

یک الگوریتم کارا برای زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان توسیع یافته با دو قید خطی

اکرم طاعتی^۱، مازیار صلاحی^{۲*}

۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه گیلان، دانشکده علوم ریاضی، رشت، ایران

۲- دانشیار، دانشگاه گیلان، دانشکده علوم ریاضی، رشت، ایران

رسید مقاله: ۲۰ آذرماه ۱۳۹۴

پذیرش مقاله: ۹ اردیبهشت ۱۳۹۵

چکیده

زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان (TRS) که در واقع مساله‌ی مینیمم سازی یک تابع درجه‌ی دوم روی یک گوی است، نقش کلیدی در حل مسایل بهینه سازی غیر خطی نامقید ایفا می کند و علی رغم این که لزوماً محدب نیست، الگوریتم های کارای متعددی برای حل آن به ویژه برای حل آن در ابعاد بزرگ ارایه شده است. اخیراً توسیع زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان به مساله‌ای با قیود خطی اضافی مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. مطالعات انجام شده نشان می دهد هنگامی که قیود خطی مساله‌ی توسیع یافته درون گوی اشتراک ندارند، جواب بهینه‌ی مساله را می توان از طریق حل یک مساله‌ی بهینه سازی مخروطی به دست آورد. در هر صورت حل مسایل بهینه سازی مخروطی در ابعاد بزرگ و حتی در ابعاد متوسط عملی نیست. در این مقاله حل مساله‌ی ناحیه اطمینان توسیع یافته با دو قید خطی بدون در نظر گرفتن هیچ شرطی روی قیود آن مورد مطالعه قرار گرفته است. جدیدترین الگوریتم های موجود برای حل زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان و محاسبه‌ی مینیمم موضعی غیر سراسری آن که مساله را از طریق حل یک مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته حل می کنند برای حل مساله‌ی توسیع یافته در ابعاد بزرگ توسعه داده می شود. در پایان کارایی الگوریتم پیشنهادی روی دسته‌ای از مسایل تصادفی ارزیابی می شود.

کلمات کلیدی: زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان توسیع یافته، مساله‌ی مقدار ویژه تعمیم یافته، بهینه سازی سراسری.

۱ مقدمه

مساله‌ی ناحیه اطمینان توسیع یافته‌ی (eTRS) زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min } q(x) &:= \frac{1}{2} x^T A x + a^T x \\ \|x\|^2 &\leq \delta, \\ b_i^T x &\leq \beta_i, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (1)$$

* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: salahim@guilan.ac.ir

که در آن $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس متقارن، $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$ ، $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ و $\delta \in \mathbb{R}^{++}$. این دسته از مسائل در حل سایر مسائل بهینه سازی غیرخطی به ویژه در حل مسائل بهینه سازی نامقید به روش ناحیه اطمینان [۱،۲] و همچنین در حل مسائل بهینه سازی غیرخطی به روش برنامه ریزی درجه ی دوم متوالی (SQP) [۳] ظاهر می شود. در حالتی که $(b_i, \beta_i) = (0, 0)$ ، $i = 1, 2$ ، مساله ی (۱) به زیر مساله ی ناحیه اطمینان (TRS) معروف است که علی رغم این که لزوماً محدب نیست، الگوریتم های کارایی برای حل آن ارایه شده است [۴-۸] که پایه و اساس همه ی آن ها را می توان در شرایط بهینگی لازم و کافی آن دانست. در این بین الگوریتم پیشنهادی در منبع [۵] مساله ی (TRS) را از طریق حل یک مساله ی مقدار ویژه تعمیم یافته حل می کند. این روش با بهره گیری از الگوریتم های کارای موجود برای حل مسائل مقدار ویژه ی ماتریس های تنک و بزرگ برای حل مساله ی (TRS) در ابعاد بزرگ بسیار کاراست. همچنین، ارتباط بین روش های حل مساله ی (TRS) و برنامه ریزی نیمه معین که در منبع [۹] به آن پرداخته شده است، نشان می دهد مساله ی آزادسازی نیمه معین مساله ی (TRS) دقیق است و با استفاده از تجزیه ی رتبه یک می توان جواب بهینه ی مساله ی (TRS) را از جواب مساله ی آزادسازی آن به دست آورد [۹].

