود [۳۰-۳۱].

**تعریف ۱:** عدد  $\tilde{A} = (a, b, c, d)$  را فازی دوزنقه‌ای می‌گویند هرگاه تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف شود:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \end{cases} \quad (1)$$

**تعریف ۲:** عدد فازی دوزنقه‌ای  $\tilde{A} = (a, b, c, d)$  را مثبت (نامنفی) گویند اگر و فقط اگر  $a \geq 0$  باشد.

**تعریف ۳:** دو عدد فازی دوزنقه‌ای  $\tilde{A} = (a, b, c, d)$  و  $\tilde{B} = (e, f, g, h)$  برابر هستند هرگاه  $a = e$ ،  $b = f$ ،  $c = g$  و  $d = h$  باشد.

**تعریف ۴:** جمع، تفریق و ضرب اعداد فازی دوزنقه‌ای  $\tilde{A} = (a, b, c, d)$  و  $\tilde{B} = (e, f, g, h)$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \tilde{A} + \tilde{B} &= (a + e, b + f, c + g, d + h) \\ \tilde{A} - \tilde{B} &= (a - h, b - g, c - f, d - e) \\ k\tilde{A} &= \begin{cases} (ka, kb, kc, kd), & k \geq 0 \\ (kd, kc, kb, ka), & k < 0 \end{cases} \\ \tilde{A} \otimes \tilde{B} &= (ae, bf, cg, dh), \quad \tilde{A} \geq 0, \tilde{B} \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

**تعریف ۵:** روش رتبه‌بندی مبنی بر مرکز ثقل برای عدد فازی دوزنقه‌ای  $\tilde{A} = (a, b, c, d)$  به صورت زیر محاسبه می‌شود [۳۲]:

$$R(\tilde{A}) = \frac{1}{3} \left[ a + b + c + d - \frac{cd - ab}{(c + d) - (a + b)} \right] \quad (3)$$

**تعریف ۶:** فرض کنید  $\tilde{A} = (a, b, c, d)$  و  $\tilde{B} = (e, f, g, h)$  دو عدد فازی دوزنقه‌ای باشند می‌گوییم  $\tilde{A} < \tilde{B}$  اگر و فقط اگر  $a < e$  و  $b < f$ ،  $c < g$ ،  $d < h$ .

### ۴ روش جدید

در این بخش با مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی آشنا می‌شویم و روش حل پیشنهادی مطرح می‌گردد. در این روش مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی با متغیرها و پارامترهای دوزنقه‌ای با قیود نامساوی با

افزودن متغیرهای کمکی  $\tilde{S}$  و  $\tilde{R}$  به مساله با قیود تساوی تبدیل می شود و بعد با استفاده از برنامه ریزی خطی چندهدفه جواب بهینه به دست می آید. شرح کامل مراحل روش در ادامه بیان می شود. ابتدا مساله برنامه ریزی کسری خطی تماما فازی به صورت را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \text{Max } \tilde{z} &= \frac{\tilde{c}^t \tilde{x} + \tilde{p}}{\tilde{d}^t \tilde{x} + \tilde{q}} \\ \text{s.t.} \\ \tilde{A} \tilde{x} &\leq \tilde{b} \\ \tilde{x} &\geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{d}$ ,  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{c}$ ,  $\tilde{x}$  و  $\tilde{z}$  فازی می باشند. نخست با استفاده از تبدیل چارنر- کوپر  $\tilde{y} = \tilde{t}\tilde{x}$  و  $\tilde{t} = (\tilde{d}^t \tilde{x} + \tilde{q})^{-1}$  مساله را به یک مساله برنامه ریزی خطی تماما فازی تبدیل می کنیم، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \text{Max } \tilde{z} &= \tilde{c}^t \tilde{y} + \tilde{p} \tilde{t} \\ \text{s.t.} \\ \tilde{A} \tilde{y} - \tilde{b} \tilde{t} &\leq 0 \\ \tilde{d}^t \tilde{y} + \tilde{q} \tilde{t} &\leq 1 \\ \tilde{y}, \tilde{t} &\geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

اکنون با افزودن متغیر کمکی  $\tilde{S}$  و  $\tilde{R}$  قیود نامساوی مساله را به قیود مساوی تبدیل می کنیم:

$$\begin{aligned} \text{Max } \tilde{z} &= \tilde{c}^t \tilde{y} + \tilde{p} \tilde{t} \\ \text{s.t.} \\ \tilde{A} \tilde{y} - \tilde{b} \tilde{t} + \tilde{S}_1 &= \tilde{r} + \tilde{R}_1 \\ \tilde{d}^t \tilde{y} + \tilde{q} \tilde{t} + \tilde{S}_2 &= \tilde{1} + \tilde{R}_2 \\ \tilde{y}, \tilde{t}, \tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

در ادامه همه پارامترها و متغیرهای مساله با اعداد فازی ذوزنقه ای  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ ,  $\tilde{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ ,  $\tilde{c}^t = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ ,  $\tilde{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ ,  $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ,  $\tilde{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ ,  $\tilde{d}^t = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ ,  $\tilde{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ ,  $\tilde{S}_1 = (S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14})$ ,  $\tilde{R}_1 = (R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14})$ ,  $\tilde{R}_2 = (R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{24})$ ,  $\tilde{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$  و  $\tilde{S}_2 = (S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{24})$  نمایش داده می شود و مساله به فرم زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} \text{Max } (z_1, z_2, z_3, z_4) &= (c_1 y_1, c_2 y_2, c_3 y_3, c_4 y_4) + (p_1 t_1, p_2 t_2, p_3 t_3, p_4 t_4) \\ \text{s.t.} \\ (a_1, a_2, a_3, a_4) \otimes (y_1, y_2, y_3, y_4) - (b_1 t_1, b_2 t_2, b_3 t_3, b_4 t_4) &+ (S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}) = \\ &= \tilde{r} + (R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}) \\ (d_1 y_1, d_2 y_2, d_3 y_3, d_4 y_4) + (q_1 t_1, q_2 t_2, q_3 t_3, q_4 t_4) &+ (S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{24}) = \\ &= \tilde{1} + (R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{24}) \\ \tilde{y}, \tilde{t}, \tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

**تذکره ۱:** اگر  $\tilde{y}^* = ((y^*)_1, (y^*)_2, (y^*)_3, (y^*)_4)$ ، جواب بهینه یکتا مساله (۵) باشد، شرایط زیر را برقرار می‌کند:

$$1. \tilde{A}\tilde{y}^* = \tilde{b}.$$

۲. برای یک  $\tilde{y} = ((y)_1, (y)_2, (y)_3, (y)_4)$  داریم،  $\tilde{c}^t\tilde{y} + \tilde{p}\tilde{t} \leq \tilde{c}^t\tilde{y}^* + \tilde{p}\tilde{t}$  در حالت پیشینه‌سازی و در حالت کمینه‌سازی  $\tilde{c}^t\tilde{y} + \tilde{p}\tilde{t} \geq \tilde{c}^t\tilde{y}^* + \tilde{p}\tilde{t}$ .

