مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال دوازدهم، شماره اول (پیاپی ۴۴)، بهار ۹۴، ص ص ۱۲۵-۱۱۳
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

مدل MEA در ارزیابی عملکرد با داده‌های منفی

صدیقه السادات محمدی نسب[۱]، رضا کاظمی متین*[۲]
۱- دانشجو کارشناسی ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج، گروه ریاضی، کرج، ایران
۲- دانشیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج، گروه ریاضی، کرج، ایران

رسید مقاله: ۲۰ مرداد ۱۳۹۳
پذیرش مقاله: ۱۹ اذر ۱۳۹۳

چکیده
مدل‌های اساسی تحلیل پوششی داده‌ها(DEA)، برای داده‌های نامنفی طراحی شده‌اند؛ اما در دنیای واقعی با مسایلی روبرو هستیم که ورودی‌ها و خروجی‌ها می‌توانند منفی باشند. بسیاری از محققین مدل‌هایی برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده با ورودی و خروجی منفی ارایه داده‌اند که ما در این مقاله مدل RDM که و مدل MSBM را بررسی می‌کنیم. در ادامه بحث به بررسی مدل تحلیل کارایی چند جهتی (MEA) با داده‌های منفی می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که مدل MEA در این زمینه دارای خواص مطلوبی است و تحت بازده به مقیاس‌های مختلف قابل استفاده است. همچنین ارتباط اندازه‌ی کارایی این مدل با دو مدل RDM و MSBM بررسی و بر مبنای مدل MSBM، اندازه کارایی جدیدی برای مدل MEA ارایه می‌شود. نتایج اجرای این مدل‌ها روی مجموعه‌ای از داده‌های منفی نیز جهت مقایسه ارایه می‌گردد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی، تابع فاصله‌ای جهت‌دار، MEA، RDM، MSBM.

۱ مقدمه
تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)،یک روش غیر پارامتری مرزی برای اندازه‌گیری کارایی یک مجموعه از واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) و مقایسه‌ی عملکرد این مجموعه ازDMUها است که می‌تواند به موضوعاتی مانند بهره‌وری و ارزیابی کارایی در تجارت و مهندسی و مدیریت بسط وگسترش داده شود. این روش نخستین بار در سال ۱۹۷۸ تحت عنوان مدل CCR توسط چارنز و کوپر و رودز [۱] و به دنبال آن مدل BCC توسط بنکر و چارنز و کوپر [۲] مطرح شد.

در تمام مدل‌های اصلی و کلاسیک DEA فرض مثبت بودن کلیه‌ی مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها در نظر گرفته شده است؛ اما در بسیاری از مسایل واقعی با مواردی روبرو می‌شویم که شرط مثبت بودن ورودی‌ها و خروجی‌ها برقرار نیست و با ورودی‌ها و خروجی‌های منفی سر و کار داریم. از مهم‌ترین روش‌های ارایه شده برای به کارگیری داده‌های منفی می‌توان به روش پیشنهادی سیفورد و زو [۳] اشاره کرد. روش پرکاربرد دیگر

*عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: rkmatin@kiau.ac.ir

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-28]

توسط پورتلا و همکاران[۴] با عنوان مدل RDM معرفی شد. مدل دیگری که بیش‌ترین سهم را در پرداختن به داده‌های منفی تاکنون داشته است روش ارایه شده توسط شارپ [۵] با عنوان MSMB است. هدف ما در این مقاله بررسی چگونگی برخورد مدل ارزیابی کارایی MEA معرفی شده توسط آسمیلد و همکاران [۶] با داده های منفی است.

در ادامه‌ی مطالب این مقاله، در بخش دوم و سوم گذری کوتاه بر مدل های RDM و MSBM خواهیم داشت. در بخش چهارم چگونگی برخورد مدل MEA با داده‌های منفی را توضیح داده و رابطه‌ی میان اندازه‌ی کارایی‌های MEA و RDM و MSBM را نشان داده‌ایم. سپس در بخش پنجم با استفاده از مدل MSBM یک اندازه کارایی جدی بر مبنای مدل MEA برای داده های منفی تعریف کرده‌ایم. در نهایت، هر چهار مدل اشاره شده را روی مجموعه‌ای شامل داده‌های منفی اجرا نموده و نتایج را مقایسه کردیم. بخش آخر به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

۲ مروری کوتاه برمدل RDM و اندازه‌ی کارایی جامع آن

پورتلا و همکاران [۴] مدل RDM را برای به‌کارگیری اعداد منفی در ارزیابی عملکرد معرفی کردند. مدل RDM، عموما تحت فرض VRS و در حضور مجموعه داده‌های منفی، برای اندازه‌گیری کارایی به کار گرفته می‌شود. در این روش برای مجموعه‌ی DMU ها یک نقطه‌ی ایده‌آل تعریف می‌شود که معمولا این نقطه به مجموعه‌ی امکان تولید تعلق ندارد . برای هر واحد ناکارا، ارزیابی کارایی بر حسب موقعیت نسبی آن در قیاس با نقطه‌ی ایده‌آل تعیین می‌شود. نقطه ایده‌آل به صورت $I=\left(\underset{j}{Max}\ y_{rj}\ , r=۱,...,s\ ,\ \ \underset{j}{Min}\ x_{ij}\ ,\ \ i=۱,...,m\right)$ تعریف می‌شود. بردارهای R_{io}^{-} و R_{ro}^{+} که به آن ها دامنه‌ی بهبود گویند به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} R_{io} &= x_{io}-\min_{j}\{x_{ij}\},\ \ i=۱,...,m \\ R_{ro} &= \max_{j}\{y_{rj}\}-y_{ro},\ \ r=۱,...,s \end{aligned} \qquad (۱)$$