اخیراً توسعه مساله ی (TRS) به مساله ای با قیود خطی اضافی موضوع تحقیق بسیاری از مقالات قرار گرفته است [۹-۱۵]. مطالعات انجام شده نشان می دهد بر خلاف مساله ی (TRS)، مساله ی آزادسازی نیمه معین مساله ی توسعه یافته لزوماً دقیق نیست. هدف تعدادی از مطالعات انجام شده بیان شرایطی بوده است که تحت آن مساله ی آزادسازی نیمه معین توسعه های (TRS) دقیق است [۱۰، ۱۱]. تعدادی از مقالات نیز به معرفی یک مساله ی آزادسازی جدید پرداخته اند که با افزودن تعدادی قیود مخروطی درجه ی دوم و قیود خطی به مساله ی آزادسازی نیمه معین به دست می آید [۱۲، ۱۳]. در برخی از موارد براساس ماهیت قیود خطی تشکیل دهنده ی مساله ی توسعه یافته، می توان جواب بهینه ی مساله را از حل مساله ی آزادسازی جدید آن به دست آورد و در برخی از موارد نیز می توان کرانی بهتر از کران به دست آمده از مساله ی آزادسازی نیمه معین به دست آورد. هنگامی که m قید خطی مساله ی توسعه یافته، $b_i^T x \leq \beta_i$ ، $i = 1, \dots, m$ ، درون گوی $\|x\|^2 \leq \delta$ اشتراک ندارند، جواب بهینه ی مساله ی توسعه یافته را می توان با حل مساله ی محدب زیر به دست آورد [۱۲]:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} A \bullet X + a^T x \\ \text{trac}(X) & \leq \delta, \quad X \geq xx^T, \\ \|\beta_i x - X b_i\| & \leq \sqrt{\delta}(\beta_i - b_i^T x), \quad i = 1, \dots, m \\ \beta_i \beta_j - \beta_j b_i^T x - \beta_i b_j^T x + b_i^T X b_j & \geq 0, \quad 1 \leq i < j \leq m. \end{aligned} \quad (2)$$

در هر صورت حل مسائل بهینه سازی مخروطی تنها در ابعاد کوچک امکان پذیر است و این بدان معناست که حتی تحت شرایطی که مساله ی (eTRS) با مساله ی (۲) معادل است، نمی توان از آن برای حل (eTRS) در ابعاد بزرگ و یا حتی در ابعاد متوسط بهره برد. در منبع [۱۱] مساله ی (TRS) با m قید خطی اضافی مورد مطالعه قرار گرفته است. نویسندگان با تکیه بر نتایج به دست آمده توسط مارتینز در خصوص مینیمم موضعی غیر سراسری مساله ی (TRS) [۱۶]، نشان دادند

جواب بهینه‌ی مساله‌ی مورد مطالعه را می‌توان از میان مینیمم موضعی غیر سراسری مساله‌ی (TRS) و جواب‌های بهینه‌ی به دست آمده از حل دنباله‌ای از زیر مسایل ناحیه اطمینان، تعیین کرد. لازم به ذکر است که هیچگونه نتایج عددی توسط نویسندگان مقاله گزارش نشده است. الگوریتم ارایه شده توسط مارتینز در هر تکرار به حل یک دستگاه معادلات خطی نامعین نیاز دارد، از این رو برای حل مساله در ابعاد بزرگ هزینه‌بر به نظر می‌رسد. در منبع [۱۴] زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان با یک قید خطی اضافی موضوع تحقیق نویسندگان قرار گرفته است. در مقاله‌ی مذکور تحت شرط اینکه چندگانگی جبری کوچک‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس A حداقل دو است، با استفاده از روش قطری‌سازی و استفاده از دوگانی لاگرانژ مساله‌ی مورد مطالعه از طریق حل یک مساله‌ی دومتغیره‌ی محدب مقید حل می‌شود. با توجه به اینکه روش قطری‌سازی به تجزیه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس A نیازمند است، استفاده از این روش برای حل مساله در ابعاد بزرگ مناسب نمی‌باشد. اخیراً در منبع [۱۵] حل مساله‌ی (TRS) با یک قید خطی اضافی در ابعاد بزرگ مورد توجه قرار گرفته است. در منبع مذکور ابتدا نشان داده می‌شود که مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) را همانند مینیمم سراسری آن می‌توان از طریق حل یک مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته محاسبه کرد، سپس با استفاده از این واقعیت، الگوریتمی کارا برای حل مساله‌ی مورد مطالعه در ابعاد بزرگ ارایه شده است.

در این پژوهش حل زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان با دو قید خطی اضافی مورد توجه قرار گرفته است. با بهره‌گیری از جدیدترین نتایج به دست آمده که نشان می‌دهند مینیمم موضعی و سراسری مساله‌ی (TRS) را می‌توان از طریق حل یک مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته حل کرد، الگوریتمی کارا برای حل مساله‌ی مورد مطالعه در ابعاد بزرگ پیشنهاد می‌شود. در واقع الگوریتم پیشنهادی مساله را از طریق حل تعدادی مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته حل می‌کند. در پایان کارایی روش پیشنهادی روی دسته‌ای از مسایل تصادفی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

۱-۱ نمادگذاری

در سرتاسر این مقاله، $\lambda_{\min}(A)$ به کوچک‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس A ، $Range(A)$ به برد ماتریس A و $Null(A)$ به فضای پوچ ماتریس A اشاره می‌کند. همچنین ماتریس معین مثبت (نیمه معین مثبت) به صورت $A \succ 0$ ($A \geq 0$) نشان داده می‌شود و I به ماتریس همانی اشاره می‌کند.

