مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال دوازدهم، شماره دوم (پیاپی ۴۵)، تابستان ۹۴، ص ص ۱۸-۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

مدل ابرکارایی AP با داده‌های ترتیبی در تحلیل پوششی داده‌های نادقیق (یک مطالعه موردی: بررسی مراکز خدمات مخابراتی کره جنوبی)

محمد خدابخشی*[1]، مهدی کرمی خرم آبادی[2]، علی ثامری پور[3]
۱- دانشیار، دانشگاه شهید بهشتی، گروه ریاضی کاربردی، تهران، ایران
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه لرستان، گروه ریاضی ،خرم آباد، ایران
۳- دانشیار، دانشگاه لرستان، گروه ریاضی، خرم آباد، ایران

رسید مقاله: ۲۰ دی ۱۳۹۳
پذیرش مقاله: ۵ خرداد ۱۳۹۴

چکیده
اگر چه روش‌های متفاوتی از ابرکارایی در تحلیل پوششی داده‌های کلاسیک ارایه شده است، تاکنون روش‌های ابرکارایی کلاسیک در تحلیل پوششی داده‌های ترتیبی که یکی از انواع داده‌های نادقیق می‌باشد بررسی نشده است. در این مقاله یک مدل ابرکارایی کلاسیک در تحلیل پوششی داده‌های نادقیق ($IDEA$) بررسی می‌شود. در واقع با فرض نادقیق بودن داده‌های ورودی و خروجی، مدل نادقیق مربوطه (AP) را تعریف نموده، برای حل مدل حاصل، معادل قطعی آن را به‌دست می‌آوریم. برای راحتی کار معادل قطعی مدل را که غیرخطی می‌باشد با استفاده از روش دقیق‌سازی داده‌های ترتیبی (تبدیل داده‌های ترتیبی به داده‌های دقیق)، به یک مدل بازه‌ای تبدیل می‌کنیم و سپس با اقتباس از روش دسپوتیس و اسمیرلیس مدل حاصل را به یک برنامه‌ریزی خطی تبدیل نموده، با حل آن تحت بهترین شرایط و بدترین شرایط یک جواب بهینه بازه‌ای به دست می‌آوریم که مقدار بهینه به دست آمده در آن بازه قرار دارد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، ابرکارایی، داده‌های ترتیبی، داده‌های بازه‌ای، داده‌های نادقیق.

۱ مقدمه
تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، یک ابزار تصمیم‌گیری مناسب برای ارزیابی عملکرد نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تحت ارزیابی است که دارای ورودی و خروجی‌های مشابه می‌باشد. اولین مدل در DEA، مدل CCR است که در سال ۱۹۷۸ توسط چارنز، کوپر و رودز پیشنهاد گردید [۱]. در مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها می‌بایست، که مقدار تمامی داده‌های ورودی‌ها و خروجی‌ها شناخته شده باشد. این فرض همیشه در دنیای واقعی درست نیست. به علت عدم اطمینان در داده‌ها، برخی اوقات تحلیل پوششی داده‌ها با داده‌های نادقیق مواجه

* عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: mkhbakhshi@yahoo.com

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

می‌شود، مخصوصاً وقتی یک سری از واحدهای تصمیم‌گیرنده حاوی داده‌های بازه‌ای و ترتیبی باشند و به طور کلی صحبت از عدم اطمینان در داده‌ها باشد، مدل تحلیل پوششی داده‌ها به یک مدل غیرخطی تبدیل می‌شود و $IDEA$ نامیده می‌شود.

دراغلب مدل‌های DEA، معمولاً چندین DMU کارا وجود دارد. رتبه‌بندی بین این واحدهای کارا موضوع تحقیقی جالبی است. مدل‌های مختلف و مطالعات فراوانی برای رتبه‌بندی‌های واحدهای کارا مطرح شده است از قبیل: مدل‌های اندرسن و پیترسن [۲] در سال ۱۹۹۳، دویل و گرین [۳-۴] در سال‌های ۱۹۹۳و۱۹۹۴، سیفورد و ژو [۵] در سال ۱۹۹۹، ژو [۶] در سال ۲۰۰۱، لی و همکاران [۷] در سال ۲۰۰۷، خدابخشی [۸] در سال ۲۰۰۷، جهانشاهلو و همکاران [۹] در سال ۲۰۱۱، پایان و همکاران [۱۰] در سال ۲۰۱۱، خدابخشی و همکاران [۱۱] در سال ۲۰۱۲، حسین‌زاده‌لطفی و همکاران [۱۲] در سال ۲۰۱۳، رمضانی و همکاران [۱۳] در سال ۲۰۱۳، جهانشاهلو و همکاران [۱۴] در سال ۲۰۱۴، و مطالعات مختلف و متعددی از این قبیل صورت گرفته، در این مقاله رتبه‌بندی را ابرکارایی می‌نامیم. ابرکارایی یک روش برای رتبه‌بندی واحدهای کارا می‌باشد که قادر است یک واحد کارا و رأسی مانند kرا با مقدار کارایی بزرگ‌تر از یک مشخص کند. در کلیه مدل‌های یاد شده از داده‌های دقیق استفاده شده؛ اما از آنجایی که در اغلب مسایل عملی وکاربردی داده‌ها نادقیق و غیرقطعی است؛ لذا در سال‌های اخیر مطالعاتی در مورد ابرکارایی داده‌های نادقیق ارایه شده که از جمله آن‌ها می توان به تحقیقات خدابخشی و همکاران در این زمینه اشاره کرد [۱۵-۱۸]. ساختار این مقاله، بدین ترتیب است: در بخش ۲ به معرفی داده‌های نادقیق می‌پردازیم، سپس در بخش ۳ از نظر تئوریک و نظری مدل ابرکارایی AP را معرفی می‌نماییم و در ادامه در بخش ۴، مدل ابرکارایی AP را با داده‌های ترتیبی ضعیف و ترتیبی قوی توسعه داده و سرانجام یک مطالعه موردی، در خصوص داده‌های ترتیبی به طور عملی اجرا می‌نماییم، و بالاخره در آخرین قسمت این مقاله نتایج و مطالب پیشنهادی برای تحقیقات آتی پیش رو گذاشته می‌شود.

۲ داده های نادقیق

کوپر و همکاران [۱۹] در سال ۱۹۹۹ تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها را در کنار داده‌های نادقیق قراردادند. منظور از داده‌های نادقیق، داده‌هایی است که در آن ها ورودی‌ها و خروجی‌ها در یک بازه‌ای از اعداد تعریف شده (داده‌های بازه‌ای) و یا برای آن ها ترتیب در نظرگرفته می‌شود (داده‌های ترتیبی)، که ذیلاً آن‌ها را معرفی می کنیم [۲۰].

داده‌های بازه‌ای یا کراندار:

$$x_{ij}^L \le x_{ij} \le x_{ij}^U \quad \text{و} \quad y_{rj}^L \le y_{rj} \le y_{rj}^U \quad \text{برای} \quad i \in BI,\ r \in BO, \qquad (۱)$$

x_{ij}^L و y_{rj}^L کران‌های پایین و x_{ij}^U و y_{rj}^U کران‌های بالا هستند، و BI و BO به ترتیب مجموعه‌های شامل ورودی‌ها و خروجی‌های کراندار می‌باشند.

داده‌های ترتیبی ضعیف:

$$x_{ij} \le x_{ik} \quad \text{و} \quad y_{rj} \le y_{rk} \quad \text{برای} \quad j \ne k,\ \ i \in DI, r \in DO, \qquad (۲)$$

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

یا به طور خلاصه:

$$x_{i1} \le x_{i2} \le \ldots \le x_{ik} \le \ldots \le x_{in} \quad (i \in DI), \tag{۳}$$

$$y_{r1} \le y_{r2} \le \ldots \le y_{rk} \le \ldots \le y_{rm} \quad (r \in DO), \tag{۴}$$

که DI و DO مجموعه‌های شامل ورودی‌ها و خروجی‌هایی است که در رابطه ترتیبی ضعیف صدق می‌کند.