بردارهای R_{io} و R_{ro} نامنفی هستند؛ بنابراین همواره بهبود در وضعیت ورودی‌ها و خروجی‌ها به‌دست خواهد آمد. مدل RDM پورتلا و همکاران به‌صورت زیر تعریف می‌شود[۷]:

$$\begin{aligned} Max\quad & \beta_{RDM} \\ s.t.\quad & \sum_{j=۱}^{n}\lambda_j y_{jr}\geq y_{ro}+\beta_{RDM}R_{or}^{+}, && r=۱,...,s, \\ & \sum_{j=۱}^{n}\lambda_j x_{ji}\leq x_{oi}-\beta_{RDM}R_{oi}^{-}, && i=۱,...,m, \\ & \sum_{j=۱}^{n}\lambda_j=۱\ ,\quad \lambda_j\geq ۰, && j=۱,...,n. \end{aligned} \qquad (۲)$$

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-28]

که در این مدل:

$$R_{oi}^{-} = x_{oi} - \underline{x_i}, \qquad i = ۱,...,m,$$
$$R_{or}^{+} = \bar{y}_r - y_{or}, \qquad r = ۱,...,s,$$
$$\underline{x_i} = \min_j \{x_{ji}\}, \qquad i = ۱,...,m,$$
$$\bar{y}_r = \max_j \{y_{jr}\}, \qquad r = ۱,...,s.$$

تصویری که به‌وسیله‌ی بردار جهتی از مدل(۲) تعیین می‌شود امکان دارد به مرز کارای قوی تعلق نداشته باشد و اگر واحدهای کارای ضعیف تحت عنوان شاخص‌ها استفاده شوند، مقدار متغیرهای کمکی (در مقایسه با مرز کارای قوی) از (۲) در حالت کلی به‌دست نمی‌آید.آسمیلد و همکاران[۷] در مقاله‌ی خود با مثالی ساده نشان دادند که مدل RDM نمی‌تواند مقادیر مازاد ورودی‌ها و مقادیر کمبود خروجی‌ها را تشخیص دهد. برای غلبه بر این مشکل و تعیین تصویری که متعلق به مرز قوی باشد آسمیلد و پاستور[۶] با به کارگیری مدل جمعی، مدل فاز دوم برای تشخیص منابع ناکارایی غیرشعاعی به‌صورت زیر پیشنهاد دادند:

$$Max \left(\sum_{j=۱}^{m} \frac{\tau_{oi}^{-}}{R_{oi}^{-}} + \sum_{r=۱}^{s} \frac{\tau_{or}^{+}}{R_{or}^{+}} \right)$$

$$s.t.$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_{jr} - \tau_{or}^{+} = y_{or} + \beta_{RDM}^{*} R_{or}^{+}, && r = ۱,...,s, \\
&\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_{ji} + \tau_{oi}^{-} = x_{oi} - \beta_{RDM}^{*} R_{oi}^{-}, && i = ۱,...,m, \\
&\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j = ۱, \\
&\lambda_j \geq ۰, && j = ۱,...,n.
\end{aligned} \qquad (۳)$$

که β_{RDM}^{*} جواب بهینه‌ی مدل (۲) برای $(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o)$است. فرض کنید τ_{oi}^{-*} و τ_{or}^{+*} جواب بهینه‌ی متغیرهای کمکی ورودی و خروجی از مدل (۳) باشند، مختصات تصویر به‌دست آمده $(\boldsymbol{x}_0^{*}, \boldsymbol{y}_0^{*})$از مدل (۳) برابر است با:

$$x_{oi}^{*} = x_{oi} - \beta_{RDM}^{*} R_{oi}^{-} - \tau_{oi}^{-*}, \qquad i = ۱,...,m,$$
$$y_{or}^{*} = y_{or} + \beta_{RDM}^{*} R_{or}^{+} + \tau_{or}^{+*}, \qquad r = ۱,...,s.$$

محدوده‌ی بهبود را برای تصویرهای جدید به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R_{or}^{+*} = \bar{y}_r - y_{or}^{*} \qquad r = ۱,...,s,$$
$$R_{oi}^{-*} = x_{oi}^{*} - \underline{x_i} \qquad i = ۱,...,m.$$

و اندازه‌ی کارای جامع ارایه شده برای مدلRDM عبارت است از:

که به آسانی می‌توان $\bar{\Gamma}_{RDM}^{*}$را تجزیه کرد و به‌صورت زیر نوشت:

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-28]

$$\ddot{\Gamma}^{*}_{RDM} = \frac{1}{m+s}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{R_{oi}^{-*}}{R_{oi}^{-}}+\sum_{r=1}^{s}\frac{R_{or}^{+*}}{R_{oi}^{+}}\right) \quad (۴)$$

$$\ddot{\Gamma}^{*}_{RDM} = \left(1-\beta^{*}_{RDM}\right)-\frac{1}{m+s}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\tau_{oi}^{-*}}{R_{oi}^{-}}+\sum_{r=1}^{s}\frac{\tau_{or}^{+*}}{R_{or}^{+}}\right) \quad (۵)$$