۲ الگوریتم پیشنهادی

در سرتاسر این مقاله، فرض می‌کنیم هیچ یک از قیود خطی مساله‌ی (۱) زاید نیست؛ چون در غیر این صورت مساله‌ی (۱) به مساله‌ی (TRS) یا مساله‌ی (TRS) با یک قید خطی اضافی تبدیل می‌شود که در منابع [۵] و [۱۵] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. حل مساله‌ی (۱) را براساس ماهیت قیود خطی تشکیل دهنده‌ی آن در دو حالت جداگانه بررسی می‌کنیم. حالت اول را حالتی در نظر می‌گیریم که دو ابرصفحه‌ی $b_1^T x = \beta_1$ و $b_2^T x = \beta_2$ درون گوی $\|x\| \leq \delta$ هیچ اشتراکی ندارند. به عبارت دیگر به ازای هر x که $b_1^T x = \beta_1$ و $b_2^T x = \beta_2$ آنگاه $\|x\| \geq \delta$. حالت دوم حالتی است که دو ابرصفحه مذکور درون گوی یکدیگر را قطع می‌کنند؛ یعنی x وجود دارد به طوری که $b_1^T x = \beta_1$ و $b_2^T x = \beta_2$.

توجه می‌کنیم که هر یک از این حالات به آسانی قابل شناسایی است. دو ابرصفحه‌ی $b_1^T x = \beta_1$ و $b_2^T x = \beta_2$ موازی هستند اگر و فقط اگر $b_1 \parallel b_2$ باشد. حال حالتی را در نظر بگیرید که دو ابرصفحه‌ی مذکور موازی نیستند. فرض کنید x^* جواب بهینه‌ی مسأله‌ی سازی درجه‌ی دوم

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \|x\|^2 \\ & b_1^T x = \beta_1, \\ & b_2^T x = \beta_2, \end{aligned}$$

است. اگر $\|x^*\| < \delta$ باشد، آنگاه دو ابرصفحه درون گوی $\|x\| \leq \delta$ اشتراک دارند. در غیر این صورت دو ابرصفحه خارج از گوی یا روی گوی یکدیگر را قطع می‌کنند.

۱-۲ دو ابرصفحه‌ی $b_1^T x = \beta_1$ و $b_2^T x = \beta_2$ درون گوی $\|x\| \leq \delta$ هیچ اشتراکی ندارند
در این حالت الگوریتم ۱ برای حل مسأله‌ی (۱) پیشنهاد می‌شود. مسایل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} x^T A x + a^T x \\ & \|x\| \leq \delta, \\ & b_1^T x = \beta_1. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} x^T A x + a^T x \\ & \|x\| \leq \delta, \\ & b_2^T x = \beta_2. \end{aligned} \quad (4)$$

الگوریتم ۱.

گام اول. مسأله‌ی (TRS) را حل کنید. فرض کنید x_g^* جواب بهینه‌ی آن است، اگر $b_1^T x_g^* \leq \beta_1$ و $b_2^T x_g^* \leq \beta_2$ باشد، آنگاه x_g^* جواب بهینه‌ی مسأله‌ی (۱) نیز است، بنابراین متوقف شوید. در غیر این صورت به گام دوم بروید.

گام دوم. مینیمم موضعی مسأله‌ی (TRS)، x_ℓ^* را در صورت وجود محاسبه کنید. اگر $b_1^T x_\ell^* \leq \beta_1$ و $b_2^T x_\ell^* \leq \beta_2$ ، x_ℓ^* را به عنوان کاندیدای جواب بهینه در نظر بگیرید. مسایل (۳) و (۴) را حل کنید و جواب بهینه‌ی آن‌ها را نیز به عنوان کاندیدای جواب بهینه در نظر بگیرید. از میان جواب‌های موجود، جواب با کم‌ترین مقدار تابع هدف، جواب بهینه‌ی مسأله‌ی (۱) است.

۲-۲ دو ابرصفحه‌ی $b_1^T x = \beta_1$ و $b_2^T x = \beta_2$ درون گوی $\|x\| \leq \delta$ یکدیگر را قطع می‌کنند
در این حالت الگوریتم ۲ برای حل مسأله‌ی (۱) پیشنهاد می‌شود. مسایل زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} x^T A x + a^T x \\ & \|x\| \leq \delta, \\ & b_1^T x \leq \beta_1, \\ & b_2^T x = \beta_2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} x^T A x + a^T x \\ & \|x\| \leq \delta, \\ & b_1^T x = \beta_1, \\ & b_2^T x \leq \beta_2. \end{aligned} \quad (6)$$

الگوریتم ۲.

گام اول. مساله ی (TRS) را حل کنید. فرض کنید x_g^* جواب بهینه ی آن است. اگر $b_1^T x_g^* \leq \beta_1$ و $b_2^T x_g^* \leq \beta_2$ باشد، آنگاه x_g^* جواب بهینه ی مساله ی (۱) نیز است؛ بنابراین متوقف شوید، در غیر این صورت به گام دوم بروید.