۳. اگر  $\tilde{y}^*$  جواب بهینه مساله (۵) باشد و  $y'$  جواب بهینه دیگری برای مساله (۵) باشد حتما در رابطه‌ی  $\tilde{c}^t\tilde{y}' + \tilde{p}\tilde{t} = \tilde{c}^t\tilde{y}^* + \tilde{p}\tilde{t}$  صدق می‌کند.

حال گام‌های روش پیشنهادی برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی کسری تماماً فازی را ارائه می‌کنیم:

**گام ۱.** با توجه به تعاریف حساب فازی و جمع سمت راست قیود با صفر و یک فازی مساله (۷) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{Max} (z_1, z_2, z_3, z_4) &= (c_1y_1 + p_1t_1, c_2y_2 + p_2t_2, c_3y_3 + p_3t_3, c_4y_4 + p_4t_4) \\ \text{s.t.} \\ (a_1y_1 - b_1t_1, a_2y_2 - b_2t_2, a_3y_3 - b_3t_3, a_4y_4 - b_4t_4) &+ (S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}) = \\ &= (R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}) \\ ((d^1y + qt)_1, (d^2y + qt)_2, (d^3y + qt)_3, (d^4y + qt)_4) &+ (S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{24}) = \\ &= (R_{21} + 1, R_{22} + 1, R_{23} + 1, R_{24} + 1) \\ (y_1, y_2, y_3, y_4) \geq 0, (t_1, t_2, t_3, t_4) \geq 0, (S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}) &\geq 0, \\ (S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{24}) \geq 0, (R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}) \geq 0, &(R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{24}) \geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

**گام ۲.** با استفاده از تعریف (۳) که به برابری دو عدد فازی اشاره دارد دو طرف قیود مساله (۸) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \text{Max} (z_1, z_2, z_3, z_4) &= ((c^1y + pt)_1, (c^2y + pt)_2, (c^3y + pt)_3, (c^4y + pt)_4) \\ (ay)_1 - (bt)_1 + S_{11} &= R_{11} \\ (ay)_2 - (bt)_2 + S_{12} &= R_{12} \\ (ay)_3 - (bt)_3 + S_{13} &= R_{13} \\ (ay)_4 - (bt)_4 + S_{14} &= R_{14} \\ (d^1y + qt)_1 + S_{21} &= 1 + R_{21} \\ (d^2y + qt)_2 + S_{22} &= 1 + R_{22} \\ (d^3y + qt)_3 + S_{23} &= 1 + R_{23} \\ (d^4y + qt)_4 + S_{24} &= 1 + R_{24} \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, &y_1 - y_2 \geq 0, y_2 - y_3 \geq 0 \\ t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0, t_4 \geq 0, &t_1 - t_2 \geq 0, t_2 - t_3 \geq 0 \\ (S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}) \geq 0, (S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{24}) &\geq 0 \\ (R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}) \geq 0, (R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{24}) &\geq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

**گام ۳.** حال مساله (۹) که دارای چهار تابع هدف است را با اعمال رتبه‌بندی تعریف (۶) داریم:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z_f &= (c^t y + pt)_f \\
 \text{Max } z_r &= (c^t y + pt)_r \\
 \text{Max } z_p &= (c^t y + pt)_p \\
 \text{Max } z_i &= (c^t y + pt)_i \\
 \text{s.t.} \\
 (ay)_i - (bt)_i + S_{i1} - R_{i1} &= 0 \\
 (ay)_r - (bt)_r + S_{i2} - R_{i2} &= 0 \\
 (ay)_p - (bt)_p + S_{i3} - R_{i3} &= 0 \\
 (ay)_f - (bt)_f + S_{i4} - R_{i4} &= 0 \\
 (d^t y + qt)_i + S_{r1} - R_{r1} &= 1 \\
 (d^t y + qt)_r + S_{r2} - R_{r2} &= 1 \\
 (d^t y + qt)_p + S_{r3} - R_{r3} &= 1 \\
 (d^t y + qt)_f + S_{r4} - R_{r4} &= 1 \\
 y_i \geq 0, y_r - y_i \geq 0, y_p - y_r \geq 0, y_f - y_p \geq 0 \\
 t_i \geq 0, t_r - t_i \geq 0, t_p - t_r \geq 0, t_f - t_p \geq 0 \\
 (S_{i1}, S_{i2}, S_{i3}, S_{i4}) \geq 0, (S_{r1}, S_{r2}, S_{r3}, S_{r4}) \geq 0 \\
 (R_{i1}, R_{i2}, R_{i3}, R_{i4}) \geq 0, (R_{r1}, R_{r2}, R_{r3}, R_{r4}) \geq 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

**گام ۴.** در مساله (۱۰) تابع هدف  $z_f$  با شرایط مربوط به آن به صورت مجزا می‌تواند در نظر گرفته شود:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z_f &= (c^t y + pt)_f \\
 \text{s.t.} \\
 (ay)_f - (bt)_f + S_{i4} - R_{i4} &= 0 \\
 (d^t y + qt)_f + S_{r4} - R_{r4} &= 1 \\
 y_f \geq 0, t_f \geq 0, S_{i4} \geq 0, S_{r4} \geq 0 \\
 R_{i4} \geq 0, R_{r4} \geq 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

**گام ۵.** با نرم افزارهای بهینه‌سازی مانند Lingo به راحتی مدل (۱۱) را حل کرده و مقادیر متغیرهای به دست آمده را در مساله (۱۰) جایگذاری می‌کنیم. سپس برای تابع هدف  $z_p$  مستقل از دیگر توابع هدف داریم:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z_p &= (c^t y + pt)_p \\
 \text{s.t.} \\
 (ay)_p - (bt)_p + S_{i3} - R_{i3} &= 0 \\
 (d^t y + qt)_p + S_{r3} - R_{r3} &= 1 \\
 y_p - y_r \geq 0, t_p - t_r \geq 0 \\
 S_{i3} \geq 0, S_{r3} \geq 0, R_{i3} \geq 0, R_{r3} \geq 0
 \end{aligned} \tag{12}$$