داده‌های ترتیبی قوی:

$$x_{i1} < x_{i2} < \ldots < x_{ik} < \ldots < x_{in} \quad (i \in SI), \tag{۵}$$

$$y_{r1} < y_{r2} < \ldots < y_{rk} < \ldots < y_{rm} \quad (r \in SO), \tag{۶}$$

یا به عبارتی:

$$x_{i,k} - x_{i,k-1} \ge \eta \ \ (i \in SI) \quad \text{و} \quad y_{r,k} - y_{r,k-1} \ge \eta \ \ (r \in SO) \tag{۷}$$

که SI و SO مجموعه‌های شامل ورودی‌ها و خروجی‌هایی است که در رابطه ترتیبی قوی صدق می‌کند.

η یک متغیر مثبت است، در حالتی که $\eta = 0$ روابط فوق بیانگر روابط ترتیبی ضعیف خواهد بود. لازم به ذکر است که به جای η می توان عنصر غیرارشمیدسی ε را نیز جای‌گزین نمود.

کوپر و همکاران [۱۹]، در تحقیق‌های خود برای اولین‌بار، اصطلاح تحلیل پوششی داده‌های نادقیق را معرفی کردند. منظور از این اصطلاح، مدل‌هایی است که از اضافه کردن داده‌های بازه‌ای وترتیبی، به مدل های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها به دست آمده است.

۳ مدل ابرکارایی اندرسن – پیترسن (AP)

با به کار بردن مدل‌های DEA جهت به دست آوردن کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده معمولاً بیش از یک DMU کارا ارزیابی می‌شود، که رتبه‌بندی این واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ی کارا، از اهمیت خاصی برخوردار می‌باشد. در طول سال‌های اخیر، مطالعات زیادی برای رتبه‌بندی DMUهای کارا صورت گرفته است. نقطه مشترک این مطالعات و تحقیقات در این است که DMU مورد ارزیابی جهت رتبه‌بندی را از مجموعه واحدهای تصمیم‌گیرنده مجموعه امکان تولید حذف نموده، و مدل DEA تعدیل یافته مورد نظر را برای محاسبه ابرکارایی DMU مورد ارزیابی با استفاده از DMUهای باقی مانده حل می‌کنند. معروف‌ترین و اولین این مدل‌ها، مدل پیشنهاد شده توسط اندرسن و پیترسن می‌باشد که به مدل AP معروف است که ضمن معرفی آن، این مدل با داده‌های ترتیبی نیز توسعه داده می‌شود.

مدل AP در سال ۱۹۹۳ توسط اندرسن و پیترسن [۲-۲۱] پیشنهاد گردید. آن‌ها جهت رتبه‌بندی، DMU_k مورد ارزیابی را از مجموعه امکان تولید حذف کردند و مجموعه امکان تولید جدیدی به صورت زیر تعریف کردند:

$$T_{AP} = \left\{ (x, y) \mid x \ge \sum_{j=1, j \ne k}^{n} \lambda_j x_j, y \le \sum_{j=1, j \ne k}^{n} \lambda_j y_j, \lambda_j \ge 0, \ j = 1, \ldots, n, \ j \ne k \right\} \tag{۸}$$

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

در مدل AP برای محاسبه کارایی DMU_k جهت رتبه‌بندی حرکت به سوی مرز در امتداد شعاعی صورت می‌گیرد. این حرکت، مرز T_{AP} را ممکن است در نقطه‌ای قطع کند، که در این صورت مدل شدنی است. یا ممکن است T_{AP} را اصلاً قطع نکند، که در این صورت مدل نشدنی می‌گردد. یا ممکن است در فاصله بسیار دور T_{AP} را قطع کند، که در این صورت حالت ناپایداری مشاهده می‌شود. بنابر آنچه گفته شد در مدل AP، هدف پیدا کردن کم‌ترین مقدار θ_k^s است که وقتی در ورودی‌های DMU_k ضرب شود، DMU مجازی ساخته شده روی مرز T_{AP} قرار گیرد. به بیان ریاضی هدف حل مدل زیر است:

$$\begin{aligned} &Min \ \ \theta_k^s \\ &s.t. \qquad \left(\theta_k^s x_k , y_k\right) \in T_{AP} \end{aligned} \tag{۹}$$

بنابر رابطه (۸) ، مدل (۹) معادل مدل (۱۰) است.

$$\begin{aligned} &Min \ \ \theta_k^s \\ &s.t. \qquad \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \theta_k^s x_{ik}, \qquad i = 1,...,m, \\ &\qquad\quad \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{rk}, \qquad r = 1,...,s, \\ &\qquad\quad \lambda_j \ge 0, \qquad\qquad j = 1,...,n;\ j \neq k, \end{aligned} \tag{۱۰}$$

اصطلاحاً به مدل (۱۰)، فرم پوششی مدل AP (در ماهیت ورودی) گفته می‌شود.

تعریف ۱ DMU_k ابرکارا است اگر $\theta_k^{s*} > 1$ باشد و همچنین DMU_k غیرکارا است اگر $\theta_k^{s*} < 1$ باشد.

دوگان مدل (۱۰) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &Max \ \ \pi_k = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} \\ &s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1, \\ &\qquad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0, \qquad j = 1,...,n, j \neq k, \\ &\qquad u_r \ge 0, \qquad\qquad r = 1,...,s, \\ &\qquad v_i \ge 0, \qquad\qquad i = 1,...,m, \end{aligned} \tag{۱۱}$$

٤ مدل ابرکارایی AP با داده‌های ترتیبی

با کمک گرفتن از قضیه ۱ ژو [۲۰]، قضیه زیر را در ارتباط با مدل (۱۱) بیان می‌کنیم:

قضیه ۱ مدل (۱۱) را در نظر بگیرید و رابطه (۱) را به عنوان محدودیت به مدل (۱۱) اضافه کنید، فرض کنید DMU_k تحت ارزیابی باشد، جواب بهینه این مساله برای DMU_k در $x_{ik} = x_{ik}^L$ و $y_{rk} = y_{rk}^U$ و برای DMU_j $(j \neq k)$ در $x_{ij} = x_{ij}^U$ و $y_{rj} = y_{rj}^L$ رخ می‌دهد.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

اثبات: اثبات این قضیه مشابه قضیه ۱ ژو [۲۰]، می‌باشد.

٤-١ تبدیل داده‌های ترتیبی ضعیف به داده‌های دقیق

DMU_k را در نظر بگیرید، رابطه‌های (۳) و (۴) را به عنوان محدودیت به مدل (۱۱) اضافه می‌کنیم و مدل به‌دست آمده را حل می‌کنیم، و یک مجموعه از جواب‌های بهینه x_{ij}^* و y_{rj}^* با مقدار تابع هدف π_k^* به‌دست می‌آوریم. داریم [۲۰]:

$$x_{i1}^* \le x_{i2}^* \le \ldots \le x_{i,k-1}^* \le x_{ik}^* \le x_{i,k+1}^* \le \ldots \le x_{in}^* \quad (i \in DI), \tag{۱۲}$$

$$y_{r1}^* \le y_{r2}^* \le \ldots \le y_{r,k-1}^* \le y_{rk}^* \le y_{r,k+1}^* \le \ldots \le y_{rm}^* \quad (r \in DO), \tag{۱۳}$$

از طرفی با توجه به خاصیت پایا بودن نسبت به تغییر واحد ρx_{ij}^* $(i \in DI)$ و ρy_{rj}^* $(r \in DO)$ نیز جواب بهینه برای DMU_k است، ρ که عددی ثابت و مثبت است؛ بنابراین می‌توانیم قرار دهیم $x_{ik}^* = y_{rk}^* = 1$، پس روابط (۱۲) و (۱۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$0 \le x_{i1}^* \le x_{i2}^* \le \ldots \le x_{i,k-1}^* \le x_{ik}^* (=1) \le x_{i,k+1}^* \le \ldots \le x_{in}^* \le M \quad (i \in DI), \tag{۱۴}$$

$$0 \le y_{r1}^* \le y_{r2}^* \le \ldots \le y_{r,k-1}^* \le y_{rk}^* (=1) \le y_{r,k+1}^* \le \ldots \le y_{rm}^* \le M \quad (r \in DO), \tag{۱۵}$$

