

یک روش عددی مبتنی بر روش پاسکولتی - سرافینی برای تعیین مرز بهینه پارتو در مسایل بهینه سازی چندهدفه

آرمین قانع کنفی^۱، اسماعیل خرم^{۲*}

۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج، گروه ریاضی، کرج، ایران.

۲- دانشیار، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، تهران، ایران.

رسید مقاله: ۱ اردیبهشت ۱۳۹۶

پذیرش مقاله: ۴ مهر ۱۳۹۶

چکیده

یکی از مهمترین کاربردهای علوم ریاضی در صنعت و مهندسی، تعیین مجموعه‌ای از نقاط بهینه پارتو در مسایل بهینه سازی چندهدفه در حضور دست کم دو تابع هدف نامتناسب و متضاد است. در این مقاله، یک روش عددی مبتنی بر روش پاسکولتی - سرافینی به منظور تعیین تقریبی از مرز بهینه پارتو در مسایل بهینه سازی چندهدفه ارائه می شود. ارتباط بین جواب های بهینه ی مساله ی بهینه سازی کمی شده و نقاط غیر مغلوب مساله ی بهینه سازی چندهدفه را با استفاده از چندقضیه نشان می دهیم و در بخش شبیه سازی های عددی مقایسه ای از کارایی و اعتبار روش پیشنهادی با روش های محدودیت نرمال و روش اشتراک مرزی نرمال اصلاح شده را در قالب دو مساله ی نمونه ای معروف که دارای مرز بهینه پارتو نامحدب و گسسته هستند، می آوریم.

کلمات کلیدی: بهینه سازی چندهدفه، مرز پارتو، کمی سازی پاسکولتی - سرافینی، بهینه سازی غیرخطی و نامحدب.

۱ مقدمه

در حوزه ی بهینه سازی اغلب با مسایلی مواجه هستیم که دارای چندین تابع هدف غیرخطی و متعارض با یکدیگر هستند [۱-۵]. در این نوع مسایل، تصمیمات بهینه نیازمند ارائه بدهستان های متفاوت بین اهداف گوناگون است. برای مثال در خط تولید یک کارخانه، کم کردن مدت زمان فرآیند تولید یک محصول، افزایش کیفیت محصول خروجی و کاهش استهلاک تولید تحت یک سری محدودیت های خاص، نمونه ای از یک مساله ی بهینه سازی سه هدفه است که اولاً مقیاس توابع هدف متفاوت از یکدیگر بوده و ثانیاً جواب بهینه ی آن ها منطبق بر یکدیگر نمی باشند. در این حالت با مجموعه ای از بدهستان ها مابین توابع هدف مواجه هستیم که شامل بهترین انتخاب های توابع هدف فردی و تمام حالت های بینابین می شود. این مجموعه را مجموعه ی بهینه پارتو می نامیم. این مجموعه

* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: eskhor@aut.ac.ir

در حالت کلی نامعلوم است و از آنجایی که عموماً یک رابطه‌ی غیرخطی بین مجموعه‌ی شدنی در فضای تصمیم و مجموعه‌ی شدنی در فضای معیار برقرار است، به‌دست آوردن یک نگاشت روی آن بسیار پیچیده یا معمولاً غیرممکن است. تمام روش‌های بهینه‌سازی چندهدفه (MOP) در جستجوی راه‌هایی هستند که بتوانند این مجموعه را بهتر توصیف نمایند. اگر چه تولید کل این مجموعه (سطح بهینه پارتو) به دلیل هزینه‌های محاسباتی مقرون به‌صرفه نیست؛ بنابراین روش‌هایی قابل پذیرش خواهند بود که قادر به تولید نقاط بهینه پارتو با توزیع یکنواخت و در سرتاسر سطح بهینه پارتو (و نه بخشی از آن) باشند و توصیف بهتری از مرز بهینه پارتو واقعی را ارائه دهند. اگر چه در این بین نیز کاهش تعداد ارزیابی‌های تابع نیز دارای اهمیت است.

حوزه‌ی مربوط به تصمیم‌گیری‌های چندمعیاره (MCDM) به سرعت در حال رشد می‌باشد که در کارهای محققین در این چنددهه اخیر به‌خوبی نمایان است [۶-۱۲]. محققین معمولاً مسایل در حوزه‌ی بهینه‌سازی چندهدفه را از جهات مختلف مورد مطالعه قرار می‌دهند و در نتیجه رویکردهای متفاوت و اهداف گوناگونی پیرامون آن وجود دارد. یک رویکرد ممکن است یافتن یک مجموعه از جواب‌های بهینه پارتو و/یا تعیین مقدار بده‌بستان که در اهداف مختلف صدق می‌نماید و/یا یافتن یک جواب باشد که خواسته‌های تصمیم‌گیرنده را برآورده سازد.

برخی از روش‌ها، مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه را به یک مساله‌ی بهینه‌سازی یک‌هدفه پارامتری (SOP) تبدیل می‌نمایند [۱۳]. چنین مساله‌ای را یک مساله‌ی بهینه‌سازی کمی‌شده می‌نامند. اگر کمی‌سازی به دقت انجام پذیرد، بهینگی پارتو جواب‌های به‌دست آمده از آن تضمین خواهد شد [۱۳].

روش‌های حل مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه به چهار کلاس تقسیم می‌شوند [۱۳] که عبارتند از:

۱. روش‌های بدون اطلاعات ارجحیت که از تصمیم‌گیرنده استفاده نمی‌شود.

۲. روش‌های پیشینی

۳. روش‌های پسینی

۴. روش‌های تعاملی

در روش‌هایی که تصمیم‌گیرنده در دسترس نیست، طبیعتاً جواب‌های توافقی بدون اطلاعات ارجحیت به‌دست می‌آیند. در این روش‌ها، تمام توابع هدف بدون آن که نظر تصمیم‌گیرنده تاثیر داشته باشد در درون یک تابع هدف جمع می‌شوند. سپس یک مساله‌ی بهینه‌سازی کمی‌شده حل شده و جواب بهینه ارائه می‌گردد که تصمیم‌گیرنده ممکن است آن را بپذیرد و یا رد نماید. مزیت این روش آن است که تصمیم‌گیرنده در توزیع جواب‌های به‌دست آمده دخالتی ندارد و به آسانی پیاده‌سازی می‌شود. عیب این روش آن است که تصمیم‌گیرنده کنترلی بر کیفیت جواب ندارد. در روش‌های پیشینی، اطلاعات ترجیحی در ابتدا توسط تصمیم‌گیرنده اعمال شده و سپس بهترین جواب که در این ارجحیت‌ها صدق نماید، به‌دست می‌آید. در یک روش پسینی، در ابتدا یک مجموعه از جواب‌های بهینه پارتو به‌دست می‌آید و سپس تصمیم‌گیرنده باید از میان آن‌ها یکی را برگزیند. در روش‌های تعاملی، تصمیم‌گیرنده به‌طور مکرر در فرآیند حل مساله تاثیر گذار است.

روش پیشنهادی ارائه شده در این مقاله مبتنی بر روش‌های پسینی می‌باشد.

یک مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه در حالت کلی به صورت زیر است:

$$\text{Min}_{x \in X} f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)), p \geq 2 \quad (1)$$

که $X \subset R^n$ مجموعه‌ی شدنی ناتهی و f یک تابع مقدار برداری تشکیل یافته از p ($p \geq 2$) تابع مقدار حقیقی است. تصویر X تحت نگاشت f را با نماد $Y := f(X) \subseteq R^p$ نشان داده و آن را فضای تصویر می‌نامیم. برای $y, \hat{y} \in R^p$

- $y < \hat{y}$ به معنای آنست که به ازای هر $k = 1, 2, \dots, p$ داریم $y_k < \hat{y}_k$.
- $y \leq \hat{y}$ به معنای آنست که به ازای هر $k = 1, 2, \dots, p$ داریم $y_k \leq \hat{y}_k$.
- $y \leq \hat{y}$ به معنای آنست که $y \leq \hat{y}$ اما $y \neq \hat{y}$.

در این مقاله از ترتیب‌های مولفه‌ای فوق برای فضای هدف استفاده می‌شود و مخروط $R_{\geq}^p$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$R_{\geq}^p = \{x \in R^p \mid x \geq 0\} \quad (2)$$

تعریف ۱: بردار تصمیم $x \in X$ غالب بر $x' \in X$ است اگر و فقط اگر به ازای هر $k = 1, 2, \dots, p$ داشته باشیم $f_k(x) \leq f_k(x')$ و دست‌کم در یک اندیس نامساوی به صورت اکید باشد؛ در این حالت می‌نویسیم $x \leq x'$. اگر هیچ جوابی به طور اکید از x بهتر نباشد، آن‌گاه x را جواب غیرمغلوب (یا جواب بهینه پارتو) می‌گوییم.