**گام ۶.** مدل (۱۲) را حل کرده و مقادیر متغیرهای به دست آمده را در مساله (۱۰) جایگذاری می‌کنیم. سپس برای تابع هدف  $z_r$  مستقل از دیگر توابع هدف داریم:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z_r &= (c^t y + pt)_r \\
 \text{s.t.} \\
 (ay)_r - (bt)_r + S_{1r} - R_{1r} &= 0 \\
 (d^t y + qt)_r + S_{2r} - R_{2r} &= 1 \\
 y_r - y_r &\geq 0, t_r - t_r \geq 0 \\
 S_{1r} \geq 0, S_{2r} \geq 0, R_{1r} \geq 0, R_{2r} \geq 0
 \end{aligned} \tag{۱۳}$$

**گام ۲.** مدل (۱۳) را حل کرده و مقادیر متغیرهای به‌دست آمده را در مساله (۱۰) جایگذاری می‌کنیم. در نهایت مدل مستقل تابع هدف  $z_r$  به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z_1 &= (c^t y + pt)_1 \\
 \text{s.t.} \\
 (ay)_1 - (bt)_1 + S_{11} - R_{11} &= 0 \\
 (d^t y + qt)_1 + S_{21} - R_{21} &= 1 \\
 y_1 - y_1 &\geq 0, t_1 - t_1 \geq 0 \\
 S_{11} \geq 0, S_{21} \geq 0, R_{11} \geq 0, R_{21} \geq 0
 \end{aligned} \tag{۱۴}$$

جواب بهینه یکتا به‌دست آمده برای مساله (۱۴) همان جواب بهینه مساله (۸) می‌باشد.

## ۵ مثال‌های عددی

در این بخش به منظور پیاده‌سازی عملی روش و مقایسه با سایر روش‌ها، چند مثال را حل خواهیم کرد.

**مثال ۱.** مساله برنامه‌ریزی کسری تماماً فازی را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } \tilde{z} &= \frac{(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)\tilde{x}_1 - (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)\tilde{x}_2 + (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)}{(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)\tilde{x}_1 - (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)\tilde{x}_2 + (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)} \\
 \text{s.t.} \\
 (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3)\tilde{x}_1 + (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3)\tilde{x}_2 + \tilde{S}_1 &= (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3) + \tilde{R}_1 \\
 (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3)\tilde{x}_1 - (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3)\tilde{x}_2 + \tilde{S}_2 &= (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3) + \tilde{R}_2 \\
 \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \geq 0, \tilde{S}_1, \tilde{S}_2 \geq 0, \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

بر اساس گام ۱ مساله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\text{Max } \tilde{z} = \frac{\left( \begin{array}{l} (\circ, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}) \otimes ((x_{\mathfrak{I}})_1, (x_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{r}}, (x_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{r}}, (x_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{f}} - \\ (\circ, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}) \otimes ((x_{\mathfrak{r}})_1, (x_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{r}}, (x_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{r}}, (x_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{f}}) + (\circ, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}) \end{array} \right)}{\left( \begin{array}{l} (\circ, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}) \otimes ((x_{\mathfrak{I}})_1, (x_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{r}}, (x_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{r}}, (x_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{f}}) + \\ (\circ, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}) \otimes ((x_{\mathfrak{r}})_1, (x_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{r}}, (x_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{r}}, (x_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{f}}) + (\mathfrak{I}, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}) \end{array} \right)}$$

s.t.

$$\begin{aligned} & (\circ, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}) \otimes ((x_{\mathfrak{I}})_1, (x_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{r}}, (x_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{r}}, (x_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{f}}) + (\circ, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}) \otimes ((x_{\mathfrak{r}})_1, (x_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{r}}, (x_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{r}}, (x_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{f}}) + \\ & (S_{\mathfrak{I}1}, S_{\mathfrak{I}2}, S_{\mathfrak{I}3}, S_{\mathfrak{I}4}) = (\mathfrak{I}, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}) + (R_{\mathfrak{I}1}, R_{\mathfrak{I}2}, R_{\mathfrak{I}3}, R_{\mathfrak{I}4}) \\ & (\circ, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}) \otimes ((x_{\mathfrak{I}})_1, (x_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{r}}, (x_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{r}}, (x_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{f}}) - (\circ, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}) \otimes ((x_{\mathfrak{r}})_1, (x_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{r}}, (x_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{r}}, (x_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{f}}) + \\ & (S_{\mathfrak{r}1}, S_{\mathfrak{r}2}, S_{\mathfrak{r}3}, S_{\mathfrak{r}4}) = (\circ, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}) + (R_{\mathfrak{r}1}, R_{\mathfrak{r}2}, R_{\mathfrak{r}3}, R_{\mathfrak{r}4}) \\ & (x_{\mathfrak{I}})_1, (x_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{r}}, (x_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{r}}, (x_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{f}} \geq \circ, (x_{\mathfrak{r}})_1, (x_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{r}}, (x_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{r}}, (x_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{f}} \geq \circ \\ & (S_{\mathfrak{I}1}, S_{\mathfrak{I}2}, S_{\mathfrak{I}3}, S_{\mathfrak{I}4}) \geq \circ, (S_{\mathfrak{r}1}, S_{\mathfrak{r}2}, S_{\mathfrak{r}3}, S_{\mathfrak{r}4}) \geq \circ \\ & (R_{\mathfrak{I}1}, R_{\mathfrak{I}2}, R_{\mathfrak{I}3}, R_{\mathfrak{I}4}) \geq \circ, (R_{\mathfrak{r}1}, R_{\mathfrak{r}2}, R_{\mathfrak{r}3}, R_{\mathfrak{r}4}) \geq \circ \end{aligned}$$

طبق گام ۲، داریم:

$$\text{Max } \tilde{z} = (-\mathfrak{I}(y_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{f}}, (y_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{r}} - (y_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{r}} + t_{\mathfrak{r}}, (y_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{r}} - (y_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{r}} + t_{\mathfrak{r}}, \mathfrak{I}(y_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{f}} + \mathfrak{I}t_{\mathfrak{f}})$$

s.t.