در واقع $\ddot{\Gamma}^{*}_{RDM}$ براساس مقادیر بهینه‌ی مدل RDM و مقادیر بهینه‌ی مدل فاز دوم نوشته شده است. واضح است که تا زمانی که هیچ مقدار کمبودی در خروجی‌ها و یا مازادی در ورودی‌ها موجود نباشد، مقدار اندازه‌ی کارایی جامع $\ddot{\Gamma}^{*}_{RDM}$ با اندازه‌ی کارایی RDM برابر خواهد بود. در غیر این صورت این دو مقدار یکسان نخواهد بود و در نتیجه اندازه‌ی کارایی جامع $\ddot{\Gamma}^{*}_{RDM}$ توانایی تشخیص منابع بیش‌تری از ناکارایی را دارد.

۲-۱ برخی خواص اندازه‌ی کارایی جامع RDM

i- $0 \le \ddot{\Gamma}^{*}_{RDM} \le 1$.

ii- اندازه کارای جامع RDM تحت انتقال پایا است.

iii- اندازه کارای جامع RDM تحت واحد پایا است.

۳ مروری کوتاه بر مدل MSBM

شارپ با قراردادن جهت‌های بهبود معرفی‌شده‌ی (R_{io}^{-}, R_{ro}^{+}) در مدل RDM، به جای خود مقادیر مشاهدات، در تابع هدف مدل SBM تعدیلی ایجاد نمود به‌طوری‌که برای داده‌های منفی مناسب باشد. این مدل جدید به MSBM معروف است که به‌صورت زیر قابل بیان است[۵]:

$$Min \quad \rho = \frac{1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{w_i s_i^{-}}{R_{io}^{-}}}{1+\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{v_r s_r^{+}}{R_{ro}^{+}}}$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} - s_i^{-} = x_{io}, \quad (۶)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} + s_r^{+} = y_{ro},$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{m} w_i = 1, \qquad \sum_{r=1}^{s} v_r = 1, \qquad v_i, w_r, \lambda_j, s_i^{-}, s_r^{+} \ge 0.$$

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-28]

که در آن w_i و v_r وزن‌هایی هستند که از قبل توسط تصمیم‌گیرنده‌ی (DM) معین می‌شوند و فرض بر این است جایی که R_{oi}^- و R_{ro}^+ صفر هستند عبارت $\frac{w_i s_i^-}{R_{io}^-}$ و $\frac{v_r s_r^+}{R_{ro}^+}$ از صورت و مخرج حذف می‌شود.

۳-۱خواص اندازه‌ی کارایی مدل MSBM

i- $0 \le \rho^* \le 1$

ii- از آنجایی که مدل جمعی نسبت به انتقال پایا است [۸] و دامنه‌ی (R_{io}^-, R_{ro}^+) نیز نسبت به انتقال پایا است، پس می‌توان نتیجه گرفت که مدل MSBM نسبت به انتقال پایاست.

۳-۲ رابطه‌ی اندازه‌ی کارایی مدل MSBM و مدلRDM

قضیه‌ی ۱) اندازه‌ی کارایی جامع مدلRDM، بزرگ‌تر از ρ^* است.

اثبات : با توجه به محدودیت های مدل RDM داریم:

$$\begin{aligned} s_i^- &= \beta_{RDM}^* R_{oi}^- + \tau_i^{-*} \\ s_r^+ &= \beta_{RDM}^* R_{or}^+ + \tau_r^{+*} \end{aligned} \qquad (I)$$

باقراردادن (I)در تابع هدف مدل MSBM داریم:

$$\frac{1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{w_i s_i^-}{R_{io}^-}}{1+\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{v_r s_r^+}{R_{ro}^+}} = \frac{1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{w_i(\beta^* R_{io}^- + \tau_{io}^{-*})}{R_{io}^-}}{1+\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{v_r(\beta^* R_{ro}^+ + \tau_{ro}^{+*})}{R_{ro}^+}} \le 1-\sum_{i=1}^{m} w_i \beta^* \le 1-\beta^*$$

حالتی را در نظر بگیرید که مقدار متغیرهای کمکی τ_r^+ و τ_i^- هر دو صفر است و واحد مورد نظر متعلق به مرز قوی است، این قضیه ثابت می‌کند که مدل MSBM منابع ناکارایی بیش‌تری را نسبت به مدل RDM تشخیص می‌دهد.

٤ مدل MEA وداده‌های منفی

آسمیلد و همکاران[۷] بر مبنای شاخص کارایی بهبود پتانسیل بوگتفت و هوگارد [۹] روش جدید ناپارامتری مرزی با عنوان تحلیل کارایی چند جهتی(MEA) را برای محاسبه‌ی کارایی واحدهای تصمیم‌گیری معرفی نمودند که مزایای زیادی نسبت به روش رایج تحلیل پوششی داده‌ها دارد.