تعریف ۲: جواب شدنی $\hat{x} \in X$ را یک جواب کارای مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) می‌گویند اگر جواب $x \in X$ وجود نداشته باشد به طوری که $f(x) \leq f(\hat{x})$. اگر $\hat{x} \in X$ کارا باشد در این صورت $f(\hat{x})$ را یک نقطه‌ی غیرمغلوب می‌نامند.

تعریف ۳: جواب شدنی $\hat{x} \in X$ را یک جواب کارای ضعیف مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) می‌گویند اگر جواب $x \in X$ وجود نداشته باشد به طوری که $f(x) < f(\hat{x})$. اگر $\hat{x} \in X$ کارای ضعیف باشد در این صورت $f(\hat{x})$ را یک نقطه‌ی غیرمغلوب ضعیف می‌نامند.

مجموعه‌ی تمام جواب‌های کارا و کارای ضعیف مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) را به ترتیب با نمادهای X_E و X_{WE} نشان می‌دهیم و تصاویرشان را به ترتیب مرز پارتو و مرز پارتو ضعیف می‌نامیم و با Y_N و Y_{WN} نشان می‌دهیم.

تعریف ۴: نقطه‌ی $f^* = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_p^*)^T$ که $f_k^* = \text{Min}_{x \in X} f_k(x)$ برای $k = 1, 2, \dots, p$ را نقطه‌ی ایده‌آل مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) می‌گویند.

تعریف ۵: برای مجموعه $I \subset X$ ، فیلتر پارتو مجموعه I به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\text{Pareto}(I) := \{x \mid x \in I, \nexists y \in I, f(y) \leq f(x)\}$$

یک روش معمول برای تعیین جواب‌های یک مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه، دوباره فرموله کردن آن در غالب یک مساله‌ی بهینه‌سازی تک‌هدفه پارامتری است. یک مساله‌ی بهینه‌سازی کمی شده پارامتری در حالت کلی به صورت زیر است:

$$\min_{x \in X_\theta} g(f_1(x), \dots, f_p(x), \theta) \quad (3)$$

که در آن θ پارامتر برداری است و مجموعه‌ی $X_\theta \subseteq X$ وابسته به پارامتر θ است و $g: R^{p+1} \rightarrow R$ یک تابع می‌باشد.

به وسیله‌ی حل مسالهی بهینه‌سازی (۳) به ازای پارامترهای مختلف می‌توان به تمام جواب‌های بهینه پارتو از مسالهی بهینه‌سازی چندهدفه دست یافت. به منظور مطالعه‌ای بر مجموعه روش‌های مبتنی بر کمی‌سازی و همچنین غیر کمی‌سازی به [۱۴] مراجعه نمایید.

در این مقاله، تمرکز اصلی بر روی تکنیک کمی‌سازی پاسکولتی-سرافینی (PS) می‌باشد و یک روش عددی مبتنی بر روش فوق برای تولید تقریب مناسبی از مرز بهینه پارتو یک مسالهی بهینه‌سازی چندهدفه در حالت کلی ارائه می‌دهیم. یکی از مزیت‌های روش PS آنست که بسیار جامع می‌باشد و بسیاری از روش‌های کمی‌سازی مانند روش چیشف وزن‌دار شده، روش اشتراک مرزی نرمال اصلاح شده (mNBI) و روش ε -محدودیت حالت‌های خاصی از آن می‌باشند [۸]. برای مثال، فرمول روش اشتراک مرزی نرمال اصلاح شده (mNBI) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \max_{x \in X, s \in R} s \\ & \text{s.t.} \\ & \Phi\beta + s\bar{n} \geq f(x), \end{aligned} \quad (4)$$

که $\beta \in R^p_{\geq}$ یک پارامتر است و $\sum_{k=1}^p \beta_k = 1$. اگر قرار دهیم $a = \Phi\beta$ ، $s = -t$ و $\bar{n} = -r$ در این صورت روش mNBI و PS معادل خواهند بود. به عنوان مثال دیگر، روش چیشف وزن‌دار شده به صورت زیر است:

$$\min_{x \in X} \max_{k=1, \dots, p} w_k (f_k(x) - a_k), \quad (5)$$

که $a \in R^p$ و $k=1, 2, \dots, p$ ، $w_k > 0$ و اگر قرار دهیم $r_k = \frac{1}{w_k}$ ، آن‌گاه روش چیشف وزن‌دار شده و روش کمی‌سازی پاسکولتی-سرافینی معادل خواهند بود.

در ادامه مقاله به صورت زیر سازماندهی می‌گردد. در بخش ۲، روش پاسکولتی-سرافینی به‌طور خلاصه یادآوری می‌گردد و برخی از خواص آن آورده می‌شود. در بخش ۳، یک روش جدید در انتخاب پارامتر a در روش پاسکولتی-سرافینی برای حل مسایل بهینه‌سازی چندهدفه ارائه می‌شود. در بخش ۴، روش پیشنهاد شده را روی دو مسالهی نمونه‌ای معروف پیاده‌سازی کرده و نتایج حاصل از آن را با نتایج به‌دست آمده از روش‌های محدودیت نرمال و اشتراک مرزی نرمال اصلاح شده مقایسه می‌نماییم. در نهایت، نتیجه‌گیری در بخش ۵ آورده می‌شود.

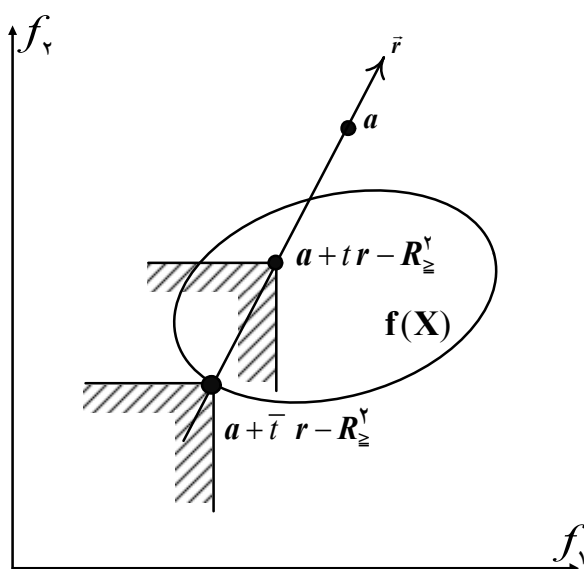
۲ روش کمی‌سازی پاسکولتی-سرافینی

روش کمی‌سازی PS از دو پارامتر a و r که به ترتیب از R^p و $R^p \setminus \{0\}$ انتخاب می‌شوند، برای تعیین جواب‌های کارای ضعیف و کارای مسالهی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) نسبت به مخروط ترتیبی $R^p_{\geq}$ استفاده

می‌کند:

$$\begin{aligned} \text{PS}(a, r) \quad & \underset{t \in R, x \in X}{\text{Min}} \quad t, \\ \text{s.t.} \quad & a + tr \geq f(x), \end{aligned} \quad (۶)$$

به منظور حل مساله‌ی (۶) مخروط ترتیبی $-R_{\geq}^p$ را در جهت r (یا $-r$) روی شعاع $a + tr$ با شروع از نقطه‌ی a حرکت می‌دهیم تا این که مجموعه‌ی $(a + tr - R_{\geq}^p) \cap f(X)$ به مجموعه‌ی تهی تقلیل یابد. کوچک‌ترین مقدار $\bar{t}$ که به ازای آن $(a + \bar{t}r - R_{\geq}^p) \cap f(X) \neq \emptyset$ می‌باشد را یک مقدار مینیمال از مساله‌ی بهینه‌سازی کمی‌شده‌ی (۶) می‌گویند، شکل ۱ طرز کار روش PS را برای یک مساله‌ی بهینه‌سازی دوهدفه نشان می‌دهد.



شکل ۱. طرز کار روش PS برای یک مساله‌ی بهینه‌سازی دوهدفه

خواص روش PS را می‌توانید در [۸ و ۱۵] ببینید. در ادامه یک قضیه از [۱۵] آورده می‌شود.

قضیه ۱: مخروط محدب نوک‌دار بسته $R_{\geq}^p$ را در نظر بگیرید.

الف) فرض کنید $\bar{x}$ یک جواب کارای مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) باشد، در این صورت $(\circ, \bar{x})$ یک جواب بهینه (۶) است که در آن $a = f(\bar{x})$ و $r \in R_{\geq}^p \setminus \{\circ\}$ یک جهت دلخواه است.