$$\begin{aligned} & \circ - t_{\mathfrak{I}} + S_{\mathfrak{I}1} - R_{\mathfrak{I}1} = \circ \\ & (y_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{r}} + (y_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{r}} - t_{\mathfrak{r}} + S_{\mathfrak{I}2} - R_{\mathfrak{I}2} = \circ \\ & (y_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{r}} + (y_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{r}} - \mathfrak{I}t_{\mathfrak{r}} + S_{\mathfrak{I}3} - R_{\mathfrak{I}3} = \circ \\ & \mathfrak{I}(y_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{f}} + \mathfrak{I}(y_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{f}} - \mathfrak{I}t_{\mathfrak{f}} + S_{\mathfrak{I}4} - R_{\mathfrak{I}4} = \circ \\ & -\mathfrak{I}(y_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{f}} + S_{\mathfrak{r}1} - R_{\mathfrak{r}1} = \circ \\ & (y_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{r}} - (y_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{r}} - t_{\mathfrak{r}} + S_{\mathfrak{r}2} - R_{\mathfrak{r}2} = \circ \\ & (y_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{r}} - (y_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{r}} - t_{\mathfrak{r}} + S_{\mathfrak{r}3} - R_{\mathfrak{r}3} = \circ \\ & \mathfrak{I}(y_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{f}} - \mathfrak{I}t_{\mathfrak{f}} + S_{\mathfrak{r}4} - R_{\mathfrak{r}4} = \circ \\ & t_{\mathfrak{I}} + S_{\mathfrak{r}1} - R_{\mathfrak{r}1} = \mathfrak{I} \\ & (y_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{r}} + (y_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{r}} + t_{\mathfrak{r}} + S_{\mathfrak{r}2} - R_{\mathfrak{r}2} = \mathfrak{I} \\ & (y_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{r}} + (y_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{r}} + \mathfrak{I}t_{\mathfrak{r}} + S_{\mathfrak{r}3} - R_{\mathfrak{r}3} = \mathfrak{I} \\ & \mathfrak{I}(y_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{f}} + \mathfrak{I}(y_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{f}} + \mathfrak{I}t_{\mathfrak{f}} + S_{\mathfrak{r}4} - R_{\mathfrak{r}4} = \mathfrak{I} \\ & (y_{\mathfrak{I}})_1 \geq \circ, (y_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{r}} - (y_{\mathfrak{I}})_1 \geq \circ, (y_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{r}} - (y_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{r}} \geq \circ, (y_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{f}} - (y_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{r}} \geq \circ \\ & (y_{\mathfrak{r}})_1 \geq \circ, (y_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{r}} - (y_{\mathfrak{r}})_1 \geq \circ, (y_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{r}} - (y_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{r}} \geq \circ, (y_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{f}} - (y_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{r}} \geq \circ \\ & t_{\mathfrak{I}} \geq \circ, t_{\mathfrak{r}} - t_{\mathfrak{I}} \geq \circ, t_{\mathfrak{r}} - t_{\mathfrak{r}} \geq \circ, t_{\mathfrak{f}} - t_{\mathfrak{r}} \geq \circ \\ & (S_{\mathfrak{I}1}, S_{\mathfrak{I}2}, S_{\mathfrak{I}3}, S_{\mathfrak{I}4}) \geq \circ, (S_{\mathfrak{r}1}, S_{\mathfrak{r}2}, S_{\mathfrak{r}3}, S_{\mathfrak{r}4}) \geq \circ, (S_{\mathfrak{r}1}, S_{\mathfrak{r}2}, S_{\mathfrak{r}3}, S_{\mathfrak{r}4}) \geq \circ \\ & (R_{\mathfrak{I}1}, R_{\mathfrak{I}2}, R_{\mathfrak{I}3}, R_{\mathfrak{I}4}) \geq \circ, (R_{\mathfrak{r}1}, R_{\mathfrak{r}2}, R_{\mathfrak{r}3}, R_{\mathfrak{r}4}) \geq \circ, (R_{\mathfrak{r}1}, R_{\mathfrak{r}2}, R_{\mathfrak{r}3}, R_{\mathfrak{r}4}) \geq \circ \end{aligned}$$

بنابر گام ۳ روش، مساله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } z_1 = -\mathfrak{r}(y_r)_f \\
 & \text{Max } z_r = (y_1)_r - (y_r)_r + t_r \\
 & \text{Max } z_r = (y_1)_r - (y_r)_r + t_r \\
 & \text{Max } z_f = \mathfrak{r}(y_1)_f + \mathfrak{r}t_f \\
 & s.t. \\
 & \bullet -t_1 + S_{11} - R_{11} = \bullet \\
 & (y_1)_r + (y_r)_r - t_r + S_{1r} - R_{1r} = \bullet \\
 & (y_1)_r + (y_r)_r - \mathfrak{r}t_r + S_{1r} - R_{1r} = \bullet \\
 & \mathfrak{r}(y_1)_f + \mathfrak{r}(y_r)_f - \mathfrak{r}t_f + S_{1f} - R_{1f} = \bullet \\
 & -\mathfrak{r}(y_r)_f + S_{r1} - R_{r1} = \bullet \\
 & (y_1)_r - (y_r)_r - t_r + S_{rr} - R_{rr} = \bullet \\
 & (y_1)_r - (y_r)_r - t_r + S_{rr} - R_{rr} = \bullet \\
 & \mathfrak{r}(y_1)_f - \mathfrak{r}t_f + S_{rf} - R_{rf} = \bullet \\
 & t_1 + S_{r1} - R_{r1} = 1 \\
 & (y_1)_r + (y_r)_r + t_r + S_{rr} - R_{rr} = 1 \\
 & (y_1)_r + (y_r)_r + \mathfrak{r}t_r + S_{rr} - R_{rr} = 1 \\
 & \mathfrak{r}(y_1)_f + \mathfrak{r}(y_r)_f + \mathfrak{r}t_f + S_{rf} - R_{rf} = 1 \\
 & (y_1)_1 \geq \circ, (y_1)_r - (y_1)_1 \geq \circ, (y_1)_r - (y_1)_r \geq \circ, (y_1)_f - (y_1)_r \geq \circ \\
 & (y_r)_1 \geq \circ, (y_r)_r - (y_r)_1 \geq \circ, (y_r)_r - (y_r)_r \geq \circ, (y_r)_f - (y_r)_r \geq \circ \\
 & t_1 \geq \circ, t_r - t_1 \geq \circ, t_r - t_r \geq \circ, t_f - t_r \geq \circ \\
 & (S_{11}, S_{1r}, S_{1r}, S_{1f}) \geq \circ, (S_{r1}, S_{rr}, S_{rr}, S_{rf}) \geq \circ, (S_{r1}, S_{rr}, S_{rr}, S_{rf}) \geq \circ \\
 & (R_{11}, R_{1r}, R_{1r}, R_{1f}) \geq \circ, (R_{r1}, R_{rr}, R_{rr}, R_{rf}) \geq \circ, (R_{r1}, R_{rr}, R_{rr}, R_{rf}) \geq \circ
 \end{aligned}$$