گام دوم. مینیمم موضعی مساله ی (TRS)، x_ℓ^* را در صورت وجود محاسبه کنید. اگر $b_1^T x_\ell^* \leq \beta_1$ و $b_2^T x_\ell^* \leq \beta_2$ ، x_ℓ^* را به عنوان کاندیدای جواب بهینه در نظر بگیرید، مسایل (۵) و (۶) را حل کنید و جواب بهینه ی آن‌ها را نیز به عنوان کاندیدای جواب بهینه در نظر بگیرید. از میان جواب‌های موجود، جواب با کم‌ترین مقدار تابع هدف، جواب بهینه ی مساله ی (۱) است.

۳ حل زیر مسایل موجود در الگوریتم ۱ و ۲

در این بخش به جزئیات حل هر یک از زیر مسایل موجود در الگوریتم ۱ و ۲ می‌پردازیم.

۳-۱ مساله ی (TRS)

همان‌طور که در مقدمه اشاره شد تاکنون الگوریتم‌های کارای متعددی برای مساله ی (TRS) ارائه شده است که پایه و اساس همه آن‌ها را می‌توان در شرایط بهینگی لازم و کافی آن دانست. در این مقاله الگوریتم ارائه شده در منبع [۵] برای حل مساله ی (TRS) پیشنهاد می‌شود که قادر است مساله ی (TRS) مقیاس شده زیر را از طریق حل یک مساله ی مقدار ویژه ی تعمیم یافته حل کند:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} x^T A x + a^T x \\ & x^T B x \leq \delta, \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن B یک ماتریس معین مثبت است. الگوریتم مذکور که بر پایه نتایج زیر استوار است، با بهره‌گیری از الگوریتم‌های کارای موجود برای حل مساله ی مقدار ویژه ی ماتریس‌های بزرگ و تنک، برای حل مساله ی (TRS) در ابعاد بزرگ بسیار کاراست. x_g^* جواب بهینه ی مساله ی (۷) است اگر و فقط اگر $\lambda_g^* \geq 0$ وجود دارد به طوری که [۵]

$$(A + \lambda_g^* B) x_g^* = -a, \quad (8)$$

$$x_g^{*T} B x_g^* \leq \delta, \quad (9)$$

$$\lambda_g^* (x_g^{*T} B x_g^* - \delta) = 0, \quad (10)$$

$$A + \lambda_g^* B \succeq 0. \quad (11)$$

لم ۱ ([۵]). به ازای هر ضریب $\lambda \neq 0$ که در روابط (۸) تا (۱۰) صدق می‌کند، داریم $\det(M(\lambda)) = 0$ که:

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} -B & A + \lambda B \\ A + \lambda B & -\frac{aa^T}{\delta} \end{bmatrix}.$$

قضيه ۱ ([۵]). فرض كنيد (x_g^*, λ_g^*) يك جواب بهينه‌ي مساله‌ي (۷) با $x_g^{*T} B x_g^* = \delta$ باشد، در اين صورت ضريب لاگرانژ بهينه، λ_g^* ، با بزرگ‌ترين مقدار ويژه‌ي حقيقي ماتريس $M(\lambda)$ برابر است و $\lambda_g^* \in [\mu_n, \infty)$ كه μ_n بزرگ‌ترين مقدار ويژه $A + \lambda B$ است. به علاوه اگر $\lambda_g^* > \mu_n$ ، آنگاه $x_g^* = -\frac{\delta}{a^T y_\vee} y_\vee$ كه در آن $\begin{pmatrix} y_\vee \\ y_\vee \end{pmatrix}$ بردار ويژه‌ي $M(\lambda)$ متناظر با مقدار ويژه‌ي λ_g^* است و همچنين داريم $a^T y_\vee \neq 0$.

الگوريتم ۳ (حل مساله‌ي (۷) [۵])

گام اول. دستگاه معادلات خطي $Ax_0 = -a$ را با استفاده از روش گراديان مزدوج حل كنيد. اگر $x_0^T B x_0 \leq \delta$ ، x_0 را به عنوان كانديداي جواب بهينه در نظر بگيريد.

گام دوم. بزرگ‌ترين مقدار ويژه‌ي حقيقي $M(\lambda)$ ، λ_g^* ، و بردار ويژه‌ي متناظر با آن، $\begin{pmatrix} y_\vee \\ y_\vee \end{pmatrix}$ را محاسبه كنيد به طوري كه

$$\begin{bmatrix} -B & A \\ A & -\frac{aa^T}{\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_\vee \\ y_\vee \end{bmatrix} = -\lambda_g^* \begin{bmatrix} O_{n \times n} & B \\ B & O_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_\vee \\ y_\vee \end{bmatrix}.$$

گام سوم. اگر $\|y_\vee\| \leq \tau$ (به طور پيش فرض $\tau = 10^{-4}$) آنگاه مساله‌ي (۷) يك نمونه‌ي سخت است. گام‌هاي چهارم تا ششم را اجرا كنيد، در غير اين صورت به گام هفتم برويد.