که M عددی به اندازه‌ی کافی بزرگ است. اکنون برای ورودی‌ها و خروجی‌هایی که در رابطه‌ی ترتیبی ضعیف صدق می‌کند ما بازه‌های زیر را قرار می‌دهیم:

$$y_{rj} \in [0,1] \quad \text{و} \quad x_{ij} \in [0,1] \quad \text{برای} \quad DMU_j \quad (j = 1,\ldots,k-1), \tag{۱۶}$$

$$y_{rj} \in [1,M] \quad \text{و} \quad x_{ij} \in [1,M] \quad \text{برای} \quad DMU_j \quad (j = k+1,\ldots,n), \tag{۱۷}$$

اکنون بنا بر قضیه ۱ می‌دانیم، که برای DMU_k اگر $i \in DI$ و $r \in DO$ باشد مقدار π_k^* بدون تغییر باقی می‌ماند و نیز اگر $x_{ik} = y_{rk} = 1$، (۱۶) و (۱۷) برقرار می‌شوند و از این رو برای DMU_j $(j = 1,\ldots,k-1)$، $y_{rj} = 0$ (کران پایین، y_{rj}^L) و $x_{ij} = 1$ (کران بالا، x_{ij}^U) برای DMU_j $(j = k+1,\ldots,n)$، $y_{rj} = 1$ (کران پایین، y_{rj}^L) و $x_{ij} = M$ (کران بالا، x_{ij}^U) به عنوان داده‌های دقیق انتخاب می‌شود.

٤-٢ دقیق‌سازی داده‌های بازه‌ای

مدل (۱۰) را در نظر بگیرید و رابطه (۱) را به عنوان محدودیت به مدل (۱۰) اضافه می‌کنیم، در این صورت داریم:

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

$$
\begin{aligned}
&Min \ \ \theta_k^s \\
&s.t. \quad \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \lambda_j \left[x_{ij}^L , x_{ij}^U \right] \le \theta_k^s \left[x_{ik}^L , x_{ik}^U \right], \qquad i = 1,...,m, \\
&\quad \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \lambda_j \left[y_{rj}^L , y_{rj}^U \right] \ge \left[y_{rk}^L , y_{rk}^U \right], \qquad r = 1,...,s, \\
&\quad \lambda_j \ge 0, \qquad j = 1,...,n;\ j \neq k,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

هریک از مدل‌های DEA با داده های بازه‌ای یک مساله غیرخطی را در تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای تشکیل می‌دهد که حل آن طبق روش‌های موجود برای مسایل DEA امکان‌پذیر نیست و نیاز به استفاده از الگوریتم‌هایی خاص برای حل این گونه مدل‌هاست.

با اقتباس از روش دسپوتیس و اسمیرلیس [۲۲-۲۳]، مدل (۱۸) را حل می کنیم. مدل (۱۸) یک مدل بازه‌ای است پس یک مساله غیرخطی است برای تبدیل مدل غیرخطی فوق به مدل خطی تبدیل‌های زیر را انجام می‌دهیم:

$$
\begin{aligned}
&x_{ij}^L \le x_{ij} \le x_{ij}^U \xrightarrow{0 \le \alpha_{ij} \le 1} x_{ij} = \alpha_{ij} x_{ij}^U + (1-\alpha_{ij}) x_{ij}^L \Rightarrow x_{ij} = x_{ij}^L + \alpha_{ij} (x_{ij}^U - x_{ij}^L), \\
&j \neq k \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j \neq k \\
&x_{ik}^L \le x_{ik} \le x_{ik}^U \xrightarrow{0 \le \alpha_{ik} \le 1} x_{ik} = \alpha_{ik} x_{ik}^U + (1-\alpha_{ik}) x_{ik}^L \Rightarrow x_{ik} = x_{ik}^L + \alpha_{ik} (x_{ik}^U - x_{ik}^L), \\
&y_{rj}^L \le y_{rj} \le y_{rj}^U \xrightarrow{0 \le \beta_{rj} \le 1} y_{rj} = \beta_{rj} y_{rj}^U + (1-\beta_{rj}) y_{rj}^L \Rightarrow y_{rj} = y_{rj}^L + \beta_{rj} (y_{rj}^U - y_{rj}^L), \\
&j \neq k \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j \neq k \\
&y_{rk}^L \le y_{rk} \le y_{rk}^U \xrightarrow{0 \le \beta_{rk} \le 1} y_{rk} = \beta_{rk} y_{rk}^U + (1-\beta_{rk}) y_{rk}^L \Rightarrow y_{rk} = y_{rk}^L + \beta_{rk} (y_{rk}^U - y_{rk}^L),
\end{aligned}
\tag{19}
$$

با جای‌گزینی رابطه (۱۹) در مدل (۱۸) داریم:

$$
\begin{aligned}
&Min \ \ \theta_k^s \\
&s.t. \ \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \lambda_j x_{ij}^L + \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \lambda_j \alpha_{ij} (x_{ij}^U - x_{ij}^L) \le \theta_k^s (x_{ik}^L + \alpha_{ik} (x_{ik}^U - x_{ik}^L)), \quad i = 1,...,m, \\
&\quad \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \lambda_j y_{rj}^L + \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \lambda_j \beta_{rj} (y_{rj}^U - y_{rj}^L) \ge y_{rk}^L + \beta_{rk} (y_{rk}^U - y_{rk}^L), \qquad r = 1,...,s, \\
&\quad \lambda_j \ge 0, \qquad j = 1,...,n;\ j \neq k,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

مدل (۲۰) به دلیل وجود عوامل $\lambda_j \alpha_{ij}$ و $\lambda_j \beta_{rj}$ غیرخطی است، که با تغییر متغیر $p_{ij} = \lambda_j \alpha_{ij}$ $j \neq k$ و $q_{rj} = \lambda_j \beta_{rj}$ $j \neq k$ به برنامه‌ریزی خطی تبدیل می گردد، و چون $0 \le q_{rj} \le \lambda_j$ و $0 \le \beta_{rj} \le 1$ و $\lambda_j \ge 0$ پس $0 \le p_{ij} \le \lambda_j$ و $0 \le q_{rj} \le \lambda_j$.

با اعمال این تغییر متغیرها داریم:

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

$$
\begin{aligned}
&Min \ \ \theta_k^s \\
&s.t. \quad \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \lambda_j x_{ij}^L + \sum_{j=1, j\neq k}^{n} p_{ij}(x_{ij}^U - x_{ij}^L) \le \theta_k^s (x_{ik}^L + \alpha_{ik}(x_{ik}^U - x_{ik}^L)), \qquad i = 1,...,m, \\
&\qquad \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \lambda_j y_{rj}^L + \sum_{j=1, j\neq k}^{n} q_{rj}(y_{rj}^U - y_{rj}^L) \ge y_{rk}^L + \beta_{rk}(y_{rk}^U - y_{rk}^L), \qquad r = 1,...,s, \\
&\qquad \lambda_j \ge 0, \qquad j = 1,...,n;\ j \neq k, \\
&\qquad p_{ij} - \lambda_j \le 0, \qquad j = 1,...,n;\ j \neq k, \\
&\qquad q_{rj} - \lambda_j \le 0, \qquad j = 1,...,n;\ j \neq k, \\
&\qquad p_{ij} \ge 0, \qquad j = 1,...,n;\ j \neq k, \\
&\qquad q_{rj} \ge 0, \qquad j = 1,...,n;\ j \neq k,
\end{aligned}
\tag{۲۱}
$$