ب) فرض کنید $(\bar{t}, \bar{x})$ یک جواب بهینه (۶) باشد در این صورت $\bar{x}$ یک جواب کارای ضعیف مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) است و $a + \bar{t}r \geq f(\bar{x})$.

قضیه ۲: مخروط نوک‌دار محدب بسته‌ی $R_{\geq}^p$ را در نظر بگیرید. فرض کنید مجموعه $f(X) + R_{\geq}^p$ محدب و بسته بوده و فرض کنید $Y_N \neq \emptyset$ ، در این صورت مساله‌ی بهینه‌سازی کمی‌شده (۶) به ازای هر $(a, r) \in R_{\geq}^p \times R_{\geq}^p \setminus \{\circ\}$ دارای عضو مینیمال است.

به عنوان یک نتیجه، اگر $f(X) + R_{\geq}^p$ محدب و بسته بوده و به ازای هر انتخاب $(a, r) \in R_{\geq}^p \times R_{\geq}^p \setminus \{\circ\}$

مسالهی بهینه‌سازی (۶) فاقد جواب باشد آن‌گاه $Y_N = \emptyset$.

تبصره: در [۱۵] اشاره شده است که مساله $PS(a, r)$ به ازای برخی انتخاب‌های $a, r \in R^p$ از پایین بی‌کران است.

۲-۱ محدودسازی انتخاب پارامتر a

به عنوان یک نتیجه از قضیه ۱ (الف)، می‌توان تمام جواب‌های کارای یک مسالهی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) را به ازای پارامتر ثابت $r \in R^p \setminus \{0\}$ و تنها با تغییر پارامتر $a \in R^p$ به‌دست آورد. در [۱۵] از یک روش به منظور محدودسازی انتخاب پارامتر a از R^p ارایه شده است که همچنان قادر به تعیین تمام جواب‌های کارای یک مسالهی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) است. در ادامه، این روش را به‌طور خلاصه توضیح می‌دهیم.

محدودسازی انتخاب پارامتر a در حالت دوهدفه- برای حالت دوهدفه $r \in R^2 \setminus \{0\}$ و ابرصفحه

$$H = \{y \in R^2 \mid b_1 y_1 + b_2 y_2 = \beta\}$$

ابتدا نقاط $\bar{x}_k = \arg \min_{x \in X} f_k(x)$ ، $k=1, 2$ را تعیین کرده و سپس نقاط $f(\bar{x}_k)$ ، $k=1, 2$ را در جهت

r روی خط H تصویر می‌کنیم. تصویر این نقاط روی H عبارتند از:

$$\bar{a}_k := f(\bar{x}_k) - r \cdot \frac{b^T f(\bar{x}_k) - \beta}{b^T r} \in H, \quad k=1, 2$$

قضیه‌ی ۱۷-۲ در [۱۵] نشان می‌دهد که انتخاب پارامترهای a از مجموعه‌ی $H^a = \{y \in H \mid y = \lambda \bar{a}_1 + (1-\lambda) \bar{a}_2, \lambda \in [0, 1]\}$ یک تقریب از مرز بهینه‌ی پارتو مسالهی بهینه‌سازی دوهدفه را می‌دهد.

محدودسازی انتخاب پارامتر a در حالت سه‌هدفه- برای حالت‌های سه‌هدفه و بالاتر، روش فوق نادرست است. در [۱۵] این موضوع در مثال ۲-۱۹ نشان داده شده است. برای رفع این مشکل در [۱۵] از یک محدودیت ضعیف‌تر از مجموعه‌ی H برای پارامتر a به‌وسیله تصویر کردن مجموعه‌ی تصویر $f(X)$ در جهت r روی مجموعه H پیشنهاد شده است. اطلاعات بیش‌تر در [۱۵] آورده شده است.

لازم به ذکر است که پیاده‌سازی روش PS در مسایل بهینه‌سازی با بیش از دو تابع هدف در عمل دشوار می‌باشد.

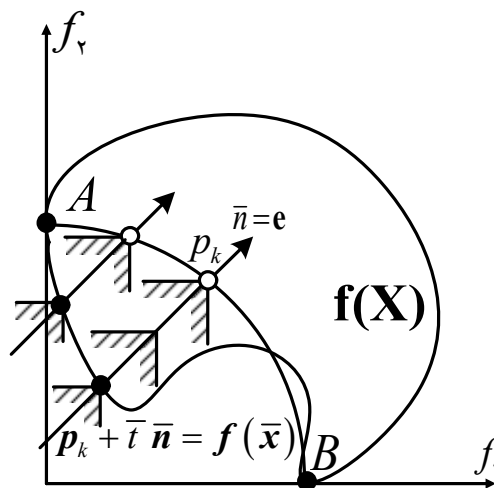
در روش پیشنهادی به‌جای آن‌که پارامتر a از روی یک ابرصفحه انتخاب گردد از یک ابرکره استفاده می‌شود. یکی از مزیت‌های این روش آنست که مستقیماً برای مسایل بهینه‌سازی از هر تعداد تابع هدف به‌کار می‌رود. روش پیشنهادی از یک رویکرد پسینی با این خاصیت که یک توزیع یکنواخت از نقاط روی سطح ابرکره منجر به یک توزیع یکنواخت از نقاط بهینه‌ی پارتو روی سطح بهینه‌ی پارتو می‌گردد، استفاده می‌کند. این روش در مواجهه با مسایل بهینه‌سازی چندهدفه که مرز پارتو آن‌ها نواحی محدب با انحناهای غیریکنواخت، نواحی غیرمحدب با جواب‌های غیرمغلوب و نواحی نامحدب با جواب‌های مغلوب می‌باشند، می‌تواند به‌طور موثر مفید باشد.

۳ توصیف روش پیشنهادی

مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید که نقطه‌ی ایده‌آل وجود دارد. بعد از تعیین نقطه‌ی ایده‌آل، توابع هدف را نرمالایز می‌نماییم به‌طوری که کمینه خود را در صفر و بیشینه خود را در یک اختیار نمایند. برای سادگی فرض کنید که مبدا مختصات در فضای هدف منطبق بر نقطه‌ی ایده‌آل است و توابع هدف نامنفی باشند. مجموعه‌ی محدب $\Gamma = CL(\Lambda)$ را در نظر بگیرید که در آن CL نشان‌دهنده بستار مجموعه‌ی

$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^p \frac{q_i}{\|q\|_r} e_i \mid q \in R_{\geq}^p, \sum_{i=1}^p q_i = 1 \right\}$ بوده، $\|\cdot\|_r$ نرم اقلیدسی و e_i یک بردار p بردار است که مولفه‌ی i آن یک و سایرین صفر می‌باشد.

جهت شبه‌نرمال ثابت $\bar{n} = \Phi e$ را در نظر بگیرید که در آن $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ یک بردار $p \times 1$ است. حال مجموعه‌ی $\Psi = \{s \mid s = \hat{p} + t \bar{n}; \hat{p} \in \partial \Gamma, \bar{n} = \Phi e, t \in R\}$ را تعریف می‌نماییم که در آن Φ یک ماتریس $p \times p$ شامل ستون‌های $f^* - f(x_k)$ ، $k = 1, 2, \dots, p$ می‌باشد که در آن f^* نقطه‌ی ایده‌آل و $\partial \Gamma$ مرز Γ است.



شکل ۲. توصیف روش پیشنهادی برای یک مساله‌ی بهینه‌سازی دوهدفه. در این جا p_k نقاط توخالی و $\bar{n}$ یک جهت شبه‌نرمال است.

شکل ۲ توصیفی از روش پیشنهادی را برای مسایل بهینه‌سازی دوهدفه نشان می‌دهد.

با توجه به توضیحات فوق، مساله‌ی بهینه‌سازی کمی‌شده‌ای که باید حل شود عبارت است از:

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{x \in X} t, \\ & \text{s.t.} \\ & s - f(x) \in R_{\geq}^p, \\ & s \in \Psi. \end{aligned} \quad (7)$$

۳-۱ الگوریتم روش پیشنهادی

ورودی: مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه

خروجی: تعیین تقریبی از مرز پارتو واقعی که آن را با Y_A نشان می‌دهیم.

گام اول: نرمالایز کردن توابع هدف

تمام توابع هدف را نرمال نمایید به‌طوری که کمینه خود را در صفر و بیشینه‌ی خود را در نقطه یک اختیار نمایند.

(۱) فرض کنید x_k^* جواب مساله بهینه‌سازی تک‌هدفه از k -امین تابع هدف f_k روی محدودیت‌های $x \in X$ باشد. در این صورت نقطه‌ی ایده‌آل $y^I \in R^p$ به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$y^I = (f_1(x_1^*), \dots, f_p(x_p^*))^T \quad (8)$$

که در آن $k = 1, 2, \dots, p$ ، $x_k^* = \arg \min_{x \in X} f_k(x)$ است.