طبق تعریف (۶) مساله تابع هدف  $z_f$  را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } z_f = \mathfrak{r}(y_1)_f + \mathfrak{r}t_f \\
 & s.t. \\
 & \mathfrak{r}(y_1)_f + \mathfrak{r}(y_r)_f - \mathfrak{r}t_f + S_{1f} - R_{1f} = \bullet \\
 & \mathfrak{r}(y_1)_f - \mathfrak{r}t_f + S_{rf} - R_{rf} = \bullet \\
 & \mathfrak{r}(y_1)_f + \mathfrak{r}(y_r)_f + \mathfrak{r}t_f + S_{rf} - R_{rf} = 1 \\
 & (y_1)_f \geq \circ, (y_r)_f \geq \circ, t_f \geq \circ \\
 & S_{1f}, S_{rf}, S_{rf} \geq \circ, R_{1f}, R_{rf}, R_{rf} \geq \circ
 \end{aligned}$$

جواب بهینه‌ی مساله ۸ /  $z_f^* = \bullet$  می‌باشد. لذا به مرحله بعد می‌رویم:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } z_r = (y_1)_r - (y_r)_r + t_r \\
 & s.t. \\
 & (y_1)_r + (y_r)_r - \mathfrak{r}t_r + S_{1r} - R_{1r} = \bullet \\
 & (y_1)_r - (y_r)_r - t_r + S_{rr} - R_{rr} = \bullet \\
 & (y_1)_r + (y_r)_r + \mathfrak{r}t_r + S_{rr} - R_{rr} = 1 \\
 & (y_1)_r \geq \circ, (y_r)_r \geq \circ, (y_r)_r \geq \circ, t_r \geq \circ \\
 & S_{1r}, S_{rr}, S_{rr} \geq \circ, R_{1r}, R_{rr}, R_{rr} \geq \circ
 \end{aligned}$$

جواب بهینه‌ی به‌دست آمده مساله بالا ۴ /  $z_r^* = \bullet$  می‌باشد؛ پس به مرحله بعد می‌رویم:

$$\begin{aligned}
\text{Max } z_r &= (y_1)_r - (y_r)_r + t_r \\
s.t. \\
(y_1)_r + (y_r)_r - t_r + S_{1r} - R_{1r} &= 0 \\
(y_1)_r - (y_r)_r - t_r + S_{rr} - R_{rr} &= 0 \\
(y_1)_r + (y_r)_r + t_r + S_{rr} - R_{rr} &= 1 \\
(y_1)_r \geq 0, (y_r)_r \geq 0, (y_r)_r \geq 0, t_r \geq 0 \\
S_{1r}, S_{rr}, S_{rr} \geq 0, R_{1r}, R_{rr}, R_{rr} \geq 0
\end{aligned}$$

جواب بهینه‌ی مساله  $z_r^* = 0/4$  است؛ لذا به مرحله آخر می‌رویم:

$$\begin{aligned}
\text{Max } z_1 &= -2(y_r)_r \\
s.t. \\
-t_1 + S_{11} - R_{11} &= 0 \\
-2(y_r)_r + S_{r1} - R_{r1} &= 0 \\
t_1 + S_{r1} - R_{r1} &= 1 \\
(y_1)_1 \geq 0, (y_r)_1 \geq 0, t_1 \geq 0, (y_r)_r \geq 0 \\
S_{11}, S_{r1}, S_{r1} \geq 0, R_{11}, R_{r1}, R_{r1} \geq 0
\end{aligned}$$

در نتیجه جواب‌های بهینه مساله به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_1^* &= \{(y_1^*)_1, (y_1^*)_r, (y_1^*)_r, (y_1^*)_r\} = (0, 0/2, 0/2, 0/2) \\
\tilde{y}_r^* &= \{(y_r^*)_1, (y_r^*)_r, (y_r^*)_r, (y_r^*)_r\} = (0, 0, 0, 0) \\
t^* &= \{t_1, t_r, t_r, t_r\} = (0, 0/2, 0/2, 0/2) \\
S_1^* &= \{(S_{11}, S_{1r}, S_{1r}, S_{1r})\} = (0, 0/2, 0/2, 0/2) \\
S_r^* &= \{(S_{r1}, S_{rr}, S_{rr}, S_{rr})\} = (0, 0, 0, 0) \\
S_r^* &= \{(S_{r1}, S_{rr}, S_{rr}, S_{rr})\} = (1, 1/4, 1/4, 2) \\
R_1^* &= \{(R_{11}, R_{1r}, R_{1r}, R_{1r})\} = (0, 0, 0, 0) \\
R_r^* &= \{(R_{r1}, R_{rr}, R_{rr}, R_{rr})\} = (0, 0, 0, 0) \\
R_r^* &= \{(R_{r1}, R_{rr}, R_{rr}, R_{rr})\} = (0, 1, 1, 2)
\end{aligned}$$

در نتیجه جواب بهینه متغیرهای اصلی مساله برابر است با:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1^* &= \{(x_1^*)_1, (x_1^*)_r, (x_1^*)_r, (x_1^*)_r\} = (0, 1, 1, 1) \\
\tilde{x}_r^* &= \{(x_r^*)_1, (x_r^*)_r, (x_r^*)_r, (x_r^*)_r\} = (0, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

و همچنین جواب بهینه تابع هدف به صورت عدد فازی ذوزنقه‌ای به صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{z}^* = \{(z^*)_1, (z^*)_r, (z^*)_r, (z^*)_r\} = (0, 0/4, 0/4, 0/8)$$

جواب بهینه ارایه شده توسط داس  $\tilde{z} = (0, 0/4, 0/4, 0/8)$  [۱۲] است، در حالی که داس فقط قادر به حل مسایل با

اعداد فازی مثلثی است که نشان می‌دهد روش پیشنهادی ارایه شده دارای جوابی هم مرتبه روش داس می‌باشد.