مدل (۲۱) یک مدل مینیمم‌سازی است در نتیجه هر چه قدر ناحیه شدنی بزرگ‌تر شود جواب بهینه بدتر (بزرگ‌تر) نمی‌شود؛ بنابراین برای داشتن بهترین جواب (کران پایین ابرکارایی) داریم:

$$
\left.\begin{array}{ll} (x_{ik}^U - x_{ik}^L) \ge 0 & i = 1,...,m \\ 0 \le \alpha_{ik} \le 1 & i = 1,...,m \\ \theta_k^s \ge 0 & \end{array}\right| \ \alpha_{ik} = 1
\tag{۲۲}
$$

$$
\left.\begin{array}{ll} (y_{rk}^U - y_{rk}^L) \ge 0 & r = 1,...,s \\ 0 \le \beta_{rk} \le 1 & r = 1,...,s \end{array}\right| \ \beta_{rk} = 0
$$

$$
\left.\begin{array}{ll} (x_{ij}^U - x_{ij}^L) \ge 0 & j = 1,...,n, j \neq k \\ 0 \le p_{ij} \le \lambda_j & j = 1,...,n, j \neq k \end{array}\right| \ p_{ij} = 0
$$

$$
\left.\begin{array}{ll} (y_{rj}^U - y_{rj}^L) \ge 0 & j = 1,...,n, j \neq k \\ 0 \le q_{rj} \le \lambda_j & j = 1,...,n, j \neq k \end{array}\right| \ q_{rj} = \lambda_j
$$

با اعمال روابط (۲۲) در مدل (۲۱) مدل زیر به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
&l_k^* = Min \ \ \theta_k^s \\
&s.t. \quad \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \lambda_j x_{ij}^L \le \theta_k^s x_{ik}^U, \qquad i = 1,...,m, \\
&\qquad \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \lambda_j y_{rj}^U \ge y_{rk}^L, \qquad r = 1,...,s, \\
&\qquad \lambda_j \ge 0, \qquad j = 1,...,n;\ j \neq k,
\end{aligned}
\tag{۲۳}
$$

به طور مشابه برای داشتن بدترین جواب (کران بالای ابرکارایی) باید پارامترها را چنان اختیار کنیم که ناحیه شدنی تا حد امکان کوچک گردد؛ لذا با اعمال شرایط زیر نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

$$\left.\begin{array}{ll}(x_{ik}^{U}-x_{ik}^{L})\geq 0 & i=1,\ldots,m\\ 0\leq \alpha_{ik}\leq 1 & i=1,\ldots,m\end{array}\right\rangle \alpha_{ik}=0$$
$$\left.\begin{array}{ll}(y_{rk}^{U}-y_{rk}^{L})\geq 0 & r=1,\ldots,s\\ 0\leq \beta_{rk}\leq 1 & r=1,\ldots,s\end{array}\right\rangle \beta_{rk}=1 \qquad (24)$$
$$\left.\begin{array}{ll}(x_{ij}^{U}-x_{ij}^{L})\geq 0 & j=1,\ldots,n,\ j\neq k\\ 0\leq p_{ij}\leq \lambda_j & j=1,\ldots,n,\ j\neq k\end{array}\right\rangle p_{ij}=\lambda_j$$
$$\left.\begin{array}{ll}(y_{rj}^{U}-y_{rj}^{L})\geq 0 & j=1,\ldots,n,\ j\neq k\\ 0\leq q_{rj}\leq \lambda_j & j=1,\ldots,n,\ j\neq k\end{array}\right\rangle q_{rj}=0$$

با اعمال رابطه (۲۴) در مدل (۲۱) مدل زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & u_k^{*}=Min\ \ \theta_k^{s}\\ & s.t. \quad \sum_{j=1,j\neq k}^{n}\lambda_j x_{ij}^{U}\leq \theta_k^{s}x_{ik}^{L}, \qquad i=1,\ldots,m,\\ & \qquad \sum_{j=1,j\neq k}^{n}\lambda_j y_{rj}^{L}\geq y_{rk}^{U}, \qquad r=1,\ldots,s,\\ & \qquad \lambda_j\geq 0, \qquad j=1,\ldots,n;\ j\neq k, \end{aligned} \qquad (25)$$

بنابراین هر DMU که با مدل (۱۸) ارزیابی می‌گردد، مقدار ابرکارایی آن در یک بازه قرار می‌گیرد، که کران پایین ابرکارایی؛ یعنی l_k^{*} از حل مدل (۲۳) و کران بالای ابرکارایی؛ یعنی u_k^{*} از حل مدل (۲۵) به‌دست می‌آید.

در قسمت ۴-۱ داده‌های ترتیبی ضعیف را به داده‌های بازه‌ای تبدیل کردیم، طبق روش دقیق‌سازی داده‌های بازه‌ای که در قسمت ۴-۲ بیان شد می‌توان کران‌های ابرکارایی را برای داده‌های ترتیبی ضعیف به صورت زیر به‌دست آورد.

کران پایین ابرکارایی نیز وقتی به‌دست می‌آید که:

$x_{ij}=0$ برای $DMU_j\ (j=1,\ldots,k-1)$ و $x_{ij}=1$ برای $DMU_j\ (j=k+1,\ldots,n),$ (۲۶)

$y_{rj}=1$ برای $DMU_j\ (j=1,\ldots,k-1)$ و $y_{rj}=M$ برای $DMU_j\ (j=k+1,\ldots,n),$ (۲۷)

کران بالای ابرکارایی وقتی حاصل می‌شود که:

$x_{ij}=1$ برای $DMU_j\ (j=1,\ldots,k-1)$ و $x_{ij}=M$ برای $DMU_j\ (j=k+1,\ldots,n),$ (۲۸)

$y_{rj}=1$ برای $DMU_j\ (j=1,\ldots,k-1)$ و $y_{rj}=M$ برای $DMU_j\ (j=k+1,\ldots,n),$ ۲۹)

٤-۳ مثال کاربردی

داده‌های ورودی و خروجی ۸ مرکز خدماتی مخابرات کره جنوبی را که در جدول (۱) ارایه شده است در نظر بگیرید. این داده‌ها مربوط به سال ۱۹۹۶ می‌باشد و از پایگاه‌های اطلاعاتی به‌دست آمده است [۲۴].

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

شاخص‌های ورودی عبارت است از:

۱. نیروی کار (x_1): داده ها متناظر آن در جدول بیانگر تعداد کارمندان می‌باشد. این تعداد شامل نیروهای متخصص برای انجام اموری مانند مسولیت تکنولوژی جدید و تحقیق روی خدمات ماهواره‌ای نمی‌باشد.

۲. هزینه عملیات (x_2): هزینه‌ی مربوط به ارایه خدمات تلفن‌ها و پیجرهای موبایل است. این هزینه شامل هزینه سود، استهلاک، هزینه سرمایه‌گذاری تجهیزات و هزینه‌های کار نمی‌باشد.

۳. سطح مدیریت برای تسهیلات و مشتریان (x_3): این ورودی، تجربه تیم پرسنل را در تسهیل‌سازی و برخورد با مشتریان نشان می‌دهد. بخش مدیریت این عامل را برای تمام شعبه‌ها سالی یک‌بار ارزیابی می‌کند. و نتایج را مبنای افزایش حقوق ها، ترفیع‌ها و پاداش‌ها قرار می‌دهد. داده‌های ستون سوم تنها بیانگر وجود روابط ترتیبی بین مولفه‌های این ورودی است . برای مثال، Kwangju بالاترین رتبه را در بین سایر شعب دارد و Jeju کم‌ترین رتبه را دارد. در واقع داده‌های این ستون بیانگر رابطه‌ی ترتیبی زیر می‌باشد:

$$x_{34} \geq x_{35} \geq x_{33} \geq x_{37} \geq x_{31} \geq x_{36} \geq x_{32} \geq x_{38}$$

شاخص‌های خروجی نیز عبارتند از:

۱. درآمد (y_1): بیانگر مبلغ قبض‌های ارایه خدمات تلفن‌ها و پیجرهای موبایل است.

۲. میزان خرابی وسایل (y_2): تعداد خرابی وسایل را به منظور تعویض نشان می‌دهد.

۳. میزان تکمیل مکالمه (y_3): این شاخص نشان دهنده‌ی نسبت تعداد تماس‌های موفق بر تعداد کل تماس‌هاست. میزان تکمیل مکالمه هر شعبه به طور زیادی وابسته به مشخصه‌های جغرافیایی منطقه است. تاثیر چشمگیر عواملی مانند کوهستان‌ها، زیرگذرها، ساختمان‌های بزرگ و ... روی این خروجی باعث می‌شود که برای میزان تکمیل مکالمه مقدار دقیقی حاصل نشود و این مقدار برای هر شعبه‌ای در محدوده‌های کراندار واقع شود.