گام چهارم. ماتريس $H := A + \lambda_g^* B + \alpha \sum_{i=1}^d B v_i v_i^T B$ را محاسبه كنيد كه در آن α يك عدد مثبت دلخواه و $V = [v_1, \dots, v_d]$ يك پايه‌ي B - متعامد براي فضاي پوچ ماتريس $A + \lambda_g^* B$ است؛ يعني $V^T B V = I$.

گام پنجم. دستگاه $Hq = -a$ را با استفاده از روش گراديان مزدوج حل كنيد.

گام ششم. مقدار η را طوري محاسبه كنيد كه $(q + \eta \nu)^T B (q + \eta \nu) = \delta$ كه در آن ν يكي از بردارهاي محاسبه شده در گام چهارم است. $x_g^* = q + \eta \nu$ جواب بهينه‌ي مساله‌ي (۷) است و متوقف شويد.

گام هفتم. $x_\vee = -\text{sign}(a^T y_\vee) \sqrt{\delta} \frac{y_\vee}{\sqrt{y_\vee^T B y_\vee}}$ را به عنوان كانديداي جواب بهينه در نظر بگيريد.

گام هشتم. از ميان جواب‌هاي موجود، جواب با كم‌ترين تابع هدف، جواب بهينه‌ي مساله‌ي (۷) است.

۲-۳ مينيمم موضعي مساله‌ي (TRS)

در سرتاسر اين مقاله، منظور از مينيمم موضعي، مينيمم موضعي غير سراسري است. فرض كنيد x^* جواب بهينه‌ي مساله‌ي (۱) است، اگر $\beta_1 x^* < \beta_1$ و $\beta_1^T x^* < \beta_1^T$ باشد، آنگاه x^* يك مينيمم موضعي (نه لزوماً مينيمم سراسري) مساله‌ي (TRS) است؛ لذا مطالعه و ارايه‌ي روشي كارا براي محاسبه‌ي مينيمم موضعي مساله‌ي (TRS) حائز اهميت است.

در ادامه ابتدا به مطالعات اولیه انجام شده توسط مارتینز در این زمینه اشاره می‌کنیم [۱۶]، سپس به نتایج به دست آمده در منبع [۱۵] اشاره می‌کنیم که نشان می‌دهد مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) همانند مینیمم سراسری آن در صورت وجود می‌تواند از طریق حل یک مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته محاسبه شود. برخلاف مینیمم سراسری، مساله‌ی (TRS) می‌تواند فاقد مینیمم موضعی باشد. به وضوح اگر ماتریس A نیمه معین مثبت باشد، مساله‌ی (TRS) محدب و لذا فاقد مینیمم موضعی است. لم زیر حالت‌هایی را که در آن مساله‌ی نامحدب (TRS) فاقد مینیمم موضعی است، بیان می‌کند.

لم ۲ ([۱۶]). اگر چندگانگی جبری کوچک‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس A ، $\lambda_{\min}(A)$ ، حداقل دو یا بردار a بر برخی از بردارهای ویژه‌ی متناظر با $\lambda_{\min}(A)$ عمود باشد، آنگاه مساله‌ی (TRS) فاقد مینیمم موضعی است.

فرض کنید $A = Q \Lambda Q^T$ تجزیه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس A باشد که در آن $Q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ ماتریس متعامد و $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ با $\lambda_{\min}(A) := \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ قضیه‌ی زیر شرایط لازم برای مینیمم موضعی را بیان می‌کند.

قضیه ۲ ([۱۶]). فرض کنید x_ℓ^* مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) باشد، آنگاه $\lambda_\ell^* \in (\max\{0, -\lambda_1\}, -\lambda_1)$ وجود دارد به طوری که:

$$(A + \lambda_\ell^* I) x_\ell^* = -a, \quad \|x_\ell^*\|^2 = \delta. \quad (12)$$

تابع $\phi(\lambda) = \|(A + \lambda I)^{-1} a\|^2$ را روی بازه‌ی $(\max\{0, -\lambda_1\}, -\lambda_1)$ در نظر بگیرید. با استفاده از تجزیه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس A داریم

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= \sum_{i=1}^n \frac{(q_i^T a)^2}{(\lambda_i + \lambda)^2}, \\ \phi'(\lambda) &= -2 \sum_{i=1}^n \frac{(q_i^T a)^2}{(\lambda_i + \lambda)^3}, \\ \phi''(\lambda) &= 6 \sum_{i=1}^n \frac{(q_i^T a)^2}{(\lambda_i + \lambda)^4}. \end{aligned} \quad (13)$$

معادله (۱۳) نشان می‌دهد که تابع $\phi(\lambda)$ روی بازه‌ی $(\max\{0, -\lambda_1\}, -\lambda_1)$ اکیداً محدب است و لذا معادله‌ی $\phi(\lambda) - \delta = 0$ در این بازه حداکثر دو ریشه دارد. قضیه‌ی زیر بیان می‌کند که تنها بزرگ‌ترین ریشه در این بازه می‌تواند ضریب لاگرانژ متناظر با مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) باشد.