(۲) نقطه‌ی شبه‌ندیر $y^N \in R^p$ را به صورت زیر به‌دست آورید.

$$y^N = (f_1^{Nadir}, \dots, f_p^{Nadir})^T \quad (9)$$

که p تعداد توابع هدف بوده و هر مولفه‌ی f_k^{Nadir} عبارتست از:

$$f_k^{Nadir} = \max \{f_k(x_1^*), \dots, f_k(x_p^*)\} \quad (10)$$

(۳) هر یک از توابع هدف را نرمالایز نمایید.

$$f_k^{normalize} = \frac{f_k - f_k^I}{f_k^{Nadir} - f_k^I}, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (11)$$

برای سادگی از این پس $f_k^{normalize}$ را با f_k ، $k = 1, 2, \dots, p$ نشان می‌دهیم.

گام دوم: آماده‌سازی مقدمات اجرای الگوریتم

(۴) فرض کنید $Y_A = \emptyset$ ؛ که در آن Y_A مجموعه تقریبی نقاط بهینه‌پارتو به‌دست آمده از روش پیشنهادی است که در ابتدا تهی می‌باشد.

(۵) تعداد نقاط بهینه پارتو توسط تصمیم‌گیرنده (DM) تعیین شده و در m قرار دهید. قرار دهید $\delta = \frac{1}{m}$ و

تعریف کنید $L = \{i\delta\}_{k=0}^m$ که در آن L مجموعه تمام نقاط آغازین روی پوسته سیمپلکس حاصل از نقاط لنگر (مینیم‌های منحصربه‌فرد توابع فردی) است.

(۶) مجموعه‌ی $\Gamma = CL \left\{ \sum_{i=1}^p \frac{q_i}{\|q\|_1} e_i \mid q \in R_{\geq}^p, \sum_{i=1}^p q_i = 1 \right\}$ را در نظر گرفته و مجموعه‌ی نقاط L را به $\partial\Gamma$

انتقال دهید و جهت شبه‌نرمال ثابت $\bar{n} = \Phi e$ را در نظر بگیرید. فرض کنید p_k نشان‌دهنده k -امین عنصر $\partial\Gamma$ باشد. مجموعه نقاط روی $\partial\Gamma$ را با نماد $\bar{\Gamma}$ نشان می‌دهیم. تعداد اعضای مجموعه‌ی $\bar{\Gamma}$ را با $\|\bar{\Gamma}\|$ نشان دهید.

قرار دهید $k=1$ و فرآیند زیر را تا وقتی که $k = \|\bar{\Gamma}\|$ گردد تکرار نمایید.

گام سوم: مراحل اصلی

(۷) نقطه‌ی آغازین $p_k \in \bar{\Gamma}$ را در نظر بگیرید و مطابق با مجموعه Ψ مساله‌ی بهینه‌سازی کمی‌شده (۷) را حل کنید.

(۸) **به‌روز نمودن** Y_A : نقطه‌ی x_k^* به‌دست آمده از گام ۷ را در $f(x)$ قرار دهید و نقطه غیرمغلوب جدید را به‌دست آورید و Y_A را به‌روز کنید، یعنی $Y_A := Y_A \cup \{f(x_k^*)\}$.

قرار دهید $k := k + 1$ ، اگر $k = \|\Gamma\|$ به گام ۹ بروید در غیر این صورت به گام ۷ برگردید.

(۹) شمارش تکمیل شده است و یک مجموعه Y_A تقریبی از مرز بهینه پارتو می‌باشد.

تاکید می‌شود که جواب‌های بهینه‌ی روش پیشنهادی دست‌کم نقاط کارای ضعیف مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) است. اعتبار روش پیشنهادی را توسط چهار قضیه که در ادامه آورده شده است، نشان می‌دهیم.

قضیه ۳: فرض کنید $\bar{x}$ یک جواب کارای ضعیف مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) باشد، در این صورت $(\circ, \bar{x})$ یک جواب بهینه‌ی مساله (۷) به همراه پارامتر $p := f(\bar{x}) \in \Gamma$ و جهت دلخواه $\bar{n} \in \text{int}(R_{\geq}^p)$ است. **برهان:** قرار دهید $p := f(\bar{x}) \in \Gamma$ و به‌دلخواه $\bar{n} \in \text{int}(R_{\geq}^p)$ را انتخاب نمایید. $(\circ, \bar{x})$ یک نقطه‌ی شدنی مساله‌ی (۷) است، زیرا $p + t\bar{n} = f(\bar{x}) + \circ \cdot \bar{n} \geq f(\bar{x})$.

همچنین یک جواب شدنی از مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۷) می‌باشد، زیرا با توجه به فرض قضیه $\bar{x}$ یک جواب کارای ضعیف است در نتیجه $\bar{x} \in X$. نشان می‌دهیم که نقطه‌ی $(\circ, \bar{x})$ یک جواب بهینه‌ی مساله (۷) می‌باشد، زیرا در غیر این صورت نقطه‌ی شدنی (t', x') با $t' < \circ$ و $k' \in R_{\geq}^p$ وجود دارد که $p + t'\bar{n} - f(x') = k' \in R_{\geq}^p$.

از این‌رو داریم $f(\bar{x}) = f(x') + k' - t'\bar{n}$. داریم $k' - t'\bar{n} \in \text{int}(R_{\geq}^p)$ در نتیجه خواهیم داشت $f(\bar{x}) \in f(x') + \text{int}(R_{\geq}^p)$.

رابطه‌ی اخیر در تناقض با آن است که $\bar{x}$ یک جواب کارای ضعیف مساله بهینه‌سازی چندهدفه (۱) می‌باشد.

قضیه ۴: فرض کنید $\bar{x}$ یک جواب کارای مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) باشد، در این صورت $(\circ, \bar{x})$ یک جواب بهینه‌ی مساله (۷) به همراه پارامتر $p := f(\bar{x}) \in \Gamma$ و جهت دلخواه $\bar{n} \in R_{\geq}^p \setminus \{\circ\}$ است.

برهان: قرار دهید $p := f(\bar{x}) \in \Gamma$ و به‌دلخواه $\bar{n} \in R_{\geq}^p \setminus \{\circ\}$ را انتخاب نمایید. $(\circ, \bar{x})$ یک نقطه‌ی شدنی مساله‌ی (۷) است، زیرا $p + t\bar{n} = f(\bar{x}) + \circ \cdot \bar{n} \geq f(\bar{x})$.

همچنین یک جواب شدنی از مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) می‌باشد، زیرا با توجه به فرض قضیه $\bar{x}$ یک جواب کارای است در نتیجه $\bar{x} \in X$. نشان می‌دهیم که نقطه‌ی $(\circ, \bar{x})$ یک جواب بهینه‌ی مساله (۷) می‌باشد، زیرا در غیر این صورت نقطه‌ی شدنی (t', x') با $t' < \circ$ و $k' \in R_{\geq}^p$ وجود دارد که $p + t\bar{n} - f(\bar{x}) = k' \in R_{\geq}^p$.

از این‌رو داریم $f(\bar{x}) = f(x') + k' - t'\bar{n}$. داریم $k' - t'\bar{n} \in R_{\geq}^p$ در نتیجه خواهیم داشت

$$f(\bar{x}) \in f(x') + R_{\leq}^p$$

چون $\bar{x}$ یک جواب کارای مساله (۱) است داریم $f(\bar{x}) = f(x')$ و در نتیجه $k' = t' \bar{n}$. همچنین $R_{\leq}^p$ یک مخروط نوک‌دار است و $k' \in R_{\leq}^p$ و $t' \bar{n} \in -R_{\leq}^p$ این نتیجه می‌دهد که $t' \bar{n} = k' = 0$. این در تناقض با $t' < 0$ و $\bar{n} \neq 0$ است.

قضیه ۵: فرض کنید $(\bar{t}, \bar{x})$ یک جواب بهینه مساله بهینه‌سازی کمی‌شده (۷) باشد، در این صورت $\bar{x}$ یک جواب کارای ضعیف مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) است.

برهان: فرض کنید $\bar{x}$ یک جواب کارای ضعیف نیست. در این صورت یک نقطه‌ی شدنی $x' \in X$ و یک $k' \in \text{int}(R_{\leq}^p)$ وجود دارد که $f(\bar{x}) = f(x') + k'$.

از آنجایی که $(\bar{t}, \bar{x})$ یک جواب بهینه مساله بهینه‌سازی کمی‌شده (۷) است، پس یک جواب شدنی برای آن می‌باشد در نتیجه $\bar{k} \in R_{\leq}^p$ وجود دارد که $p + \bar{t} \bar{n} - f(\bar{x}) = \bar{k}$.