از نظر بوگتفت ارزیابی کارایی واحدها شامل دو مساله است: یکی انتخاب یک الگوی مرجع مناسب که بتوان واحد تحت بررسی را با آن مقایسه کرد و دیگری اندازه‌گیری عملکرد متغیر کمکی (اندازه‌گیری کارایی ترکیبی واحد تحت بررسی). در مدل‌های کلاسیک DEA مانند CCR و BBC این دو مساله به‌صورت ترکیبی از حل یک مدل ریاضی یکسان به‌دست می‌آید. بوگتفت و هوگارد در مقاله خود به جنبه های تئوری این جداسازی

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-28]

و مزیت های آن پرداختند. آنان روشی جدید بر مبنای بهبودهای پتانسیل ارایه دادند.آسمیلد و همکاران[۷] در مقاله‌ی خود شاخص ناکارایی بهبود پتانسیل را دوباره بررسی و مدلی در چارچوب مدل های DEA، برای آن ارایه کردند. این روش به دلیل توانایی در محاسبه‌ی مجزای بهبود پتانسیل هریک از ورودی‌ها یا خروجی‌ها، می‌تواند اندازه‌ی قابل قبولی از عملکرد واحدها ارایه دهد. آسمیلد و پاستور [۶] با مثالی در مقاله‌ی خود نشان دادند که تصویر به‌دست آمده همواره به مرز کارای قوی تعلق ندارد در نتیجه اندازه‌ی کارا به‌دست آمده توسط MEA ضرورتا اندازه‌ی کارای جامع نیست و برای غلبه بر این مشکل، استفاده از مدل های فاز دوم را پیشنهاد دادند و یک اندازه‌ی کارای جامع جدیدی برای مدل MEAتعریف کردند. در مدل MEA برای هر واحد به طور جداگانه یک نقطه‌ی ایده‌آل تعریف می‌شود. در اینجا مدل MEA را تحت فرض VRS و در حالتی که جهت‌گرا نباشد بررسی می‌کنیم. حالتی که به طور همزمان کاهش در تمام ورودی‌ها و افزایش در تمام خروجی‌ها را در نظر می‌گیریم.

نقطه‌ی ایده‌آل MEA با استفاده از تابع فاصله‌ای جهت‌دار با در نظر گرفتن مولفه‌های ورودی $x_i^*(x_0, y_0)$، $i = ۱,...,m$ و مولفه‌های خروجی $y_r^*(x_0, y_0)$، $r = ۱,...,s$ با حل مساله برنامه‌ریزی خطی زیر به ترتیب برای ورودی‌ها و خروجی‌ها به‌دست می‌آید[۶].

$$x_i^*(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o) = \min_{\lambda, d^i} d^i$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_{ji} \le d^i, \\ & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_{jr} \ge y_{or}, \qquad r = ۱,...,s, \\ & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_{j(-i)} \le x_{o(-i)}, \qquad -i = 1,...,i-1,i+1,...,m, \\ & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j = ۱, \qquad \lambda \ge ۰, \qquad j = ۱,...,n. \end{aligned} \tag{۷}$$

در مدل (۷) با فرض امکان پذیری خروجی برای هر بعد ورودی، یک حداقل مقدار ممکن پیدا می‌شود. مدل (۷) باید به تعداد ورودی‌ها برای هر واحد اجرا شود.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-28]

$$
\begin{aligned}
& y_r^*(x_o, y_o) = Max_{\lambda, d^r}\, d^r \\
& s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{jr} \geq d^r, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ji} \leq x_{oi}, \qquad i = 1,\ldots,m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{j(-r)} \geq y_{o(-r)}, \qquad -r = 1,\ldots,r-1,r+1,\ldots,s, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \qquad \lambda \geq 0, \qquad j = 1,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{۸}
$$

مدل (۸) برای هر بعد خروجی یک حداکثر مقدار ممکن پیدا می‌کند. این مدل نیز باید به تعداد خروجی‌ها برای هر واحد اجرا شود.

با نقطه‌ی ایده‌آل به‌دست آمده از (۷) و (۸) مدل تحلیل کارایی جهتی VRS-MEA به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$
\begin{aligned}
& Max_{\lambda, \beta}\ \beta_{MEA} \\
& s.t. \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ji} \leq x_{oi} - \beta_{MEA}\left(x_{oi} - x_i^*(x_o, y_o)\right), \qquad i = 1,\ldots,m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{jr} \geq y_{or} + \beta_{MEA}\left(y_r^*(x_o, y_o) - y_{or}\right), \qquad r = 1,\ldots,s, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \qquad j = 1,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{۹}
$$

ما به مدل MEA با عنوان یک مدل کارای جهتی رجوع می‌کنیم؛ ولی این مدل ناکارایی‌را تحت مضربی از بردار جهتی $\boldsymbol{g}_o^{MEA} = \left(\boldsymbol{g}_o^{MEA-}, \boldsymbol{g}_o^{MEA+}\right) = \left(\boldsymbol{x}_o - \boldsymbol{x}^*(x_o, y_o), \boldsymbol{y}^*(x_o, y_o) - \boldsymbol{y}_o\right)$ اندازه‌گیری می‌کند. اگر β_{MEA}^* نشان‌دهنده‌ی مقدار بهینه‌ی مدل(۹) باشد، ناکارایی جهتی دقیقا $\beta_{MEA}^* \boldsymbol{g}_o^{MEA}$ است و تصویر به‌دست آمده شامل متغیرهای کمکی ناصفر است؛ بنابراین، نیاز است که دوباره از مدل فاز دوم ارایه‌شده در (۳) استفاده شود، البته با جایگزینی بردار جهتی RDM با $\boldsymbol{g}_o^{MEA}$:

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-28]

$$Max \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\tau_{oi}^{-}}{R_{oi}^{-}} + \sum_{r=1}^{s} \frac{\tau_{or}^{+}}{R_{or}^{+}} \right)$$

$$s.t.$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ji} + \tau_{oi}^{-} = x_{oi} - \beta_{MEA}^{*} \boldsymbol{g}_{oi}^{MEA-}, && i = 1,...,m, \\ &\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{jr} - \tau_{or}^{+} = y_{or} + \beta_{MEA}^{*} \boldsymbol{g}_{or}^{MEA+}, && r = 1,...,s, \\ &\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, && j = 1,...,n. \end{aligned} \qquad (10)$$

مختصات نقاط به‌دست‌آمده از (۱۰) به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} x_{oi}^{*} &= x_{oi} - \beta_{o}^{*} \boldsymbol{g}_{oi}^{MEA} - \tau_{oi}^{-*}, && i = 1,...,m, \\ y_{or}^{*} &= y_{or} + \beta_{o}^{*} \boldsymbol{g}_{or}^{MEA} + \tau_{or}^{+*}, && r = 1,...,s. \end{aligned} \qquad (11)$$

اکنون با استفاده از β^{*} و برای مدل VRS-MEA یک اندازه‌ی کارای جامع تعریف می‌کنیم که دقیقا مشابه آن است که برای مدل RDM به‌دست‌آمد. با این تفاوت که R_{or}^{+*} و R_{oi}^{-*} در MEA نسبت به تصویرهای (۱۱) تعریف شده است.

$$\vec{\Gamma}_{MEA}^{*} = \frac{1}{m+s} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{R_{oi}^{-*}}{R_{oi}^{-}} + \sum_{r=1}^{s} \frac{R_{or}^{+*}}{R_{oi}^{+}} \right) \qquad (12)$$

پس از تجزیه‌ی $\vec{\Gamma}_{RDM}^{*}$ خواهیم داشت:

$$\vec{\Gamma}_{MEA}^{*} = 1 - k_o \beta_{MEA}^{*} - \frac{1}{m+s} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\tau_{oi}^{-*}}{R_{oi}^{-}} + \sum_{r=1}^{s} \frac{\tau_{or}^{+*}}{R_{or}^{+}} \right) \qquad (13)$$

که در آن k_o عبارت است از:

$$k_o = \frac{1}{m+s} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\boldsymbol{g}_{oi}^{MEA-}}{R_{oi}^{-}} + \sum_{r=1}^{s} \frac{\boldsymbol{g}_{or}^{MEA+}}{R_{or}^{+}} \right)$$

توجه داریم که $k_o \leq 1$ کران بالای مؤلفه‌های بردار جهتی $\boldsymbol{g}_{o}^{MEA}$ است و مقدار k_o وابسته به DMU_o است.

٤-١ برخی خصوصیات اندازه‌ی کارای جامع VRS-MEA

i- $0 \leq \vec{\Gamma}_{MEA}^{*} \leq 1$.

ii- اگر $k_o = 1$، آن‌گاه تجزیه‌های RDM و MEA یکسان می‌شود و می‌توان نتیجه گرفت که مدل VRA-MEA منابع ناکارایی بیش‌تری را نسبت به مدل RDM شناسایی می‌کند.

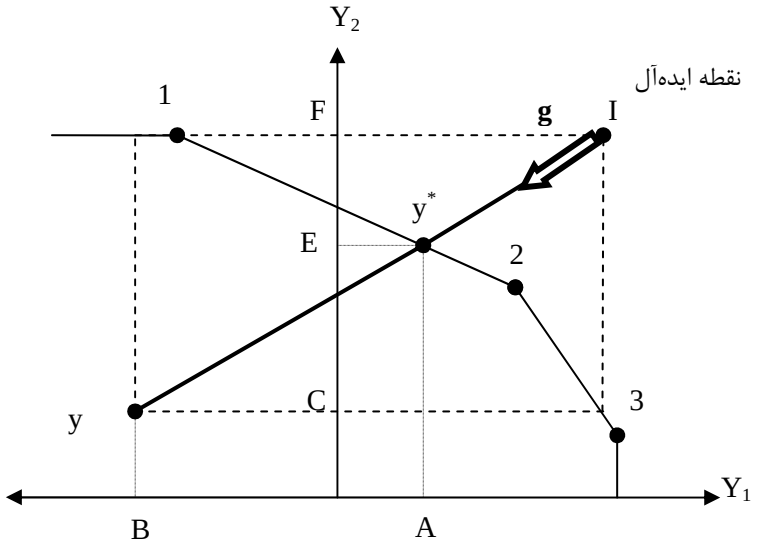
[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-28]

iii- اگر و فقط اگر در مدل فاز دوم (۱۰) تمام متغیرهای کمکی مدل مساوی $\vec{\Gamma}^*_{MEA} = 1 - k_o \beta^*_{MEA}$ صفر باشد. اگر $k_o = 1$ باشد مدل (۱۳) با اندازه‌ی کارایی RDM (۳) بدون متغیر کمکی متناظر است.

iv- اندازه کارای تعریف شده در MEA نسبت به واحد و انتقال پایا است. می‌دانیم که پایایی تحت واحد یک خاصیتی اقتصادی است و پایایی تحت انتقال حوزه‌ی کاربرد این مدل را افزایش می‌دهد، به‌طور مثال بررسی مجموعه‌ی داده‌های منفی را ممکن می‌سازد.