قضیه ۳ ([۱۶]). مساله‌ی (TRS) حداکثر یک مینیمم موضعی دارد که در روابط (۱۲) صدق می‌کند و $\phi'(\lambda^*) \geq 0$. در ادامه به نتیجه‌ی به دست آمده در منبع [۱۵] اشاره می‌کنیم که نشان می‌دهد ضریب لاگرانژ متناظر با مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS)، λ^* ، در صورت وجود از طریق حل یک مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته به دست می‌آید. در این مقاله اثبات جدیدی برای این قضیه بیان می‌کنیم.

قضیه ۴ ([۱۵]). ماتریس $M(\lambda)$ که در آن $B = I$ را در نظر بگیرید. فرض کنید x_ℓ^* مینیمم موضعی یکتای مساله‌ی (TRS) باشد، آنگاه ضریب لاگرانژ متناظر، λ^* ، با دومین بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی حقیقی ماتریس $M(\lambda)$

برابر است. به علاوه $x_i^* = -\frac{\delta}{a^T y_p} y_1$ که در آن بردار ویژه $M(\lambda)$ متناظر با مقدار ویژه λ^* است و همچنین داریم $a^T y_p \neq 0$.

اثبات. ابتدا توجه می کنیم چون x_i^* مینیم موضعی مساله (TRS) است؛ بنابراین با توجه به لم ۲، چندگانگی جبری λ برابر است با یک و $a^T v \neq 0$ که در آن v بردار ویژه متناظر با λ است. به عبارت دیگر (TRS) یک نمونه آسان است. بر اساس لم ۱، λ^* یک مقدار ویژه $M(\lambda)$ است؛ یعنی $\det(M(\lambda^*)) = 0$. به علاوه بنابر قضیه ۱، بزرگ ترین مقدار ویژه حقیقی ماتریس $M(\lambda)$ که ضریب لاگرانژ متناظر با مینیم سراسری مساله (TRS) است، ریشه ی منحصر به فرد معادله $\phi(\lambda) - \delta = 0$ در بازه $(-\lambda_1, \infty)$ است. همچنین با توجه به قضیه ۳، ضریب لاگرانژ متناظر با مینیم موضعی مساله (TRS) ، بزرگ ترین ریشه ی معادله $\phi(\lambda) - \delta = 0$ در بازه $(-\lambda_1, \max\{0, -\lambda_1\})$ است. توجه می کنیم $-\lambda_1$ مقدار ویژه $M(\lambda)$ نیست. برای اثبات این واقعیت فرض خلف می کنیم که چنین باشد؛ بنابراین بردار ناصفر $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_p \end{pmatrix}$ وجود دارد به طوری که

$$(A - \lambda_1 I) y_p = y_1, \quad (14)$$

$$(A - \lambda_1 I) y_1 = \frac{aa^T}{\delta} y_p. \quad (15)$$

اگر $a^T y_p \neq 0$ ، بنابر (۱۵) $a \in \text{Range}(A - \lambda_1 I)$ که متناقض است با فرض اینکه (TRS) یک نمونه ی آسان است. به علاوه اگر $a^T y_p = 0$ آنگاه از رابطه ی (۱۵) نتیجه می شود $y_1 \in \text{Null}(A - \lambda_1 I)$. همچنین بنا بر (۱۴) داریم $y_1 \in \text{Range}(A - \lambda_1 I)$ ؛ بنابراین $y_1 = 0$ است. حال اگر $y_1 = 0$ باشد، آنگاه براساس رابطه ی (۱۴)، y_p یک بردار ویژه ی متناظر با λ_1 است. در این صورت فرض $a^T y_p = 0$ متناقض است با فرض اینکه (TRS) یک نمونه آسان است؛ بنابراین $-\lambda_1$ نمی تواند مقدار ویژه $M(\lambda)$ باشد. بحث انجام شده نشان می دهد که λ^* دومین بزرگ ترین مقدار ویژه $M(\lambda)$ است. حال فرض کنید $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_p \end{pmatrix}$ یک بردار ویژه ی $M(\lambda^*)$ باشد، داریم:

$$(A + \lambda^* I) y_p = y_1, \quad (16)$$

$$(A + \lambda^* I) y_1 = \frac{aa^T}{\delta} y_p. \quad (17)$$

ابتدا نشان می دهیم $a^T y_p \neq 0$ است. فرض خلف می کنیم $a^T y_p = 0$ باشد، در این صورت چون ماتریس $A + \lambda^* I$ وارون پذیر است از روابط (۱۶) و (۱۷) نتیجه می شود $y_1 = y_p = 0$ که متناقض است با فرض اینکه $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_p \end{pmatrix}$ یک بردار ویژه $M(\lambda^*)$ است؛ بنابراین $a^T y_p \neq 0$. حال با ضرب طرفین رابطه (۱۷) در $-\frac{\delta}{a^T y_p}$ ،

$$(A + \lambda^* I) \frac{-\delta}{a^T y_p} y_1 = -a.$$

قرار دهید $x_\ell^* = -\frac{\delta}{a^T y_\ell} y_\ell$ از روابط (۱۶) و (۱۷) نتیجه می شود

$$\|x_\ell^*\|^r = \frac{\delta^r}{(a^T y_\ell)^r} y_\ell^T y_\ell = \frac{\delta^r}{(a^T y_\ell)^r} y_\ell^T (A + \lambda^* I)(A + \lambda^* I)^{-1} \frac{aa^T}{\delta} y_\ell = \delta,$$