چون $k' \in \text{int}(R_{\leq}^p)$ و $\bar{k} \in R_{\leq}^p$ نتیجه می‌گیریم که $\bar{k} + k' \in \text{int}(R_{\leq}^p)$ و یک $\varepsilon > 0$ با $\bar{k} + k' + \varepsilon \bar{n} \in \text{int}(R_{\leq}^p)$ وجود دارد. از $p + \bar{t} \bar{n} - f(\bar{x}) - k' = \bar{k}$ نتیجه می‌گیریم که:

$$p + (\bar{t} + \varepsilon) \bar{n} - f(\bar{x}) \in \text{int}(R_{\leq}^p)$$

بنابراین نقطه‌ی $(\bar{t} + \varepsilon, x')$ یک جواب شدنی برای مساله بهینه‌سازی کمی‌شده (۷) است.

بنابراین $\bar{t} + \varepsilon < \bar{t}$ و این در تناقض با آن است که $(\bar{t}, \bar{x})$ جواب بهینه مساله‌ی (۷) است.

قضیه ۶: نقطه‌ی $(\bar{t}, \bar{x})$ یک جواب بهینه مساله کمی‌شده (۷) به همراه $\bar{n} = \Phi e$ و $\hat{p} \in \Gamma$ است اگر و فقط اگر $(\bar{t}, \bar{x})$ یک جواب بهینه مساله‌ی $PS(a, r)$ از معادله (۶) با $a = \hat{p}$ و $r = \bar{n}$ باشد.

برهان: با استفاده از پارامترهای a و r بر طبق تعریف داده شده در قضیه‌ی فوق، فوراً ثابت می‌گردد که این دو مساله معادل یکدیگر می‌باشند.

۴ نتایج و شبیه‌سازی‌های عددی

در این بخش، کارایی الگوریتم پیشنهادی را در مقایسه با روش‌های محدودیت نرمال (NC) [۱۶] و اشتراک مرزی نرمال اصلاح شده (mNBI) [۱۷] در قالب دو مساله نمونه که از [۱۵ و ۱۸] انتخاب شده‌اند، بررسی می‌کنیم. این مسایل نمونه، الگوریتم‌های حل یک مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه را از نظر کیفیت تقریب، گسترش و توزیع یکنواخت جواب‌های غیرمغلوب به‌دست آمده مورد ارزیابی قرار می‌دهد و موجب مقایسه الگوریتم‌های مختلف با یکدیگر می‌شوند. در تمام مثال‌ها، الگوریتم پیشنهادی با روش‌های NC و mNBI مورد مقایسه قرار می‌گیرند. این مقایسه‌ها در تعداد ارزیابی‌های تابع، زمان اجرای الگوریتم، کیفیت جواب‌های غیرمغلوب به‌دست آمده، کیفیت گسترش جواب‌های غیرمغلوب به‌دست آمده روی مرز پارتو واقعی و کیفیت توزیع یکنواخت جواب‌های غیرمغلوب روی مرز پارتو می‌باشد. به منظور تعیین کیفیت جواب‌های غیرمغلوب به‌دست آمده از سه معیار کیفیت تقریب، گسترش و یکنواختی که از مقاله مینگ و همکاران [۱۹] انتخاب شده است استفاده می‌نماییم.

همچنین، به کمک رسم نمودار توزیع جواب‌های به دست آمده روی مرز پارتو را نشان می‌دهیم. به علاوه، برای اجرای الگوریتم پیشنهادی و الگوریتم‌های NC و mNBI روی مسایل نمونه، از بسته‌ی بهینه‌سازی GlobalOptimization و الگوریتم SQP از نرم‌افزار MAPLE 2016 استفاده شده است. به منظور راحتی در ارائه مثال‌های عددی، روش پیشنهادی را با نماد PM نشان می‌دهیم.

۴-۱ معیارهای کیفیت برای مساله بهینه‌سازی چندهدفه

۴-۱-۱ معیار کیفیت برای تقریب مجموعه بهینه پارتو

فرض کنید $P_1, P_2, \dots, P_N$ تعداد N مجموعه تقریبی از مجموعه بهینه پارتو از N الگوریتم متفاوت برای یک مساله یکسان باشد. چون مجموعه‌ی بهینه پارتو واقعی مجهول است، فرض می‌کنیم $U = \bigcup_{i=1}^N P_i$ و $Pareto(U)$ را به عنوان مجموعه بهینه پارتو در این مقاله در نظر می‌گیریم. فاصله‌ی نسلی مجموعه P_i به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$GD_i = \frac{\sqrt{\sum_{q \in P_i} (d_q^{P_i})^2}}{|P_i|}, i = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

که فاصله‌ی بین هر دو جواب در فضای هدف برابر $d(q, h) = \min_{h \in Pareto(U)} d(q, h)$ و $d_q^{P_i}$ عدد اصلی مجموعه P_i است. اگر $GD_i < GD_j$ ، $i, j = 1, 2, \dots, N$ آن‌گاه تقریب P_i بهتر از تقریب P_j است.

۴-۱-۲ معیار کیفیت برای یکنواختی مجموعه بهینه پارتو

فرض کنید $P_1 = \{p_1^1, \dots, p_N^1\}$ و $P_2 = \{p_1^2, \dots, p_M^2\}$ دو مجموعه تقریبی از مجموعه بهینه پارتو به وسیله دو الگوریتم مختلف باشند. مراحل اصلی برای یکنواختی به شرح زیر است.

مرحله ۱) قرار دهید $k = 1$ و تعریف کنید:

$$P_{New}^1 = \{p^1 = \{p_1^1\}, \dots, p_N^1 = \{p_N^1\}\}$$

$$P_{New}^2 = \{p^2 = \{p_1^2\}, \dots, p_M^2 = \{p_M^2\}\}$$

مرحله ۲) محاسبه کنید:

$$d_i^1 = \min_{j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, N} D(p_i^1, p_j^1), \bar{d}_k^1 = \frac{\sum_{i=1}^N d_i^1}{N}, SP_k^1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (1 - F(d_i^1, \bar{d}_k^1))^2}{N-1}}$$

و

$$d_i^2 = \min_{j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, M} D(p_i^2, p_j^2), \bar{d}_k^2 = \frac{\sum_{i=1}^M d_i^2}{M}, SP_k^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (1 - F(d_i^2, \bar{d}_k^2))^2}{M-1}}$$

که در آن

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & x > y \\ \frac{y}{x}, & x \leq y \end{cases}$$

و $D(P, Q)$ فاصله در فضای هدف بین هر دو جواب در مجموعه P و Q است.

مرحله ۳) اگر $SP_k^1 > SP_k^*$ باشد، آن‌گاه یکنواختی P_k بهتر از P_1 است. اگر $SP_k^1 < SP_k^*$ باشد، آن‌گاه یکنواختی P_1 بهتر از P_k است. در غیر این صورت $SP_k^1 = SP_k^*$.

فرض کنید $D(P_l^1, P_m^1) = \min\{d_1^1, \dots, d_N^1\}$ و اجتماع P_l^1 و P_m^1 را به‌دست آورید که منتج به $P_{New}^1 = \{p_1^1, p_2^1, \dots, p_{N-1}^1\}$ می‌شود. از طریق مشابه P_{New}^* را تشکیل دهید. فرض کنید $k = k + 1$ ، $N = N - 1$ و $M = M - 1$. اگر $k < \min(N - 1, M - 1)$ است به مرحله ۲ بروید.

مرحله ۴) اگر $SP_k^1 > SP_k^*$ باشد، آن‌گاه یکنواختی P_k بهتر از P_1 است. اگر $SP_k^1 < SP_k^*$ باشد، آن‌گاه یکنواختی P_1 بهتر از P_k است. در غیر این صورت $SP_k^1 = SP_k^*$ و یکنواختی P_k و P_1 یکسان است.

۴-۱-۳ معیار کیفیت برای خوش‌توزیعی مجموعه بهینه پارتو

معیار خوش‌توزیعی مجموعه بهینه پارتو مطابق رویه‌ای که در ادامه می‌آید اندازه‌گیری می‌شود.

مرحله ۱) مجموعه جواب مرجع $P_r = \{f_1^*, f_2^*, \dots, f_p^*\}$ را تشکیل دهید که در آن به ازای هر $i = 1, 2, \dots, p$ داریم $f_i^* = (L_1, \dots, L_{i-1}, U_i, L_{i+1}, \dots, L_p)$ به‌طوری‌که $L_i = \min_{x \in \text{Pareto}(U)} f_i(x)$ و $U_i = \max_{x \in \text{Pareto}(U)} f_i(x)$ است.