در این مقاله قصد داریم که اندازه‌ی کارایی جامع مدل VRS-MEA را روی داده‌های منفی اجرا کنیم و نتایج را با مدل‌های MSBM و RDM مقایسه کنیم. ابتدا با مثالی ساده به کارگیری مدل MEA با داده‌های منفی را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱) شکل (۱) واحد ناکارای (y) را در حالت دو خروجی و ورودی ثابت نشان می‌دهد. نقطه‌ی ایده‌آل که حداکثر افزایش در هر یک از خروجی‌ها به‌طور مجزا را محاسبه می‌کند، با I در شکل مشخص شده‌است. در این مثال تمام ورودی‌ها برابرند پس نقطه‌ی ایده‌آل دارای حداکثر افزایشی ممکن در هر بعد از خروجی است. تصویر به‌دست آمده روی مرز کارایی با استفاده از نقطه‌ی ایده‌آل تحت مضربی از بردار جهتی **g** به‌دست می‌آید.



شکل ۱. مدل MEA در حضور داده‌های منفی، حالت دو خروجی و ورودی ثابت

با توجه به شکل، اندازه‌ی کارایی به‌دست‌آمده با توجه به نقطه‌ی ایده‌آل برابر است با $\frac{FE}{FC}$ یا $\frac{DA}{DB}$. واضح است که اگر از مدل‌های کلاسیک مانند BCC استفاده می‌کردیم Y_1 در جهت منفی توسعه داده می‌شد.

مدل MEA حداکثر بهبود ممکن را برای هر مولفه ورودی یا خروجی به‌طور مجزا محاسبه می کند. این بهبود در جهت بردار **g** است. بردار **g** تضمین می‌کند که بهبود حاصل هیچ‌گاه منفی نباشد. تصویر واحد ناکارای (y) روی مرز ناکارایی عبارت است از $y^* = y + \beta^* (I - y)$.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-28]

توجه داریم که بردار جهت $\mathbf{g}^{PI}$ یک بردار متناظر با I-$\mathbf{y}$ است و برای هر واحد به‌طور جداگانه محاسبه می‌شود. در این رابطه β نشان‌دهنده‌ی بردار کمبود خروجی هاست که معادل تعداد دفعاتی است که بردار ورودی y کم‌تر از آنچه لازم بوده، استفاده شده است؛ بنابراین، مقدار بزرگ‌تر β نشان دهنده‌ی شاخص ناکارایی بزرگ‌تر خواهد بود. واضح است هرگاه $y=I$ باشد، مقدار کمبود خروجی‌ها صفر بوده و $y^*=I$ خواهد شد. مقدار بهینه β از $Max\{\beta \in \mathbb{R}_+ \mid (\mathbf{y}+\beta\mathbf{g}) \in L\}$ به‌دست می‌آید که در این رابطه $\mathbf{g}$ جهت نقطه مرجع است و متناسب با I-$\mathbf{y}$ است. همچنین میزان شاخص ناکارایی بهبود پتانسیل برای واحد ناکارای (y) برابر است با $E = \sum_{r=1}^{s}(y_r^* - y_r)$. در مجموع مدل ریاضی ارایه شده در بخش چهار توانایی کار با داده‌های منفی را دارد و تمام ویژگی های خود را در حضور داده‌های منفی حفظ می‌کند. مدل تحلیل کارایی چند جهتی (MEA) ظرفیت کاهش ورودی و افزایش خروجی را در هر بعد برای هر واحد به طور جداگانه محاسبه می‌کند و سپس بر اساس آن یک شاخص متناسب با آن ارایه می‌دهد. این مدل در هر تکنولوژی قابل استفاده است و توانایی تشخیص منابع بیش‌تری از ناکارایی را نسبت به مدل‌های کلاسیک DEA دارد. در این مدل برخلاف مدل‌های کلاسیک DEA مساله‌ی انتخاب شاخص از مساله‌ی اندازه‌ی کارایی جدا است.

٤-٢ رابطه‌ی اندازه‌ی کارایی مدل MSBM و مدل VRS-MEA

قضیه ٢) $\rho^*_{MSBM} \le \ddot{\Gamma}^*_{MEA}$.