**مثال ۲.** شرکتی در تولید چای گیلان فعالیت دارد که برای تامین تقاضای دو مرکز توزیع رشت و لاهیجان محصول چای تولید می‌کند. طبق اطلاعات اولیه منابع احتمالی موجود به ازای هر ده هزار واحد به صورت  $(۵, ۶, ۶, ۷)$  عرضه می‌شود. اگر تقاضای مقصد برای رشت  $(۴, ۵, ۵, ۶)$  ده هزار واحد و لاهیجان  $(۶, ۸, ۸, ۱۰)$  ده هزار واحد باشد، سود شرکت به علت اطلاعات غیرقابل دستیابی اعداد نادقیق با درجه عضویت دوزنقه‌ای هستند. مدیریت شرکت در حال بررسی است تا سود را حداکثر کند.

| محصول چای | تقاضای محصولات مقصد | هزینه حمل و نقل |
|-----------|---------------------|-----------------|
| رشت       | $(۱۰, ۱۲, ۱۲, ۱۴)$  | $(۲, ۴, ۴, ۵)$  |
| لاهیجان   | $(۱۸, ۲۰, ۲۲, ۲۳)$  | $(۴, ۵, ۶, ۷)$  |

$$Max \tilde{z} = \frac{(۱۰, ۱۲, ۱۲, ۱۴)\tilde{x}_{۱۱} + (۱۸, ۲۰, ۲۲, ۲۳)\tilde{x}_{۱۲}}{(۲, ۴, ۴, ۵)\tilde{x}_{۱۱} + (۴, ۵, ۶, ۷)\tilde{x}_{۱۲} + (۱, ۲, ۲, ۳)}$$

s.t.

$$\tilde{x}_{۱۱} + \tilde{x}_{۱۲} \leq (۵, ۶, ۶, ۷)$$

$$\tilde{x}_{۱۱} + \tilde{x}_{۱۲} \leq (۴, ۵, ۵, ۶)$$

$$\tilde{x}_{۱۱} + \tilde{x}_{۱۲} \leq (۶, ۸, ۸, ۱۰)$$

$$\tilde{x}_{۱۱} \geq ۰, \tilde{x}_{۱۲} \geq ۰$$

جواب بهینه حاصل از روش پیشنهادی به شرح زیر است:

$$\tilde{y}_1^* = \{(y_1^*)_1, (y_1^*)_2, (y_1^*)_3, (y_1^*)_4\} = (۰, ۰, ۰, ۰)$$

$$\tilde{y}_2^* = \{(y_2^*)_1, (y_2^*)_2, (y_2^*)_3, (y_2^*)_4\} = (۰/۰۸, ۰/۱, ۰/۱, ۰/۱۲)$$

$$t^* = \{(t_1, t_2, t_3, t_4)\} = (۰/۰۲, ۰/۰۲, ۰/۰۲, ۰/۰۲)$$

در نتیجه جواب بهینه متغیرهای اصلی مساله برابر است با:

$$\tilde{x}_1^* = \{(x_1^*)_1, (x_1^*)_2, (x_1^*)_3, (x_1^*)_4\} = (۰, ۰, ۰, ۰)$$

$$\tilde{x}_2^* = \{(x_2^*)_1, (x_2^*)_2, (x_2^*)_3, (x_2^*)_4\} = (۴, ۵, ۵, ۶)$$

و همچنین جواب بهینه تابع هدف به صورت عدد فازی دوزنقه‌ای به صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{z}^* = \{(z^*)_1, (z^*)_2, (z^*)_3, (z^*)_4\} = (۱/۴, ۲, ۲/۲, ۳/۱)$$

**مثال ۳.** مثال ارایه شده توسط ورامانی و سماتی [۳۳] به صورت ذیل است:

$$Max \tilde{z} = \frac{(۳, ۴, ۶, ۷)\tilde{x}_1 + (۲, ۲/۵, ۳/۵, ۴)\tilde{x}_2}{(۴, ۴/۵, ۵/۵, ۶)\tilde{x}_1 + (۱, ۱/۵, ۲/۵, ۳)\tilde{x}_2 + (۰, ۰/۵, ۱/۵, ۲)}$$

s.t.

$$(۲, ۲/۵, ۳/۵, ۴)\tilde{x}_1 + (۳, ۴, ۶, ۷)\tilde{x}_2 \leq (۱۱, ۱۲, ۱۸, ۱۹)$$

$$(۴, ۴/۵, ۵/۵, ۶)\tilde{x}_1 + (۱, ۱/۵, ۲/۵, ۳)\tilde{x}_2 \leq (۸, ۹, ۱۱, ۱۲)$$

$$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \geq ۰.$$

جواب بهینه حاصل از روش پیشنهادی به شرح زیر است:

$$\tilde{y}_1^* = \{(y_1^*)_1, (y_1^*)_2, (y_1^*)_3, (y_1^*)_4\} = (0/6, 0/6, 0/6, 0/6)$$

$$\tilde{y}_2^* = \{(y_2^*)_1, (y_2^*)_2, (y_2^*)_3, (y_2^*)_4\} = (0/15, 0/15, 0/15, 0/15)$$

$$t^* = \{(t_1, t_2, t_3, t_4)\} = (0/7, 0/7, 0/7, 0/7)$$

$$S_1^* = \{(S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14})\} = (0/18, 0/24, 0/29, 0/36)$$

$$S_2^* = \{(S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{24})\} = (0/18, 0/18, 0/26, 0/30)$$

$$S_3^* = \{(S_{31}, S_{32}, S_{33}, S_{34})\} = (0/5, 0/6, 0/9, 1)$$

$$R_1^* = \{(R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14})\} = (0, 0/18, 0/18, 0/36)$$

$$R_2^* = \{(R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{24})\} = (0, 0/7, 0/23, 0/30)$$

$$R_3^* = \{(R_{31}, R_{32}, R_{33}, R_{34})\} = (0, 0/2, 0/8, 1)$$

در نتیجه جواب بهینه متغیرهای اصلی مساله برابر است با:

$$\tilde{x}_1^* = \{(x_1^*)_1, (x_1^*)_2, (x_1^*)_3, (x_1^*)_4\} = (0/86, 0/86, 0/86, 0/86)$$

$$\tilde{x}_2^* = \{(x_2^*)_1, (x_2^*)_2, (x_2^*)_3, (x_2^*)_4\} = (2/1, 2/1, 2/1, 2/1)$$

و همچنین جواب بهینه تابع هدف به صورت عدد فازی ذوزنقه‌ای به صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{z}^* = \{(z^*)_1, (z^*)_2, (z^*)_3, (z^*)_4\} = (0/51, 0/65, 0/93, 1/08)$$

ورامانی و سماتی [۳۳]  $\tilde{z} = (0, 0/27, 0/99)$  را به عنوان جواب بهینه ارایه کردند، که نمایش ذوزنقه‌ای آن به فرم

$\tilde{z} = (0, 0/27, 0/27, 0/99)$  می‌باشد و با هر روش رتبه‌بندی به وضوح جواب روش پیشنهادی این مقاله از روش

ورامانی بهتر است.