که نشان می دهد x_ℓ^* از رابطه $x_\ell^* = -\frac{\delta}{a^T y_\ell} y_\ell$ محاسبه می شود.

۳-۳ حل زیر مسایل (۳) و (۴)

در این بخش به جزئیات حل زیر مسایل (۳) و (۴) می پردازیم. برای سادگی در بیان مطالب، قید تساوی را به صورت $b^T x = \beta$ نمایش می دهیم؛ بنابراین مساله ی زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} x^T A x + a^T x \\ & \|x\|^r \leq \delta, \\ & b^T x = \beta. \end{aligned} \quad (18)$$

با حذف قید تساوی $b^T x = \beta$ مساله ی فوق را به مساله ی معادلی به فرم مساله ی (۷) تبدیل می کنیم. بدین منظور فرض کنید $|b_\ell| = \max\{|b_i| \mid i=1, \dots, n\}$ که در آن b_i مولفه ی i ام بردار b است، آنگاه ماتریس

$$W = \begin{bmatrix} b_\ell I_{\ell-1} & O_{\ell-1, n-\ell} \\ -b_{\ell+1:n}^T & -b_{\ell+1:n}^T \\ O_{n-\ell, \ell-1} & b_\ell I_{n-\ell} \end{bmatrix},$$

یک پایه برای $\text{Null}(b^T)$ است. $b_{i:j}$ به قسمتی از بردار b اشاره می کند که شامل درایه های i ام تا j ام است.

نقطه ی $\hat{x}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\hat{x} = \begin{cases} 0 & \text{if } \beta = 0 \\ \frac{\beta}{\|b\|^r} b & \text{if } \beta \neq 0 \end{cases}$$

توجه می کنیم که $b^T \hat{x} = \beta$ ، $\|\hat{x}\|^r \leq \delta$ ، $W^T \hat{x} = 0$ و همچنین داریم:

$$b^T x = \beta \Leftrightarrow x = \hat{x} + Wy \quad \text{for some } y \in \mathbb{R}^{n-1}$$

با جایگذاری x در مساله ی (۱۸)، به مساله ی معادل زیر می رسیم:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} y^T \bar{A} y + \bar{a}^T y \\ & y^T B y \leq \bar{\delta}, \end{aligned}$$

که در آن

$$\bar{A} = W^T A W, \quad \bar{a} = W^T (A \hat{x} + a), \quad B = W^T W, \quad \bar{\delta} = \delta - \hat{x}^T \hat{x}.$$

مساله ی فوق را می توان با استفاده از الگوریتم ۳ حل کرد.

۳-۴ حل زیر مسایل (۵) و (۶)

در این بخش به جزئیات حل زیر مسایل (۵) و (۶) می پردازیم. برای سادگی در بیان مطالب، قيد تساوی را به صورت $b^T x = \beta$ نمایش می دهیم؛ بنابراین مساله ی زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} x^T A x + a^T x \\ & \|x\|^2 \leq \delta, \\ & b^T x = \beta, \\ & b_v^T x \leq \beta_v. \end{aligned} \quad (19)$$

با حذف قيد تساوی $b^T x = \beta$ مساله ی فوق را به زیر مساله ی ناحیه اطمینان با یک قيد خطی اضافی تبدیل می کنیم. بدین منظور فرض کنید $|b_\ell| = \max\{|b_i|\}$ که در آن b_i مولفه ی i ام بردار b است، آنگاه ماتریس

$$W = \begin{bmatrix} b_\ell I_{\ell-1} & O_{\ell-1, n-\ell} \\ -b_{\ell-1}^T & -b_{\ell+v, n}^T \\ O_{n-\ell, \ell-1} & b_\ell I_{n-\ell} \end{bmatrix},$$

یک پایه برای $\text{Null}(b^T)$ است. نقطه ی $\hat{x}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\hat{x} = \begin{cases} 0 & \text{if } \beta = 0 \\ \frac{\beta}{\|b\|^2} b & \text{if } \beta \neq 0 \end{cases}$$

توجه می کنیم که $b^T \hat{x} = \beta$ ، $\|\hat{x}\|^2 \leq \delta$ ، $W^T \hat{x} = 0$ و همچنین داریم:

$$b^T x = \beta \Leftrightarrow x = \hat{x} + Wy \quad \text{for some } y \in \mathbb{R}^{n-1}$$