مرحله ۲) فاصله در فضای هدف بین یک جواب مرجع $p_r \in P_r$ با مجموعه P را به‌صورت $d_r^P = \min\{d(p_r, p) | p \in P\}$ تعریف نمایید. مقدار کوچک‌تر d_r^P به‌این معنا است که P گسترش خوب‌تری روی مرز بهینه‌پارتو دارد. اندازه‌ی گسترش P از رابطه‌ی زیر حاصل می‌گردد.

$$EX = \frac{\sqrt{\sum (d_r^P)^2}}{p}$$

۴-۲ نتایج و شبیه‌سازی‌های عددی

۴-۲-۱ مسالهی بهینه‌سازی دوهدفه

مسالهی نمونه‌ای ZDT۳ اصلاح شده [۱۸]: مسالهی ZDT۳ یکی از شش مسالهی نمونه‌ای می‌باشد که توسط زیتزلر و همکاران (۲۰۰۰) ارائه شده است. این مسایل نمونه، توسط پژوهشگران زیادی مورد استفاده قرار گرفته است، به‌طور کلی تمام این مسایل دو تابع هدف زیر را دارند.

$$\text{Min } f_1(x), \quad (13)$$

$$\text{Min } f_2(x) = g(x)h(f_1(x), g(x)).$$

شش مسالهی نمونه با یکدیگر فقط در تعریف توابع $f_1(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ تفاوت دارند. در تمام شش مسالهی به جز ZDT۵ سطح بهینه پارتو با $g(x) = 1$ شکل داده شده است. در این‌جا نسخه دشوارتری از مسالهی ZDT۳ را مورد توجه قرار می‌دهیم که تفاوت‌هایی را با نسخه اصلی ارائه شده در زیتزلر و همکاران (۲۰۰۰) [۱۸] دارد.

این مساله نیز $n = 30$ متغیره بوده و دارای نواحی ناپیوسته بهینه پارتو می باشد. مساله ی ZDT3 اصلاح شده را که با نماد mZDT3 نشان می دهیم به صورت زیر است.

$$\text{Min } f_1(x) = x_1,$$

$$\text{Min } f_2(x) = g(x) \left(1 - \left(\frac{f_1(x)}{g(x)} \right)^{1/5} - \frac{f_1(x)}{g(x)} \sin 10\pi x_1 \right),$$

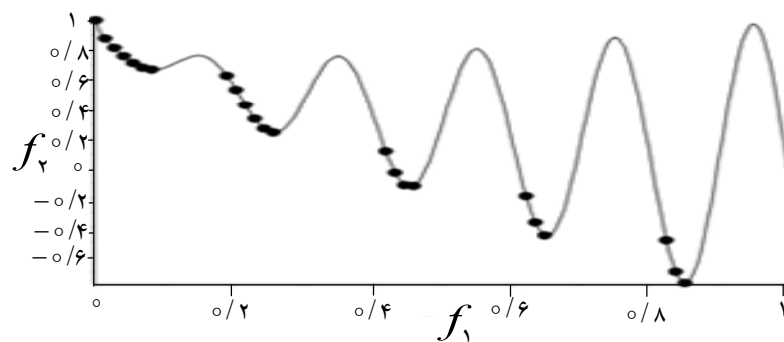
s.t.

$$g(x) = 1 + \frac{9}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i^2,$$

$$x_1 \in [0, 1], x_i \in [-1, 1], \quad \forall i = 2, 3, \dots, n.$$

ناحیه ی بهینه پارتو متناظر با $0 \leq x_1^* \leq 1$ و $x_i^* = 0$ برای $i = 2, 3, \dots, n$ می باشد. مشکل این مساله ناحیه بهینه پارتو ناپیوسته آن می باشد.

فرض کنید بخواهیم تعداد $m = 64$ نقطه ی بهینه پارتو را روی مرز بهینه پارتو به دست آوریم. روش mNBI بعد از 64 دفعه اجرای الگوریتم تعداد 23 نقطه روی مرز پارتو مساله بهینه سازی mZDT3 تولید می کند. تعداد ارزیابی های تابع در روش mNBI برابر 5199210 و زمان اجرای الگوریتم 255/84 ثانیه است. شکل 3 نتایج اجرای الگوریتم mNBI را نشان می دهد.

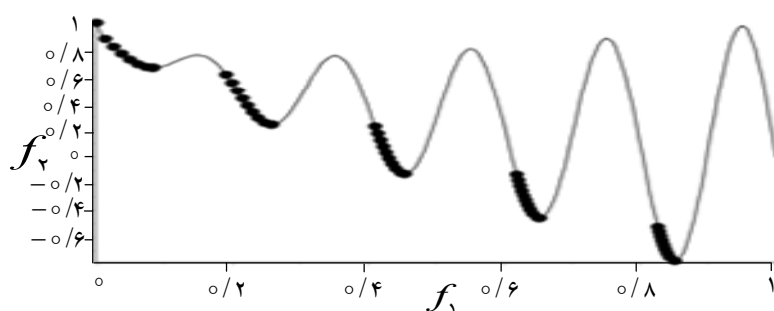


شکل 3. روش mNBI برای مساله mZDT3

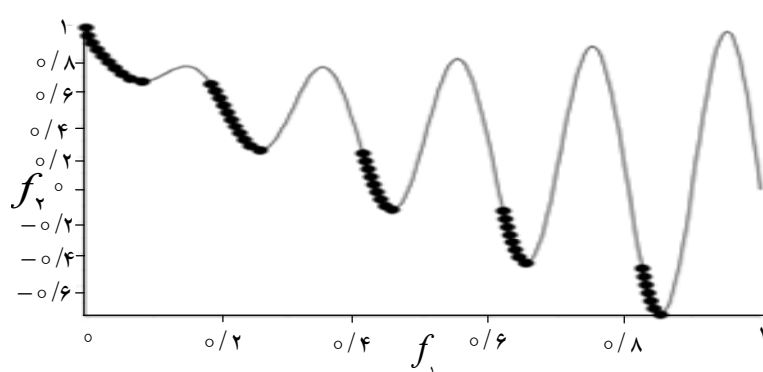
روش NC بعد از 64 دفعه اجرای الگوریتم تعداد 54 نقطه روی مرز پارتو مساله بهینه سازی mZDT3 تولید کرد که بعد از انجام فیلتر پارتو مشخص گردید که تعداد 48 عدد بهینه پارتو است. تعداد ارزیابی های تابع در روش NC برابر 327933660 و زمان اجرای الگوریتم 56/54075 ثانیه است. شکل 4 نتایج اجرای الگوریتم NC را نشان می دهد.

روش PM بعد از 64 دفعه اجرای الگوریتم تعداد 55 نقطه روی مرز پارتو مساله بهینه سازی mZDT3 تولید کرد. این روش همانند روش mNBI به فیلتر پارتو برای تشخیص نقاط بهینه پارتو احتیاج ندارد. تعداد ارزیابی های تابع در روش PM برابر 9662295 و زمان اجرای الگوریتم 61/439 ثانیه است. شکل 5 نتایج اجرای الگوریتم PM را نشان می دهد.

قانع کنفی و خرّم، یک روش عددی مبتنی بر روش پاسکولتی-سرافینی برای تعیین مرز پارتو در مسایل بهینه‌سازی چندهدفه



شکل ۴. روش NC بعد از اجرای فیلتر پارتو برای مساله mZDT3



شکل ۵. روش PM برای مساله mZDT3

جدول ۱ نتایج حاصل از معیارهای کیفیت و همگرایی را برای روش‌های بررسی شده در مقاله روی مساله نمونه‌ای mZDT3 ارائه می‌دهد.

جدول ۱. متریک کیفیت روش‌ها در حل مساله mZDT3. دقت تقریب‌ها تا پنج رقم اعشار می‌باشد.

متریک کیفیت	mNBI	NC	PM
GD	۰/۰۰۰۴	۰	۰
EX	۱/۵۰۴۶۱	۱/۵۰۵۲۹	۱/۵۰۴۵۲
SP	۱/۷۰۹۸۰	۱/۲۲۳۵	۱/۱۹۹۸۵

نتایج به‌دست آمده از معیارهای کیفیت جواب‌های تقریبی به‌دست آمده نشان‌دهنده آن است که روش پیشنهادی در این مقاله عملکرد بهتری نسبت به دو روش دیگر داشته است.