اثبات: با توجه به محدودیت‌های مدل MEA داریم:

$$\begin{aligned}
&x^*_{oi} = x_{oi} - \beta^*_o g^{MEA}_{oi} - \tau^{-*}_{oi} && i = 1,\dots,m \\
&y^*_{or} = y_{or} + \beta^*_o g^{MEA}_{or} + \tau^{+*}_{or} && r = 1,\dots,s \\
&s^- = \beta^*_o g^{MEA}_{oi} + \tau^{-*}_{oi} \\
&s^+ = \beta^*_o g^{MEA}_{or} + \tau^{+*}_{or}
\end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

با جایگذاری (I) در تابع هدف مدل MSBM خواهیم‌داشت:

$$\rho^* = \frac{1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{w_i s_i^-}{R_{io}^-}}{1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{v_r s_r^+}{R_{ro}^+}} = \frac{1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{w_i (\beta^*_{MEA} g_{io}^- + \tau_{io}^{-*})}{R_{io}^-}}{1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{v_r (\beta^*_{MEA} g_{ro}^+ + \tau_{ro}^{+*})}{R_{ro}^+}} \le \frac{1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{w_i \left(\beta^*_{MEA} g_{io}^-\right)}{R_{io}^-}}{1 + \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\frac{v_r \left(\beta^*_{MEA} g_{ro}^+\right)}{R_{ro}^+}}$$

همچنین $\ddot{\Gamma}^*_{MEA} \le 1 - \frac{1}{m+s}\beta^*_{MEA}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\mathbf{g}_{io}^-}{R_{io}^-} + \sum_{r=1}^{s}\frac{\mathbf{g}_{ro}^+}{R_{ro}^+}\right) \le 1 - \frac{1}{m+s}\sum_{i=1}^{s}\frac{\beta^*_{MEA}\mathbf{g}_{io}^-}{R_{io}^-}$ و داریم

$\ddot{\Gamma}^*_{MEA} \le 1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{s}\frac{\beta^*_{MEA}\mathbf{g}_{io}^-}{R_{io}^-}$، در نتیجه $\rho^*_{MSBM} \le \ddot{\Gamma}^*_{MEA}$.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-28]

این قضیه نشان می‌دهد که مدل MSBM منابع ناکارایی بیش‌تری را نسبت به مدل MEA شناسایی می‌کند.

۵ اندازه‌ی کارایی جدیدی برای مدل MEA بر اساس مدل MSBM

با استفاده از مدلMSBM می‌توان اندازه کارایی جامع جدیدی برای مدل MEA تعریف کرد به طوری که بعد از حل مدل‌های (۷) و (۸) و (۹) مدل زیر را استفاده کنیم که امکان محاسبه‌ی متغیرهای کمکی رادارد و عدد کارایی فراهم می کند:

$$\rho^*_{MEA} = \text{Min} \frac{1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{(\beta^*_{MEA} \boldsymbol{g}^-_{io} + \tau^-_{io})}{R^-_{io}}}{1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \frac{(\beta^*_{MEA} \boldsymbol{g}^+_{ro} + \tau^+_{ro})}{R^+_{ro}}}$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{jr} - \tau^+_{or} = y_{or} + \beta^*_{MEA} \boldsymbol{g}^{MEA+}_{or}, \qquad r = 1,...,s, \tag{۱۴}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ji} + \tau^-_{oi} = x_{oi} - \beta^*_{MEA} \boldsymbol{g}^{MEA-}_{oi}, \qquad i = 1,...,m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \qquad j = 1,...,n.$$

اگر $x^*_{oi} = x_{oi} = \underline{x_i}$ در این صورت، جمله $\frac{\beta^*_o \boldsymbol{g}^{MEA}_{oi} + \tau^{-*}_{oi}}{R^-_{io}}$ از تابع هدف حذف می‌گردد. به طور مشابه در مورد خروجی‌ها نیز چنین است.

این مدل همزمان ناکارایی ترکیبی و امتیاز کارایی را محاسبه می‌کند و نسبت به انتقال و واحد پایا است؛ ولی تمام ویژگی‌های اندازه‌ی کارایی (۱۳) را دارا نیست. همچنین این مدل چون بر مبنای مدل MSBM نوشته شده است توانائی کار با داده‌های منفی را داراست. مزیت اصلی این مدل نسبت به MEA سادگی کاربرد و محاسبات آن است.

٦ مثال کاربردی

برای توضیح نتایج اخیر، عملکرد مدل MEA را روی داده‌های مربوط به یک سیستم تصفیه‌ی فاضلاب پیاده سازی نمودیم. این مجموعه داده‌ها در مقاله‌ی شارپ استفاده شده است [۵].

در این ارزیابی دو ورودی و سه خروجی درنظرگرفته شده است، خروجی‌هاو ورودی‌ها مقادیر مثبت و منفی اختیار کرده‌اند. داده‌های مثال در جدول ۱ قابل مشاهده است. نتایج ارزیابی کارایی مدل‌های RDM و VRS-MEA و MSBM و ρ^*_{MEA} در جدول ۲ نشان داده شده است. این جدول نشان می‌دهد که مدل MEA درحضوراعداد منفی نیز عدد کارایی قابل قبولی را ارایه می‌دهد. باتوجه به جدول ۲ هرچهار مدل در تشخیص

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-28]

واحدهای کارا و ناکارا یکسان عمل کرده‌اند. همچنین اندازه‌ی کارایی مدل MEA را کوچک‌تر از اندازه کارایی مدل RDM وبزرگ‌تر از اندازه‌ی کارایی مدل MSBM نشان می‌دهد.