$$R(0/51, 0/65, 0/93, 1/08) = 0/8$$

$$R(0, 0/27, 0/27, 0/99) = 0/4$$

$$Proposed\_method = 0/8 > Veeramani\_method = 0/4$$

## ۶ یک مثال کاربردی از تولید محصولات و فرآورده‌های چوبی

شرکت تولید محصولات و فرآورده های چوبی قصد دارد دو محصول  $A$  و  $B$  را با سود  $(1, 2, 3)$  و  $(1, 1, 2)$  دلار به ازای هر واحد تولید کند. همچنین هزینه تولید هر یک از محصولات ذکر شده برابر  $(1, 3, 3, 5)$  و  $(1, 1, 1, 1)$  دلار است و هزینه ثابت  $(3, 6, 6, 9)$  دلار به تابع هزینه افزوده خواهد شد که به دلیل مدت زمان انتظار می‌باشد. از طرف دیگر برای تولید این محصولات به مواد اولیه نیاز است که قیمتی برابر  $(4, 7, 7, 10)$  به ازای هر واحد بر پوند و  $(0, 1, 1, 2)$  به ازای هر واحد بر دلار دارند در حالی که در کل  $(4, 6, 6, 8)$  دلار در اختیار شرکت است. همچنین برای تولید  $A$  و  $B$  به  $(1, 5, 5, 9)$  و  $(2, 3, 3, 4)$  ساعت نیروی انسانی نیاز است و مجموع نیروی انسانی در اختیار شرکت به صورت روزانه برابر  $(5, 6, 6, 7)$  است. شرکت می‌خواهد بداند با تولید چه تعداد از هر محصول به بیشترین سود دست خواهد یافت [۳۴].

مساله فوق به صورت زیر مدل‌سازی خواهد شد که در آن  $\tilde{x}_1$  میزان تولید محصول  $A$  و  $\tilde{x}_2$  نشان‌دهنده میزان تولید محصول  $B$  است:

$$\begin{aligned} \text{Max } \tilde{z} &= \frac{(1, 2, 2, 3) \tilde{x}_1 + (0, 1, 1, 2) \tilde{x}_2}{(1, 3, 3, 5) \tilde{x}_1 + (1, 1, 1, 1) \tilde{x}_2 + (3, 6, 6, 9)} \\ \text{s.t.} \\ (4, 7, 7, 10) \tilde{x}_1 + (0, 1, 1, 2) \tilde{x}_2 &\leq (4, 6, 6, 8) \\ (1, 5, 5, 9) \tilde{x}_1 + (2, 3, 3, 4) \tilde{x}_2 &\leq (5, 6, 6, 7) \\ \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

جواب بهینه حاصل از روش پیشنهادی به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1^* &= \{(y_1^*)_1, (y_1^*)_2, (y_1^*)_3, (y_1^*)_4\} = (0, 0/0.7, 0/0.7, 0/0.7) \\ \tilde{y}_2^* &= \{(y_2^*)_1, (y_2^*)_2, (y_2^*)_3, (y_2^*)_4\} = (0, 0/0.7, 0/0.7, 0/1.6) \\ t^* &= \{(t_1, t_2, t_3, t_4)\} = (0/0.9, 0/0.9, 0/0.9, 0/0.9) \\ S_1^* &= \{(S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14})\} = (0/1, 0, 0, 0/4) \\ S_2^* &= \{(S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{24})\} = (0, 0, 0, 0/4) \\ S_3^* &= \{(S_{31}, S_{32}, S_{33}, S_{34})\} = (0, 0/2, 0/2, 0/7) \\ R_1^* &= \{(R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14})\} = (0, 0/0.2, 0/0.2, 0/0.4) \\ R_2^* &= \{(R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{24})\} = (0/0.2, 0/0.2, 0/0.2, 0/1) \\ R_3^* &= \{(R_{31}, R_{32}, R_{33}, R_{34})\} = (0/0.2, 0/0.3, 0/0.6, 0/1.8) \end{aligned}$$

در نتیجه جواب بهینه متغیرهای اصلی مساله به صورت زیر قابل ارایه است:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1^* &= ((x_1^*)_1, (x_1^*)_2, (x_1^*)_3, (x_1^*)_4) = (0, 0/7.8, 0/7.8, 0/7.8) \\ \tilde{x}_2^* &= ((x_2^*)_1, (x_2^*)_2, (x_2^*)_3, (x_2^*)_4) = (0, 0/7.8, 0/7.8, 1/7.8) \end{aligned}$$

و همچنین تابع هدف بهینه هست:

$$\tilde{z}^* = (z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*) = (0/0.7, 0/2.1, 0/2.1, 0/3.3)$$

در نتیجه شرکت باید  $(0, 0/7.8, 0/7.8, 0/7.8)$  مقدار از محصول ۱ و  $(0, 0/7.8, 0/7.8, 1/7.8)$  مقدار از محصول ۲ تولید کند. با جواب‌های به دست آمده برنامه تحویلی به خط تولید بدین صورت است که برای محصول ۱ باید  $0/7.8$  مقدار تولید شود ولی امکان تولید کمتر هم وجود دارد و برای محصول ۲ مقدار تولید باید  $0/7.8$  باشد ولی امکان اضافه تولید تا  $1/7.8$  با فراهم بودن شرایط لازم یا تولید کمتر با عدم تحقق شرایط تولید وجود دارد.

## ۷ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مقاله روش جدیدی برای حل مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی با اعداد فازی دوزنقه‌ای پیشنهاد شد که در آن، برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی با استفاده از حساب فازی و افزودن متغیر کمکی به برنامه‌ریزی خطی چند هدفه تبدیل و سپس با استفاده از یک الگوریتم تکراری جواب‌های بهینه مساله برنامه‌ریزی

خطی چندهدفه به دست آمدند. در پایان روش پیشنهادی با روش‌های دیگر مقایسه و مشخص شد که این روش نسبت به روش‌های دیگر بسیار ساده و کارآمد می‌باشد و از نظر بهینگی جواب بهتری ارائه می‌کند، پیشنهاد برای کارهای بعدی می‌تواند در نظر گرفتن اعداد فازی  $LR$  و یا استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری برای حل مسایل چندهدفه باشد.