جدول ۱. داده های مراکز خدماتی مخابرات کره جنوبی

DMU_j	*name*	(x_1)	(x_2)	(x_3)	(y_1)	(y_2)	(y_3)
۱	Seoul	۱۲۴	۱۸/۲۲	۴	۲۵/۵۳	۸۹/۸	[۸۰,۸۵]
۲	Pusan	۹۵	۹/۲۳	۲	۱۸/۴۳	۹۹/۶	[۸۵,۹۰]
۳	Taegu	۹۲	۸/۰۷	۶	۱۰/۲۹	۸۷	[۷۵,۸۰]
۴	Kwangju	۶۱	۵/۶۲	۸	۸/۳۲	۹۹/۴	۱۰۰
۵	Taejun	۶۳	۵/۳۳	۷	۷/۰۴	۹۶/۴	[۷۰,۷۵]
۶	jeonju	۵۰	۳/۵۳	۳	۶/۴۲	۸۶	[۹۰,۹۵]
۷	Kangnung	۴۰	۳/۵	۵	۲/۲	۷۱	[۸۰,۸۵]
۸	jeju	۱۶	۱/۱۷	۱	۲/۸۷	۹۸	[۹۵,۱۰۰]

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

معمولا عدد M را برابر با تعداد واحد ها در نظر می‌گیرند. در این مثال $M = ۸$.

همان گونه که بیان شد رابطه بین داده‌های ورودی سوم جدول (۱) یک رابطه ترتیبی و هم‌چنین داده‌های خروجی سوم جدول (۱) به صورت داده بازه‌ای است. با توجه به روابط (۲۶) و (۲۷) فرم دقیق این داده‌ها برای به‌دست آوردن کران پایین ابرکارایی در جدول (۲) آمده است.

جدول۲. فرم دقیق داده‌های $x_۳$ و $y_۳$ برای محاسبه کران پایین ابرکارایی

DMU_j	$DMU_۱$	$DMU_۲$	$DMU_۳$	$DMU_۴$	$DMU_۵$	$DMU_۶$	$DMU_۷$	$DMU_۸$
	$x_۳$ $y_۳$	$x_۳$ $y_۳$	$x_۳$ $y_۳$	$x_۳$ $y_۳$	$x_۳$ $y_۳$	$x_۳$ $y_۳$	$x_۳$ $y_۳$	$x_۳$ $y_۳$
۱	۱ ۸۰	۱ ۸۵	۰ ۸۵	۰ ۸۵	۰ ۸۵	۱ ۸۵	۰ ۸۵	۱ ۸۵
۲	۰ ۹۰	۱ ۸۵	۰ ۹۰	۰ ۹۰	۰ ۹۰	۰ ۹۰	۰ ۹۰	۱ ۹۰
۳	۱ ۸۰	۱ ۸۰	۱ ۷۵	۰ ۸۰	۰ ۸۰	۱ ۸۰	۱ ۸۰	۱ ۸۰
۴	۱ ۱۰۰	۱ ۱۰۰	۱ ۱۰۰	۱ ۱۰۰	۱ ۱۰۰	۱ ۱۰۰	۱ ۱۰۰	۱ ۱۰۰
۵	۱ ۷۵	۱ ۷۵	۱ ۷۵	۰ ۷۵	۱ ۷۰	۱ ۷۰	۱ ۷۵	۱ ۷۵
۶	۰ ۹۵	۱ ۹۵	۰ ۹۵	۰ ۹۵	۰ ۹۵	۱ ۹۰	۰ ۹۵	۱ ۹۵
۷	۱ ۸۰	۱ ۸۵	۰ ۸۵	۰ ۸۵	۰ ۸۵	۱ ۸۵	۱ ۸۰	۱ ۸۵
۸	۰ ۱۰۰	۰ ۱۰۰	۰ ۱۰۰	۰ ۱۰۰	۰ ۱۰۰	۰ ۱۰۰	۰ ۱۰۰	۱ ۹۵

به طور مشابه، با توجه به روابط (۲۸) و (۲۹) فرم دقیق داده‌های $x_۳$ و $y_۳$ برای محاسبه‌ی کران بالای ابرکارایی در جدول (۳) آمده است.

جدول ۳. فرم دقیق داده‌های $x_۳$ و $y_۳$ برای محاسبه کران بالای ابرکارایی

DMU_j	$DMU_۱$	$DMU_۲$	$DMU_۳$	$DMU_۴$	$DMU_۵$	$DMU_۶$	$DMU_۷$	$DMU_۸$
	$x_۳$ $y_۳$	$x_۳$ $y_۳$	$x_۳$ $y_۳$	$x_۳$ $y_۳$	$x_۳$ $y_۳$	$x_۳$ $y_۳$	$x_۳$ $y_۳$	$x_۳$ $y_۳$
۱	۱ ۸۵	۸ ۸۰	۱ ۸۰	۱ ۸۰	۱ ۸۰	۸ ۸۰	۱ ۸۰	۸ ۸۰
۲	۱ ۸۵	۱ ۹۰	۱ ۸۵	۱ ۸۵	۱ ۸۵	۱ ۸۵	۱ ۸۵	۸ ۸۵
۳	۸ ۷۵	۸ ۷۵	۱ ۸۰	۱ ۷۵	۱ ۷۵	۱ ۷۵	۸ ۷۵	۸ ۷۵
۴	۸ ۱۰۰	۸ ۱۰۰	۸ ۱۰۰	۱ ۱۰۰	۸ ۱۰۰	۸ ۱۰۰	۸ ۱۰۰	۸ ۱۰۰
۵	۸ ۷۰	۸ ۷۰	۸ ۷۰	۱ ۷۰	۱ ۷۵	۸ ۷۰	۸ ۷۰	۸ ۷۰
۶	۱ ۹۰	۸ ۹۰	۱ ۹۰	۱ ۹۰	۱ ۹۰	۱ ۹۵	۱ ۹۰	۸ ۹۰
۷	۱ ۸۰	۸ ۸۰	۱ ۸۰	۱ ۸۰	۱ ۸۰	۸ ۸۰	۱ ۸۵	۸ ۸۰
۸	۱ ۹۵	۱ ۹۵	۱ ۹۵	۱ ۹۵	۱ ۹۵	۱ ۹۵	۱ ۹۵	۱ ۱۰۰

نتایج ارزیابی کران‌های پایین (l_k^*) و بالای (u_k^*) ابرکارایی (به ترتیب با استفاده از مدل‌های (۲۳) و (۲۵)) در جدول (۴) آمده است.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

جدول ٤. نتایج عددی

DMU_j	l_k^*	u_k^*
۱	۱/۰۶۱۳	۱/۳۸۵۲
۲	۱/۰۳۱۹	۵/۸۱۵۰
۳	۰/۵۹۴۱	۰/۹۱۶۰
۴	۰/۷۱۵۸	۱/۰۸۸۸
۵	۰/۵۹۹۶	۰/۹۹۹۱
۶	۰/۷۴۱۴	۱/۲۷۳۲
۷	۰/۳۲۰۰	۰/۸۹۴۷
۸	۳/۵۴۴۱	۸/۰۰۰

٤-٤ تبدیل داده‌های ترتیبی قوی به داده‌های دقیق

با کمک گرفتن از قضیه ۱ ژو [۲۵]، قضیه زیر را در ارتباط با مدل (۱۱) بیان می‌کنیم:

قضیه ۲ برای هر η، اضافه کردن رابطه (۷) به مدل (۱۱) معادل است با اضافه کردن رابطه $x_{i,k} - x_{i,k-1} \geq \varepsilon$ و $y_{r,k} - y_{r,k-1} \geq \varepsilon$ به مدل (۱۱) در جایی که $\varepsilon \approx 0$.

اثبات: اثبات این قضیه مشابه قضیه۱ ژو [۲۵]، می‌باشد.