جدول ۱. داده‌های سیستم تصفیه‌ی فاضلاب

DMU	هزینه I_1	لجن فاضلاب I_2	الکتریسیته‌ی خارج شده O_1	دی اکسید کربن O_2	متان O_3
۱	۱/۰۳	−۰/۰۵	۰/۵۶	−۰/۰۹	−۰/۴۴
۲	۱/۷۵	−۰/۱۷	۰/۷۴	−۰/۲۴	−۰/۳۱
۳	۱/۴۴	−۰/۵۶	۱/۳۷	−۰/۳۵	−۰/۲۱
۴	۱/۳۰	−۰/۰۷	۰/۴۹	−۱/۰۸	−۰/۳۴
۵	۱/۹۸	−۰/۱۰	۱/۶۱	−۰/۴۴	−۰/۳۴
۶	۰/۹۷	−۰/۱۷	۰/۸۲	−۰/۰۸	−۰/۴۳
۷	۹/۸۲	−۲/۳۲	۵/۶۱	−۱/۴۲	−۱/۹۴
۸	۱/۲۹	−۰/۱۱	۰/۵۷	۰	−۰/۲۴
۹	۲/۳۸	−۰/۲۵	۰/۵۷	−۰/۶۷	−۰/۴۳
۱۰	۱۰/۳۰	−۰/۱۶	۹/۵۶	−۰/۵۸	۰/۰۰

جدول ۲. نتیجه مدل MSBM و مدل RDM و مدل MEA

DMU	ρ^*_{MSBM}	β^*_{RDM}	$\vec{\Gamma}^*_{RDM}$	β^*_{MEA}	$\vec{\Gamma}^*_{MEA}$	ρ^*_{MEA}
۱	۰/۴۴۹	۰/۰۳۵۱۰۱	۰/۹۶۰۷۱۱	۰/۰۲۱۴۷۷	۰/۴۷۹۱۳۴	۰/۸۵۱۷۰۹
۲	۰/۵۰۹	۰/۰۸۱۸۶۲	۰/۹۱۸۱۲۶	۰/۰۵۵۷۸۸	۰/۸۸۳۴۴۱	۰/۸۱۱۴۵۶
۳	۱	۰	۱	۰	۱	۱
۴	۰/۵۳۷	۰/۰۷۵۷۳۶	۰/۷۵۴۵۴۰	۰/۰۶۷۴۳۶	۰/۷۲۹۳۰۰	۰/۶۷۸۸۳۸
۵	۰/۶۳۵	۰/۰۲۵۹۰۷	۰/۸۲۵۵۲۹	۰/۰۹۳۵۳۸	۰/۷۲۶۵۷۹	۰/۷۳۶۰۴۳
۶	۱	۰	۱	۰	۱	۱
۷	۱	۰	۱	۰	۱	۱
۸	۱	۰	۱	۰	۱	۱
۹	۰/۴۰۶	۰/۱۵۵۱۶۵	۰/۷۳۰۲۵۱	۰/۱۷۵۲۰۹	۰/۸۵۰۷۹۷	۰/۶۰۴۰۹۹
۱۰	۱	۰	۱	۰	۱	۱

۷ نتیجه‌گیری

مدل MEA برای اندازه‌گیری کارایی معرفی شد. مزیت این مدل نسبت به دو مدل RDM و MSBM این است که در تکنولوژی با هربازده به مقیاسی چه ثابت و چه متغیر قابل اجرا است. همچنین در این مدل مساله‌ی انتخاب شاخص و اندازه‌ی کارایی از هم جداست. نشان دادیم این مدل با داده‌های منفی هم عدد کارایی قابل قبولی ارایه می‌دهد و نیز ویژگی‌های مطلوب آن حفظ می‌شود. همچنین اندازه‌ی کارایی جدیدی بر اساس مدل MSBM معرفی کردیم که در به کارگیری داده‌های منفی عدد کارایی قابل قبولی می‌دهد. از نظر جایگاه تشخیص ناکارایی، مدل MEA همواره بین مدل‌های RDM و MSBM قرار می‌گیرد.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-28]

منابع

[1] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 2(6), 429–44.

[2] Banker, R. D., Charnes, R. F., Cooper, W. W., (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. Management Science, 30(9), 1078–92.

[3] Seiford, L. M., Zhu, J., (2002). Modeling undesirable factors in efficiency evaluation. European Journal of Operational Research, 142(1), 16–20.

[4] Portela, S., Thanassoulis, E., Simpson, G., (2006). Negative Data in DEA: A Directional Distance Function Approach to Bank Branches. Journal of Operations Research Society, 55, 1111-1121.

[5] Sharp, J. A., Meng, W., Liu, W., (2007). A modified slack-based measure Model for data envelopment analysis with natural negative outputs and inputs. Journal of Operations Research Society, 58, 1672–1677.

[6] Asmild, M., Pastor, J. T., (2010). Slack free MEA and RDM with comprehensive efficiency measures. OMEGA, 475-483.

[7] Asmild, M., Hougaard, J. L., Kronborg, D., Kvist, H. K., (2003). Measuring inefficiency via potential improvements. Journal of Productivity Analysis, 19(1), 59–76.

[8] Ali, A. I., Seiford, L. M., (1990). Translation invariance in data envelopment research letters; 9, 403-405.

[9] Bogetoft, P., Hougaard, J. L., (1999). Efficiency evaluations based on potential (non-proportional) improvements. Journal of Productivity Analysis, 12(3), 233–47.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-28]