۴-۲-۲ مساله بهینه‌سازی سه‌هدفه

مساله‌ی بهینه‌سازی سه‌هدفه زیر از ایچفلدر (۲۰۰۸) [۱۵] در نظر بگیرد.

$$\text{Min } f_1(\mathbf{x}) = x_1,$$

$$\text{Min } f_r(\mathbf{x}) = x_r,$$

$$\text{Min } f_r(\mathbf{x}) = (1 + g(\mathbf{x})) \left(r - \sum_{i=1}^r \left(\frac{x_i}{1 + g(\mathbf{x})} (1 + \sin r\pi x_i) \right) \right),$$

s.t.

$$g(\mathbf{x}) = 1 + \frac{9}{20} \sum_{i=3}^{22} x_i,$$

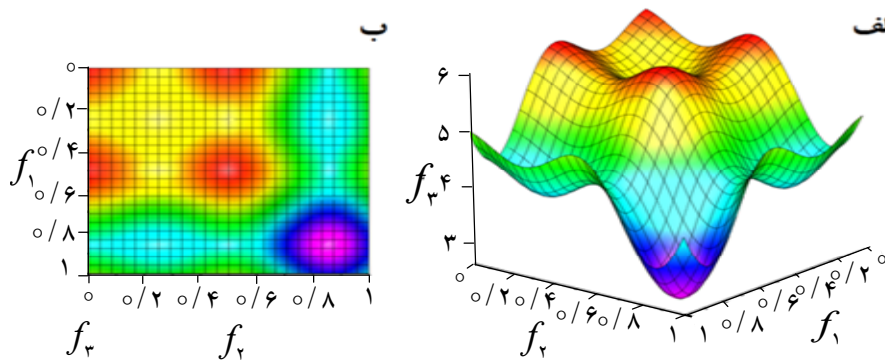
$$x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, 22.$$

مجموعه نقاط غیر مغلوب در فضای هدف از چهار قسمت ناهمبند تشکیل شده است. مجموعه بهینه زیر مجموعه‌ای از $\{x \in R^n | x_i = 0, i = 3, \dots, 22\}$ و مجموعه بهینه پارتو زیر مجموعه‌ای از Y می‌باشد، به‌طوری‌که:

$$Y = \left\{ y \in R^r \mid y_1, y_r \in [0, 1], y_r = r \left(r - \sum_{i=1}^r \frac{y_i}{r} (1 + \sin(r\pi y_i)) \right) \right\}$$

مجموعه‌ی Y در شکل نشان داده شده است.

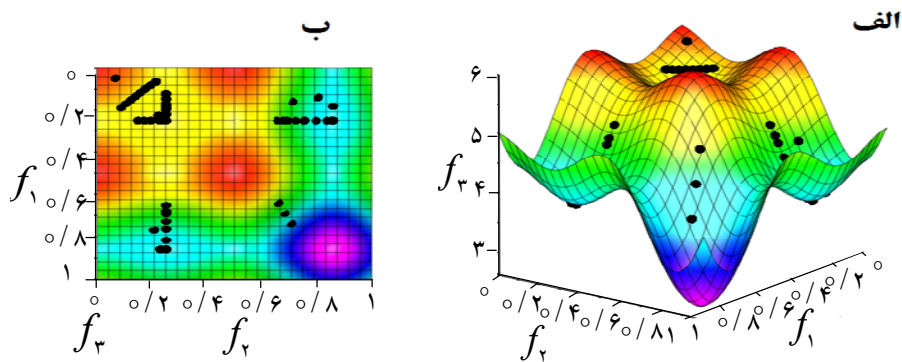
فرض کنید بخواهیم تعداد $m = 57$ نقطه‌ی بهینه پارتو را روی سطح بهینه پارتو که در شکل نمایش داده شده است، به‌دست آوریم.



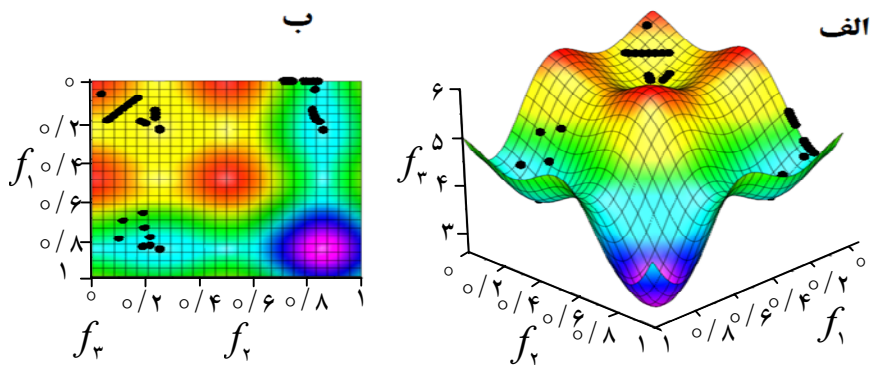
شکل ۶. (الف) نمایش مجموعه Y و (ب) تصویر آن در صفحه دو بعدی.

روش mNBI بعد از ۵۷ دفعه اجرای الگوریتم، موفق به یافتن ۵۴ نقطه‌ی بهینه پارتو شده است. همچنین تعداد ارزیابی‌های تابع در روش mNBI برابر ۲۱۳۲۲۶۶۲ و زمان اجرای الگوریتم ۱۰۰۳/۶۱۶ ثانیه است. شکل سطح پارتو در فضای هدف و تصویر آن را در صفحه f_1, f_r نشان می‌دهد.

روش NC بعد از ۵۷ دفعه اجرای الگوریتم، موفق به یافتن ۵۵ نقطه بهینه پارتو شده است. همچنین، تعداد ارزیابی‌های تابع در روش NC برابر ۱۷۹۹۳۱۵۱ و زمان اجرای الگوریتم ۲۰۶۲/۹۵۸ ثانیه است.



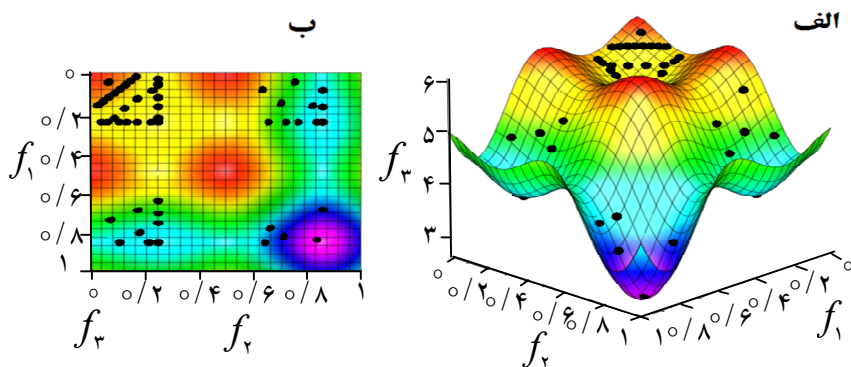
شکل ۷. حل مساله اچفلدر (۲۰۰۸) به روش mNBI. (الف) سطح پارتو در فضای هدف و (ب) تصویر آن در صفحه دوبعدی.



شکل ۸. حل مساله اچفلدر (۲۰۰۸) به روش NC. (الف) سطح پارتو در فضای هدف و (ب) تصویر آن در صفحه دوبعدی.

شکل سطح پارتو در فضای هدف و تصویر آن را در صفحه f_1, f_2 نشان می‌دهد.

روش PM بعد از اجرای ۵۷ دفعه اجرای الگوریتم، موفق به یافتن ۵۷ نقطه‌ی بهینه پارتو شده است. همچنین، تعداد ارزیابی‌های تابع در روش PM برابر ۲۳۸۱۹۱۴۵ و زمان اجرای الگوریتم ۱۰۷۹/۹۱۷ ثانیه است. شکل سطح پارتو در فضای هدف و تصویر آن را در صفحه f_1, f_2 نشان می‌دهد.



شکل ۹. حل مساله اچفلدر (۲۰۰۸) به روش PM. (الف) سطح پارتو در فضای هدف و (ب) تصویر آن در صفحه دوبعدی.

جدول ۲ نتایج حاصل از معیارهای کیفیت و همگرایی را برای روش‌های بررسی شده در مقاله روی مساله نمونه‌ای اچفلدر (۲۰۰۸) [۱۵] ارایه می‌دهد.

جدول ۲. متریک کیفیت روش‌ها در حل مساله اچفلدر (۲۰۰۸). دقت تقریب‌ها تا پنج رقم اعشار می‌باشد.

متریک کیفیت	mNBI	NC	PM
GD	۰/۹۲۳۹۴	۰/۸۳۵۴۷	۰/۰۰۰۰۳
EX	۱/۱۱۴۸۶	۱/۰۰۲۵۲	۰/۰۰۰۰۱
SP	۱/۲۹۳۵۸	۳/۰۰۲۷۱	۰/۰۰۰۱۱

نتایج به‌دست آمده از معیارهای کیفیت جواب‌های تقریبی به‌دست آمده نشان‌دهنده آن است که روش پیشنهادی در این مقاله عملکرد بهتری نسبت به دو روش دیگر داشته است.