روند دقیق‌سازی داده‌های ترتیبی قوی مشابه داده‌های ترتیبی ضعیف است. DMU_k را در نظر بگیرید، رابطه‌های (۵) و (۶) را به عنوان محدودیت به مدل (۱۱) اضافه می‌کنیم و مدل به‌دست آمده را حل می‌کنیم، و یک مجموعه از جواب‌های بهینه x_{ij}^* و y_{rj}^* به‌دست می‌آوریم. داریم [۲۴]:

$$x_{i1}^* \leq x_{i2}^* \leq \ldots \leq x_{i,k-1}^* \leq x_{ik}^* \leq x_{i,k+1}^* \leq \ldots \leq x_{in}^* \quad (i \in DI), \tag{۳۰}$$

$$y_{r1}^* \leq y_{r2}^* \leq \ldots \leq y_{r,k-1}^* \leq y_{rk}^* \leq y_{r,k+1}^* \leq \ldots \leq y_{rn}^* \quad (r \in DO), \tag{۳۱}$$

از طرفی با توجه به خاصیت پایا بودن نسبت به تغییر واحد ρx_{ij}^* $(i \in DI)$ و ρy_{rj}^* $(r \in DO)$ نیز جواب بهینه برای DMU_k است، ρ که عددی ثابت و مثبت است؛ بنابراین می‌توانیم قرار دهیم $x_{ik}^* = y_{rk}^* = ۱$. پس روابط (۳۰) و (۳۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x_{i1}^* \leq x_{i2}^* \leq \ldots \leq x_{i,k-1}^* \leq x_{ik}^* (=۱) \leq x_{i,k+1}^* \leq \ldots \leq x_{in}^* \quad (i \in DI), \tag{۳۲}$$

$$y_{r1}^* < y_{r2}^* < \ldots \leq y_{r,k-1}^* \leq y_{rk}^* (=۱) \leq y_{r,k+1}^* \leq \ldots \leq y_{rn}^* \quad (r \in SO), \tag{۳۳}$$

به عبارت دیگر:

$$y_{r,j+1}^* - y_{rj}^* \geq \eta \quad و \quad x_{i,j+1}^* - x_{ij}^* \geq \eta, \tag{۳۴}$$

با تلفیق رابطه‌های (۳۲) و (۳۳) و (۳۴) می‌توان نوشت:

$$x_{ij}^* (= y_{rj}^*) \leq ۱ - (k-j)\eta \quad برای \ DMU_j \ \ (j = ۱, \ldots, k-۱), \tag{۳۵}$$

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

$$x_{ij}^{*}(=y_{rj}^{*}) \geq 1+(j-k)\eta \quad \text{برای} \quad DMU_j \quad (j=k+1,...,n), \tag{۳۶}$$

از طرفی با توجه به قضیه ۲، همواره یک عدد به اندازه کافی کوچک مانند $\varepsilon \approx 0$ موجود است به طوری‌که:

$$\varepsilon \leq x_{ij}=y_{rj} \leq 1-(k-j)\eta \text{ برای } DMU_j \quad (j=1,...,k-1), \tag{۳۷}$$

$$1+(j-k)\eta \leq x_{ij}=y_{rj} \leq M \quad \text{برای} \quad DMU_j \quad (j=k+1,...,n), \tag{۳۸}$$

که M یک عدد به اندازه کافی بزرگ است. در این صورت عوامل ورودی و خروجی بهینه را می‌توان به فرم داده‌های بازه‌ای بیان کرد. برای سایر داده‌های ورودی و خروجی نیز این مطلب برقرار است؛ بنابراین برای حاصل شدن کران بالای ابرکارایی قرارمی‌دهیم:

$$x_{ij}=1-(k-j)\eta \text{ برای} DMU_j \ (j=1,...,k-1) \text{ و } x_{ij} \geq M \quad \text{برای} DMU_j \ (j=k+1,...,n), \tag{۳۹}$$

$$y_{rj} \leq \varepsilon \text{ برای } DMU_j \ (j=1,...,k-1) \text{ و } y_{rj}=1+(j-k)\eta \text{ برای } DMU_j \ (j=k+1,...,n), \tag{۴۰}$$

برای محاسبه‌ی کران پایین ابرکارایی نیز قرار می‌دهیم:

$$x_{ij} \leq \varepsilon \text{ برای } DMU_j \ (j=1,...,k-1) \text{ و } x_{ij}=1+(j-k)\eta \text{ برای } DMU_j \ (j=k+1,...,n), \tag{۴۱}$$

$$y_{rj}=1-(k-j)\eta \text{ برای } DMU_j \ (j=1,...,k-1) \text{ و } y_{rj} \geq M \text{ برای } DMU_j \ (j=k+1,...,n), \tag{۴۲}$$

مقدار ابرکارایی مدل‌های DEA با روابط ترتیبی قوی وابسته به مقدار η است؛ یعنی برای محاسبه‌ی مقدار ابر کارایی لازم است که مقدار η را تعیین کنیم. در این صورت عوامل ورودی و خروجی به صورت داده‌های دقیق برآورد می‌شود و مساله غیرخطی $IDEA$ به یک مساله برنامه‌ریزی خطی قابل حل تبدیل می‌گردد.

برای تعیین η مدل (۱۱) را با داده‌های ورودی و خروجی ترتیبی قوی در نظر بگیرید، مدل حاصل به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&Max \ \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} \\
&s.t. \ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik}=1, \\
&\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}-\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0, \qquad j=1,...,n;\ j \neq k, \\
&u_r \geq 0, \qquad r=1,...,s, \\
&v_i \geq 0, \qquad i=1,...,m, \\
&x_{ij}^{\cdot}-x_{i,j+1} \geq \eta, x_{i,j+1}-x_{i,j+2} \geq \eta,...,x_{in} \geq \eta, \\
&y_{rj}^{\cdot}-y_{r,j+1} \geq \eta, y_{r,j+1}-y_{r,j+2} \geq \eta,...,y_{rm} \geq \eta,
\end{aligned} \tag{۴۳}$$

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

مدل فوق یک مدل غیرخطی است که در آن $x_{ij}^{-} = \max_j \{x_{ij}\}$ و $y_{rj}^{-} = \min_j \{y_{ij}\}$. با به کار بردن تکنیک تغییر متغیر:

$$Y_r = \mu_r y_r ; \quad \forall r$$
$$X_i = v_i x_i ; \quad \forall i$$

مدل غیرخطی مذکور به مدل خطی زیر تبدیل می‌گردد:

$$\begin{aligned} Max \quad & \sum_{r=1}^{s} Y_{rk} \\ s.t. \quad & \sum_{i=1}^{m} X_{ik} = 1, \\ & \sum_{r=1}^{s} Y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} X_{ij} \le 0, \qquad j = 1,...,n ;\ j \ne k , \\ & X_{ij}^{-} - X_{i,j+1} \ge \eta , X_{i,j+1} - X_{i,j+2} \ge \eta ,..., X_{in} \ge \eta , \\ & Y_{rj}^{-} - Y_{r,j+1} \ge \eta , Y_{r,j+1} - Y_{r,j+2} \ge \eta ,..., Y_{rm} \ge \eta , \end{aligned} \tag{۴۴}$$

که $X_{ij}^{-} = \max_j \{X_{ij}\}$ و $Y_{rj}^{-} = \min_j \{Y_{ij}\}$.

با اقتباس از روش کوپر و همکارانش [۲۴] برای تعیین η مدل زیر را معرفی می‌کنیم که با محاسبه مقدار بهینه η_j^* برای هر واحد، کم‌ترین مقدار آن‌ها را به عنوان η در نظر می‌گیریم، مدل پیشنهادی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \eta_k^* = Max \quad & \eta \\ s.t. \quad & \sum_{i=1}^{m} X_{ik} = 1, \\ & \sum_{r=1}^{s} Y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} X_{ij} \le 0, \qquad j = 1,...,n ;\ j \ne k , \\ & X_{ij}^{-} - X_{i,j+1} \ge \eta , X_{i,j+1} - X_{i,j+2} \ge \eta ,..., X_{in} \ge \eta , \\ & Y_{rj}^{-} - Y_{r,j+1} \ge \eta , Y_{r,j+1} - Y_{r,j+2} \ge \eta ,..., Y_{rm} \ge \eta , \end{aligned} \tag{۴۵}$$

η مورد نظر نیز برابر است با $\eta = \min_j \{\eta_j^*\}$.