## منابع

- [1] Labbafi, M., Darabi, R., & Sarraf, F. (2021). Optimizing Asset and Liability Management with Fractional Planning Model Approach (Case Study: Melli Bank of Iran). *Journal of Operational Research In Its Applications (Applied Mathematics)-Lahijan Azad University*, 18(3), 93-109. (In Persian)
- [2] Rostamzadeh, H., & Mirdehghan, S. M. (2021). Finding the Efficient Solutions of Multiobjective Linear Fractional Programming Problems with Fuzzy Coefficients in Constraints and Vector of Resources. *Journal of Operational Research In Its Applications (Applied Mathematics)-Lahijan Azad University*, 18(1), 73-84. (In Persian)
- [3] Salary Pour Sharif Abad, F., Allahdadi, M., & Mishmast Nehi, H. (2021). New Approaches to Improve the Determination of Feasible Solutions of the Interval Linear Fractional Programming Problem. *Journal of Operational Research In Its Applications (Applied Mathematics)-Lahijan Azad University*, 18(3), 31-48. (In Persian)
- [4] Shapiro, A., Dentcheva, D. and Ruszczyński, A. (2021). *Lectures on Stochastic Programming. Modeling and Theory*. SIAM.
- [5] Ben-Tal, A., El-Ghaoui, L. and Nemirovski, A. (2009). *Robust Optimization*. Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton University Press.
- [6] Taghi-nezhad, N. A., Naseri, H., Khalili Goodarzi, F., & Taleshian Jelodar, F. (2015). Reactive scheduling presentation for an open shop problem focused on jobs' due dates. *Production and Operations Management*, 6(2), 95-112. (In Persian)
- [7] Taghi-Nezhad, N. A. (2022). A revisit of the proposed model for solving fuzzy linear fractional programming problem. *International Journal of Mathematics in Operational Research*, 23(2), 215-231.
- [8] Taghi-Nezhad, N. (2023). Fuzzy Linear Fractional Programming for Container Transportation Optimization. *Iranian Journal of Marine Science and Technology*, 27(107), 76-85. doi: 10.22034/ijmst.2023.544120.1636 (In Persian)
- [9] Taghi-Nezhad, N. A., & Babakordi, F. (2023). Fully hesitant parametric fuzzy equation. *Soft Computing*, 1-12.
- [10] Taghi-Nezhad, N. A., & Taleshian, F. (2023). A New Approach for Solving Fuzzy Single Facility Location Problem Under L1 Norm. *Fuzzy Optimization and Modeling Journal*, 4(2), 66-80.
- [11] Li, D. F. and Chen, S. (1996). A fuzzy programming approach to fuzzy linear fractional programming with fuzzy coefficients. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, 4, 829-834.
- [12] Das, S. K., Mandal, T. and Edalatpanah, S. A. (2017). A new approach for solving fully fuzzy linear fractional programming problems using the multi-objective linear programming. *RAIRO-Operations research*, 51(1), 285-297.
- [13] Veeramani, C. and Sumathi, M. (2016). A new method for solving fuzzy linear fractional Programming Problems. *Journal Of Intelligent Fuzzy Systems*, 31(3), 1831-1843
- [14] Arya, R., Singh, P., Kumari, S. and Obaidat, M. (2019). An approach for solving fully fuzzy multi-objective linear fractional optimization problems. *Soft Computing*, 24, 9105-9119.
- [15] Borza, M. and Rambely, A. S. (2021). A new method to solve multi-objective linear fractional problems, *Fuzzy Information and Engineering*, 13(3), 323-334.
- [16] Veeramani, C., Sharanya, S. and Ebrahimnejad, A. (2020). Optimization for multi-objective sum of linear and linear fractional programming problem. *Fuzzy nonlinear programming approach. Mathematical Sciences*, 1-15.
- [17] Deb, M. (2018). A study of fully fuzzy linear fractional programming problems by signed distance ranking technique. In *Optimization Techniques for Problem Solving in Uncertainty* (pp. 73-115). IGI Global.

- [18] Das, S. K., Edalatpanah, S. A. and Mandal, T. (2018). A proposed model for solving fuzzy linear fractional programming problem: Numerical Point of View. *Journal of Computational Science*, 25, 367-375.
- [19] Loganathan, T., and Ganesan, K. (2021). Solution of fully Fuzzy Linear Fractional Programming Problem-A Simple Approach. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (Vol. 1130, No. 1, p. 012047). IOP Publishing.
- [20] Farnam, M., and Darehmiraki, M. (2020). Hesitant Fuzzy Linear Fractional Programming Problem. In *International Online Conference on Intelligent Decision Science* (pp. 864-872). Springer, Cham.
- [21] Loganathan, T., and Ganesan, K. (2019). A solution approach to fully fuzzy linear fractional programming problems. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1377, No. 1, p. 012040). IOP Publishing.
- [22] Younsi-Abbaci, L., and Moulai, M. (2021). Solving the Multi-Objective Stochastic Interval-Valued Linear Fractional Integer Programming Problem. *Asian-European Journal of Mathematics*
- [23] Kumar-Das, S. (2019). A new method for solving fuzzy linear fractional programming problem with new ranking function. *International Journal of Research in Industrial Engineering*, 8(4), 384-393.
- [24] Alharbi, M. G. and Khalifa, H. A. (2021). On solutions of fully fuzzy linear fractional programming problems using close interval approximation for normalized heptagonal fuzzy numbers. *Applied Mathematics and Information Sciences*, 15(4), 471-477.
- [25] Bhatia, T. K., Kumar, A., Sharma, M. K. and Appadoo, S. S. (2022). Mehar approach to solve fuzzy linear fractional minimal cost flow problems. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, In Press, DOI: 10.3233/JIFS-212909.
- [26] Mahmoodirad, A., Garg, H., and Niroomand, S. (2020). Solving fuzzy linear fractional set covering problem by a goal programming based solution approach. *Journal of Industrial Management Optimization*.
- [27] Veeramani, C., Sharanya, S. and Ebrahimnejad, A. (2020). Optimization for multi-objective sum of linear and linear fractional programming problem. Fuzzy nonlinear programming approach. *Mathematical Sciences*, 14, 219-233.
- [28] Chauhan, A., Mahajan, S., Ahmad, I., and Al-Homidan, S. (2023). On Fuzzy Linear Fractional Programming Problems via  $\alpha$ -Cut-Based Method with Application in Transportation Sector. *Symmetry*, 15(2), 419.
- [29] Nayak, S., and Maharana, S. (2023). An efficient fuzzy mathematical approach to solve multi-objective fractional programming problem under fuzzy environment. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 1-27.
- [30] Kumar, A., Kaur, J., Singh, P. (2011). A new method for solving fully fuzzy linear programming problems. *Applied Mathematical Modelling*, 35, 817–823.
- [31] Kumar, A., Kaur, A. (2014). Optimal way of selecting cities and conveyances for supplying coal in uncertain environment, *adhana*, 39(1), 165-187.
- [32] Wang, Y. M., Yang, J. B., Xu, D. L., & Chin, K. S. (2006). On the centroids of fuzzy numbers. *Fuzzy sets and systems*, 157(7), 919-926.
- [33] Veeramani, C. and Sumathi, M. (2014). Fuzzy mathematical programming approach for solving fuzzy linear fractional Programming Problems. *RAIRO-Operations research*, 48(1), 109-122.
- [34] Srinivasan, R. (2020). On solving fuzzy linear fractional programming in material aspects. *Materials Today: Proceedings*, 21, 155-157.