۴-۳ روش اشتراک مرزی نرمال اصلاح شده (mNBI)

روش اشتراک مرزی نرمال (NBI) [۲۰] به صورتی طراحی شده بود که یک توزیع یکنواخت نقاط روی پوسته‌ی سیمپلکس مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه در فضای هدف منجر به تولید مجموعه‌ای با توزیع یکنواخت روی سطح پارتو می‌گردد. یکی از اشکالات روش NBI این است که الزاماً جواب‌های به‌دست آمده روی مرز پارتو (سطح پارتو)، غیر مغلوب نیستند و به طور ذاتی قادر به تولید نقاط مغلوب روی مرز نیز می‌باشد. دلیل آن می‌تواند در ارجحیت قرار دادن دست‌یابی روش، به مرز پایینی فضای شدنی در فضای هدف نسبت به دست‌یابی به نقاط بهینه‌پارتو باشد. همین اشکال، انگیزه‌ی ارایه روش اشتراک مرزی نرمال اصلاح‌شده (mNBI) توسط شاگلا (۲۰۰۷) [۱۷] گردید. مدل mNBI برای آن که بتواند یک توزیع یکنواخت از نقاط غیرمغلوب در سرتاسر سطح پارتو به‌دست آورد از اصول موجود در روش NBI استفاده می‌کند و با استفاده از مفهوم غلبه مانع از تولید نقاط مغلوب روی سطح بهینه پارتو مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه می‌شود. مدل mNBI به صورت زیر است:

$$\text{Max}_{x \in X, t \in R} t,$$

$$\text{s.t.}$$

$$\Phi \beta + t \bar{n} \geq f(x),$$

$$x \in X.$$

که در آن $\bar{n} = -\Phi e$ و $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ یک بردار $1 \times p$ است.

همچنین، سیمپلکس به‌دست آمده به‌وسیله‌ی پوسته‌ی محدب منبسط‌شده منحصربه‌فرد توابع منحصربه‌فرد را با $\Phi \beta$ نشان می‌دهیم که در آن $\Phi = (f(x_1^*), f(x_2^*), \dots, f(x_p^*))$ یک ماتریس $p \times p$ و

$$\beta = \left\{ (b_1, b_2, \dots, b_p)^T \mid \sum_{i=1}^p b_i = 1, b_i \geq 0, i = 1, \dots, p \right\}$$

به [۱۷] مراجعه نمایید.

۴-۴ روش محدودیت نرمال (NC)

روش محدودیت نرمال به منظور تعیین تقریبی از مرز بهینه پارتو با توزیع یکنواخت توسط مساک و ماتسون (۲۰۰۴) [۱۶] برای حل مسایل بهینه‌سازی چندهدفه با هر تعداد تابع هدف معرفی شد. روش NC به لحاظ محاسباتی از روش NBI [۲۰] پایدارتر است و کم‌تر گرایش به تولید نقاط غیرپارتو و نقاط پارتو موضعی روی مرز پارتو دارد. اصل روش NC بر تعدیل ناحیه شدنی هدف در هر تکرار از مساله‌ی بهینه‌سازی استوار است. در این روش ابتدا نقاط لنگر [۱۶] را تعیین می‌نماییم. i -امین نقطه لنگر را با $f^{i*} = (f_1(x_i^*), \dots, f_p(x_i^*))^T$ نشان می‌دهیم که در آن $x_i^* = \arg \min_{x \in X} f_i(x)$ است. نقاط لنگر در واقع همان رئوس ابرصفحه utopia (صفحه سیمپلکس شامل نقاط بهینه توابع فردی در فضای هدف) می‌باشند. مساله‌ای که به ازای یک مجموعه با توزیع یکنواخت از نقاط p_k روی ابرصفحه utopia در فضای معیار حل می‌شود عبارت است از:

$$\text{Min } f_j(x),$$

s.t.

$$v_i(f - p_k) \leq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus \{j\},$$

$$v_i(f^{j*} - f^{i*}) \leq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus \{j\},$$

$$x \in X.$$

که در آن $j \in \{1, 2, \dots, p\}$. در هر حال این روش پتانسیل تولید نقاط مغلوب را نیز دارد و پس از اجرای روش NC باید از فیلتر پارتو برای تعیین مجموعه نقاط غیر مغلوب استفاده کرد. جزییات بیش‌تر از روش NC را در [۱۶] مشاهده نمایید.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله روش پاسکولتی-سرافینی برای حل یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه مورد بررسی قرار گرفت و اشکال روش در محدودیت انتخاب پارامتر a برای مسایل بهینه‌سازی دوهدفه و بیش‌تر تشریح گردید. سپس یک پارامتر محدود کننده‌ی جدید ارایه شد که مشکلات انتخاب پارامتر در روش پاسکولتی-سرافینی را به‌طور کامل برطرف می‌ساخت. نتیجه این تغییرات، تولید نقاط غیر مغلوب روی سطح بهینه پارتو مساله بهینه‌سازی چندهدفه با توزیع یکنواخت و در سرتاسر سطح بهینه پارتو می‌باشد که در مثال‌های عددی کاملاً مشهود است و معیارهای کیفیت موجود در مقاله، مطلوبیت نقاط غیر مغلوب به‌دست آمده را نشان می‌دهد.

منابع

- [۱] بهمنش، ا. (۱۳۹۲). یک روش تعاملی مبتنی بر غیر فازی‌سازی پارامترها برای حل مساله حمل‌ونقل چندهدفه. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۰(۳)، ۳۹-۲۵.
- [2] Deb, K., (2001). Multi-objective optimization using evolutionary algorithms. John Wiley & Sons, 16.
- [3] Luh, G. C., Chueh, C. H., (2004). Multi-objective optimal design of truss structure with immune algorithm. Computers & structures, 82, 829-844.
- [4] Sandgren, E., (1994). Multicriteria design optimization by goal programming. Advances in Design Optimization, 225-265.

- [5] Statnikov, R., Matusov, J. B., (2012). Multicriteria optimization and engineering. Springer Science & Business Media.
- [6] Abo-Sinna, M., Abo-Elnaga, Y. Y., Mousa, A., (2014). An interactive dynamic approach based on hybrid swarm optimization for solving multiobjective programming problem with fuzzy parameters. *Applied Mathematical Modelling*, 38, 2000-2014.
- [7] Audet, C., Savard, G., Zghal, W., (2008). Multiobjective optimization through a series of single-objective formulations. *SIAM Journal on Optimization*, 19, 188-210.
- [8] Eichfelder, G., (2009). An adaptive scalarization method in multiobjective optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 19, 1694-1718.
- [9] Ghane-Kanafi, A., Khorram, E., (2015). A new scalarization method for finding the efficient frontier in non-convex multi-objective problems. *Applied Mathematical Modelling*, 39(23-24), 7483-7498.
- [10] Khorram, E., Khaledian, K., Khaledyan, M., (2014). A numerical method for constructing the Pareto front of multi-objective optimization problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 261, 158-171.
- [11] Siddiqui, S., Azarm, S., Gabriel, S., (2011). A modified benders decomposition method for efficient robust optimization under interval uncertainty. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 44, 259-275.
- [12] Valipour, E., Yaghoobi, M., Mashinchi, M., (2014). An iterative approach to solve multiobjective linear fractional programming problems. *Applied Mathematical Modelling*, 38, 38-49.
- [13] Hwang C. L., Masud, A. S. M., (1979). Multiple objective decision making—methods and applications.
- [14] Figueira, J., Greco, S., Ehrgott, M., (2005). Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys. Springer Science & Business Media, 78, 2005.
- [15] Eichfelder, G., (2008). Adaptive scalarization methods in multiobjective optimization. Springer.
- [16] Messac A., Mattson, C. A., (2004). Normal constraint method with guarantee of even representation of complete Pareto frontier. *AIAA journal*, 42, 2101-2111.
- [17] Shukla, P. K., (2007). On the normal boundary intersection method for generation of efficient front. in *Computational Science-ICCS*, ed: Springer, 310-317.
- [18] Zitzler, E., Deb, K., Thiele, L., (2000). Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results. *Evolutionary computation*, 8, 173-195.
- [19] Meng, H. Y., Zhang, X. H., Liu, S. Y., (2005). New quality measures for multiobjective programming. in *Advances in Natural Computation*, ed: Springer, 1044-1048.
- [20] Das, I., Dennis, J. E., (1998). Normal-boundary intersection: A new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems. *SIAM Journal on Optimization*, v8, 631-657.