٤-٥ مثال کاربردی

مثال کاربردی بخش ۳-۳ را در نظر بگیرید. فرض کنید داده‌های ورودی سوم در جدول (۱) بیانگر رابطه‌ی ترتیبی قوی زیر باشد.

$$x_{۳۴} > x_{۳۵} > x_{۳۳} > x_{۳۷} > x_{۳۱} > x_{۳۶} > x_{۳۲} > x_{۳۸}$$

این رابطه را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$x_{۳۴} - x_{۳۵} \ge \eta , x_{۳۵} - x_{۳۳} \ge \eta , x_{۳۳} - x_{۳۷} \ge \eta , x_{۳۷} - x_{۳۱} \ge \eta ,$$
$$x_{۳۱} - x_{۳۶} \ge \eta \ , \ x_{۳۶} - x_{۳۲} \ge \eta \ , \ x_{۳۲} - x_{۳۸} \ge \eta \ , \ x_{۳۸} \ge \eta ,$$

چون داده‌های خروجی به صورت ترتیبی قوی نمی‌باشد؛ بنابراین مقدار η را می‌توان از حل مدل زیر محاسبه کرد:

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

$$\eta_k^* = Max \ \ \eta$$

$$s.t. \ \ \sum_{i=1}^{m} X_{ik} = 1,$$

$$\sum_{r=1}^{s} Y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} X_{ij} \le 0, \qquad j = 1,...,n;\ j \ne k,$$

$$x_{34} - x_{35} \ge \eta, x_{35} - x_{33} \ge \eta, x_{33} - x_{37} \ge \eta, x_{37} - x_{31} \ge \eta,$$

$$x_{31} - x_{36} \ge \eta\ ,\ x_{36} - x_{32} \ge \eta\ ,\ x_{32} - x_{38} \ge \eta\ ,\ x_{38} \ge \eta,$$

مقادیر η_j^* برای هر DMU در جدول (۵) آمده است.

جدول ۵. مقادیر بهینه η_j^*

DMU_j	η_j^*
۱	۰/۲۵۰
۲	۰/۵
۳	۰/۱۶۷
۴	۰/۱۲۵
۵	۰/۱۴۳
۶	۰/۳۳۳
۷	۰/۲۰۰
۸	۱

کم‌ترین مقدار η_j^* به DMU_4 اختصاص دارد که برابر۰/۱۲۵ می‌باشد . از این رو $\eta = 0/125$.

با توجه به رابطه (۳۹)، فرم دقیق داده‌های x_3 برای محاسبه کران بالای ابرکارایی در جدول (۶) آمده است.

جدول ٦. مقادیر دقیق (x_3) برای محاسبه کران بالای ابرکارایی

DMU_j	DMU_1^*	DMU_2	DMU_3	DMU_4	DMU_5	DMU_6	DMU_7	DMU_8
۱	۱	۹	۰/۷۵	۰/۵	۰/۶۲۵	۸	۰/۸۷۵	۱۰
۲	۰/۷۵	۱	۰/۵	۰/۲۵	۰/۳۷۵	۰/۸۷۵	۰/۶۲۵	۸
۳	۹	۱۱	۱	۰/۷۵	۰/۸۷۵	۱۰	۸	۱۲
۴	۱۱	۱۳	۹	۱	۸	۱۲	۱۰	۱۴
۵	۱۰	۱۲	۸	۰/۸۷۵	۱	۱۱	۹	۱۳
۶	۰/۸۷۵	۸	۰/۶۲۵	۰/۳۷۵	۰/۵	۱	۰/۷۵	۹
۷	۸	۱۰	۰/۸۷۵	۰/۶۲۵	۰/۷۵	۹	۱	۱۱
۸	۰/۶۲۵	۰/۸۷۵	۰/۳۷۵	۰/۱۲۵	۰/۲۵	۰/۷۵	۰/۵	۱

*داده ها در این ستون نشان داده شده مقادیر دقیق x_3 برای هر $(j = 1,...,8)$ DMU_j هنگامی که DMU_1 تحت ارزیابی باشد.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

فرم دقیق داده‌های بردار بازه ای y_3 برای محاسبه کران بالای ابرکارایی نیز همانند جدول (۳) می‌باشد.
نتایج حاصل از محاسبه کران بالای ابرکارایی(با استفاده از مدل (۲۵)) در جدول (۷) آمده است:

جدول ۷. نتایج عددی

DMU_j	u_k^*
۱	۱/۰۶۱۳
۲	۵/۶۱۸۹
۳	۰/۶۰۲۵
۴	۰/۷۱۶۶
۵	۰/۵۹۹۶
۶	۰/۸۴۴۳
۷	۰/۴۴۷۴
۸	۹/۴۱۱۸

اگر $\eta = ۰/۰۶۲۵$ را بگیریم، در این صورت با توجه به رابطه (۳۹) فرم دقیق داده‌های x_3 برای محاسبه کران بالای ابرکارایی در جدول (۸) آمده است.

جدول ۸. مقادیر دقیق (x_3) برای محاسبه کران بالای ابرکارایی

DMU_j	DMU_1	DMU_2	DMU_3	DMU_4	DMU_5	DMU_6	DMU_7	DMU_8
۱	۱	۹	۰/۸۷۵	۰/۷۵	۰/۸۱۲۵	۸	۰/۹۳۷۵	۱۰
۲	۰/۸۷۵	۱	۰/۷۵	۰/۶۲۵	۰/۶۸۷۵	۰/۹۳۷۵	۰/۸۱۲۵	۸
۳	۹	۱۱	۱	۰/۸۷۵	۰/۹۳۷۵	۱۰	۸	۱۲
۴	۱۱	۱۳	۹	۱	۸	۱۲	۱۰	۱۴
۵	۱۰	۱۲	۸	۰/۹۳۷۵	۱	۱۱	۹	۱۳
۶	۰/۹۳۷۵	۸	۰/۸۱۲۵	۰/۶۸۷۵	/۷۵	۱	۰/۸۷۵	۹
۷	۸	۱۰	۰/۹۳۷۵	۰/۸۱۲۵	۰/۸۷۵	۹	۱	۱۱
۸	۰/۸۱۲۵	۰/۹۳۷۵	۰/۶۸۷۵	۰/۵۶۲۵	۰/۶۲۵	۰/۸۷۵	۰/۷۵	۱

فرم دقیق داده‌های بردار بازه‌ای y_3 برای محاسبه کران بالای ابرکارایی نیز همانند جدول (۳) می‌باشد.
نتایج حاصل از محاسبه کران بالای ابرکارایی(با استفاده از مدل (۲۵)) در جدول (۹) آمده است:

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

جدول ۹. نتایج عددی

DMU_j	u_k^*
۱	۱/۲۱۲۱
۲	۶/۰۲۰۳
۳	۰/۶۴۵۹
۴	۰/۷۱۶۶
۵	۰/۶۲۹۰
۶	۰/۹۰۹۶
۷	۰/۶۷۱۱
۸	۹/۴۱۱۸

مقایسه کران بالای ابرکارایی در جدول‌های (۷) و (۹) نشان می‌دهد که هر چه مقدار η بزرگ‌تر باشد مقدار ابرکارایی بدتر (u_k^* تغییری نمی‌کند یا کم‌تر می‌شود) خواهد شد.

با اختیار کردن $\varepsilon = ۷\times۱۰^{-۵}$ و با توجه به رابطه (۴۱) فرم دقیق داده‌های $x_۳$ برای محاسبه کران پایین ابرکارایی مطابق جدول (۱۰) ارایه شده است.

جدول ۱۰. مقادیر دقیق ($x_۳$) برای محاسبه کران پایین ابرکارایی

DMU_j	$DMU_۱$	$DMU_۲$	$DMU_۳$	$DMU_۴$	$DMU_۵$	$DMU_۶$	$DMU_۷$	$DMU_۸$
۱	۱	۱/۲۵	۰/۰۰۰۰۶	۰/۰۰۰۰۴	۰/۰۰۰۰۵	۱/۱۲۵	۰/۰۰۰۰۷	۱/۳۷۵
۲	۰/۰۰۰۰۶	۱	۰/۰۰۰۰۴	۰/۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰۳	۰/۰۰۰۰۷	۰/۰۰۰۰۵	۱/۱۲۵
۳	۱/۲۵	۱/۵	۱	۰/۰۰۰۰۶	۰/۰۰۰۰۷	۱/۳۷۵	۱/۱۲۵	۱/۶۲۵
۴	۱/۵	۱/۷۵	۱/۲۵	۱	۱/۱۲۵	۱/۶۲۵	۱/۳۷۵	۱/۸۷۵
۵	۱/۳۷۵	۱/۶۲۵	۱/۱۲۵	۰/۰۰۰۰۷	۱	۱/۵	۱/۲۵	۱/۷۵
۶	۰/۰۰۰۰۷	۱/۱۲۵	۰/۰۰۰۰۵	۰/۰۰۰۰۳	۰/۰۰۰۰۴	۱	۰/۰۰۰۰۶	۱/۲۵
۷	۱/۱۲۵	۱/۳۷۵	۰/۰۰۰۰۷	۰/۰۰۰۰۵	۰/۰۰۰۰۶	۱/۲۵	۱	۱/۵
۸	۰/۰۰۰۰۵	۰/۰۰۰۰۷	۰/۰۰۰۰۳	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰۶	۰/۰۰۰۰۴	۱

فرم دقیق داده‌های بردار بازه‌ای $y_۳$ برای محاسبه کران پایین ابرکارایی نیز همانند جدول (۲) می‌باشد.

نتایج حاصل از محاسبه کران پایین ابرکارایی (با استفاده از مدل(۲۳)) در جدول (۱۱) ارایه شده است:

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

جدول ۱۱. نتایج عددی

DMU_j	l_k^*
۱	۱/۰۶۱۳
۲	۱/۰۳۱۹
۳	۰/۵۹۴۱
۴	۰/۷۱۵۸
۵	۰/۵۹۹۶
۶	۰/۷۴۱۴
۷	۰/۳۲۰۰
۸	۳/۵۴۴۱

٤-٦ رده‌بندی ابرکارایی

فرض کنید l_k^* کران پایین ابرکارایی و u_k^* کران بالای ابرکارایی در مسایل $IDEA$ باشد، در این صورت بر مبنای مقادیر ابرکارایی، رده‌بندی زیر از DMU ها انجام می‌شود:

۱- DMU_k ابرکارا است هرگاه : $l_k^* > ۱$.

۲- DMU_k ناکارا است هرگاه : $u_k^* < ۱$.

۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این مقاله مدل ابرکارایی اندرسن – پیترسن در حالت بازده به مقیاس ثابت با داده‌های ترتیبی در تحلیل پوششی داده‌های نادقیق توسعه داده شده است. و چگونگی تبدیل مساله اندازه‌گیری ابرکارایی در $IDEA$ به یک مساله خطی قابل حل در DEA شرح داده شده است و توانستیم جواب ابرکارایی را در مسایل تحلیل پوششی داده‌های ترتیبی تعیین نماییم، برای تحقیقات آتی پیشنهاد می‌گردد مدل ابرکارایی اندرسن – پیترسن نیز با فرض داده‌های فازی توسعه داده شود.

منابع

[۲۳] نورا، ع.ع.، یحیی پور م.ت.، (۱۳۸۴). رتبه بندی تحلیل پوششی داده های فازی برمبنای داده های آماری و فاصله اطمینان آماری. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن،(۷)۲، ۴۰-۴۴.

[1] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 2(6): 429-444.

[2] Andersen, P., Petersen, N. C., (1993). A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. Management Science, 39(10): 1261-1264.

[3] Doyle, J.,Green, R., (1993). Data Envelopment Analysis and Multiple Criteria Decision Making. Omega, 21(6): 713-715.

[4] Doyle, J., Green, R., (1994). Efficiency and Cross- Efficiency in DEA: Derivations , meanings and uses. Journal of the Operational Research Society, 45(5): 567-578.

[5] Seiford, L. M, Zhu, J., (1999). Infeasibility of Super Efficiency Data Envelopment Analysis Models. INFORS, 37(2): 174-187.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[6] Zhu, J., (2001). Super Efficiency and DEA Sensitivity Analysis. European Journal of Operational Research, 129(2): 443-455.
[7] Li, S., Jahanshahloo, G. R., Khodabakhshi, M., (2007). A super-efficiency model for ranking efficient units in data envelopment analysis. Applied Mathematics and Computation, 184(2): 638-648.
[8] Khodabakhshi, M., (2007). A super-efficiency model based on improved outputs in data envelopment analysis. Applied Mathematics and Computation, 184(2): 695-703.
[9] Jahanshahloo, G. R., Khodabakhshi, M., Hosseinzadeh Lotfi, F., Moazami Goudarzi, MR., (2011). A cross-efficiency model based on super-efficiency for ranking units through the TOPSIS approach and its extension to the interval case. Mathematical and Computer Modelling, 53(9-10): 1946-1955.
[10] Payan, A., Hosseinzadeh Lotfi, F., Noora, AA., Khodabakhshi, M., (2011). A modified common set of weights method to complete ranking DMUs. Interpretation, 5(7): 1143-1153.
[11] Khodabakhshi, M., Aryavash, K., (2012). Ranking all units in data envelopment analysis. Applied Mathematics Letters, 25(12): 2066-2070.
[12] Hosseinzadeh Lotfi, F., Jahanshahloo, G. R., Khodabakhshi, M., Rostamy-Malkhlifeh, M., Moghaddas, Z., Vaez-Ghasemi, M., (2013). A review of ranking models in data envelopment analysis. Journal of Applied Mathematics, Volume 2013 (2013), Article ID 492421, 20 pages.
[13] Ramazani-Tarkhorani, S., Khodabakhshi, M., Mehrabian, S., Nuri-Bahmani, F., (2013). Ranking decision-making units using common weights in DEA. Applied Mathematical Modelling. In press.
[14] Jahanshahloo, H., Hosseinzadeh Lotfi, F., Khodabakhshi, M., (2014). Modified nonradial supper efficiency models. Journal of Applied Mathematics, Volume 2014 (2014), Article ID 919547, 5 pages.
[15] Khodabakhshi, M., Asgharian, M., Gregoriou, G. N., (2010). An input-oriented super-efficiency measure in stochastic data envelopment analysis: Evaluating chief executive officers of US public banks and thrifts. Expert Systems with Applications, 37(3): 2092-2097.
[16] Khodabakhshi, M., (2010). An output oriented super-efficiency measure in stochastic data envelopment analysis: Considering Iranian electricity distribution companies. Computers & Industrial Engineering, 58(4): 663-671.
[17] Khodabakhshi, M., (2011). Super-efficiency in stochastic data envelopment analysis: An input relaxation approach. Journal of computational and applied mathematics, 235(16): 4576-4588.
[18] Khodabakhshi, M., Aryavash, K., (2014). Ranking units with fuzzy data in DEA. Data Envelopment Analysis and Decision Science, Volume 2014 (2014), Article ID dea-00058, 10 Pages.
[19] Cooper, W. W., Park, K. S., Yu, G., (1999). IDEA and AR-IDEA: Models for dealing with imprecise data in DEA. Management Science, 45(4): 597-607.
[20] Zhu, J., (2003). Imprecise data envelopment analysis (IDEA): A review and improvement with an application. European Journal of Operational Research, 144(3): 513-529.
[21] Adle, N., Friedman, L., Sinuany-Stern, Z., (2002). Review of ranking methods in the data envelopment analysis context. European Journal of Operational Research, 140(2): 249-265.
[22] Despotis, D. K., Smirlise, Y., (2002). Data envelopment analysis with imprecise data. European Journal of Operational Research, 140(1): 24-36.
[24] Cooper, W. W., Park, K. S., Yu, G., (2001). An illustrative application of IDEA (imprecise data envelopment analysis) to a Korean mobile. to a Korean mobile telecommunication company. Operations Research, 49(6): 807-820.
[25] Zhu, J., (2003). Efficiency evaluation with strong ordinal input and output measures. European Journal of Operational Research, 146(3): 477-485.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]