با جایگذاری x در مساله ی (۱۹)، به مساله ی معادل زیر می رسیم:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} y^T \bar{A} y + \bar{a}^T y \\ & y^T B y \leq \bar{\delta}, \\ & \bar{b}^T y \leq \bar{\beta}, \end{aligned}$$

که در آن

$$\bar{A} = W^T A W, \quad \bar{a} = W^T (A \hat{x} + a), \quad B = W^T W, \quad \bar{\delta} = \delta - \hat{x}^T \hat{x}, \quad \bar{b} = W^T b_2, \quad \bar{\beta} = \beta_2 - b_2^T \hat{x}.$$

از طرفی $B = W^T W = b_\ell^T I_{n-1} + \tilde{b} \tilde{b}^T$ که در آن $\tilde{b}$ از بردار b با حذف مولفه ی b_ℓ به دست می آید؛ لذا با توجه

به ساختار بهنگام رتبه یک ماتریس معین مثبت B داریم

$$B^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{|b_\ell|} \left(I_{n-1} - \frac{1 + \sqrt{\frac{b_\ell^2}{b_\ell^2 + \tilde{b}^T \tilde{b}}}}{\tilde{b}^T \tilde{b}} \tilde{b} \tilde{b}^T \right).$$

حال با استفاده از تغییر متغیر $y := B^{-1} \bar{y}$ به مساله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} y^T \hat{A} y + \hat{a}^T y \\ & y^T y \leq \bar{\delta}, \\ & \hat{b}^T y \leq \bar{\beta}, \end{aligned} \quad (20)$$

که در آن

$$\hat{A} = B^{-1} \bar{A} B^{-1}, \quad \hat{a} = B^{-1} \bar{a}, \quad \hat{b} = B^{-1} \bar{b}.$$

حل مساله‌ی (۲۰) که در واقع مساله‌ی ناحیه اطمینان با یک قید خطی اضافی است در منبع [۱۵] به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است. الگوریتم ۴ برای حل مساله‌ی فوق پیشنهاد می‌شود.

الگوریتم ۴ (حل مساله‌ی (۲۰)).

گام اول. مساله‌ی (TRS) متناظر را حل کنید. فرض کنید x_g^* جواب بهینه‌ی آن است، اگر $\hat{b}^T x_g^* \leq \bar{\beta}$ باشد، آنگاه x_g^* جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۲۰) نیز است؛ بنابراین متوقف شوید، در غیر این صورت به گام دوم بروید.

گام دوم. مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) متناظر، x_ℓ^* را در صورت وجود محاسبه کنید. اگر $\hat{b}^T x_\ell^* \leq \bar{\beta}$ ، آنگاه x_ℓ^* را به عنوان کاندیدای جواب بهینه در نظر بگیرید. مساله‌ی (۲۰) با قید خطی تساوی را در نظر بگیرید. این مساله را که به فرم مساله‌ی (۳) است حل کنید و جواب بهینه‌ی آن را نیز به عنوان کاندیدای جواب بهینه در نظر بگیرید. از میان جواب‌های موجود، جواب با کم‌ترین مقدار تابع هدف، جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۲۰) است.

۴ نتایج محاسباتی

در این بخش نتایج عددی حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی برای حل مساله‌ی (۱) روی دسته‌ای از مسایل تصادفی ارایه می‌شود. از آنجا که حل مساله‌ی (۲) در ابعاد بزرگ امکان‌پذیر نیست، تنها برای مسایل با ابعاد کوچک ($n \leq 400$) و در حالتی که مساله‌ی (۱) با مساله‌ی (۲) معادل است، روش پیشنهادی با مساله‌ی (۲) مقایسه و مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. برای مسایل با ابعاد بزرگ تنها نتایج حاصل از حل مساله‌ی (۱) با الگوریتم پیشنهادی گزارش می‌شود. برای حل مساله (۲) از بسته‌ی نرم‌افزاری CVX استفاده شده است [۱۷]. از تابع $A = \text{sprandsym}(n, \text{density})$ در متلب برای تولید ماتریس متقارن A استفاده شده است که در آن density به چگالی ماتریس تولید شده و n به بعد مساله اشاره می‌کند. از لم زیر نیز برای تولید مساله‌ی (TRS) استفاده شده است.

لم ۳ ([۱۵]، لم ۸). فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس متقارن با $\lambda_1 < \min\{0, \lambda_n\}$ باشد، تعریف کنید $a = -(A + \mu I)v_1$ که در آن v_1 بردار ویژه‌ی متناظر با λ_1 با $\|v_1\| = \delta$ و $\mu \in (\max\{0, -\lambda_1\}, -\lambda_1)$ ، آنگاه v_1 مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) متناظر است.

۴-۱ دسته‌ی اول از مسایل تست

فرض کنید $xopt$ جواب بهینه‌ی مساله‌ی (TRS) تولید شده باشد، به منظور حذف $xopt$ از ناحیه شدنی مساله‌ی (۱)، قرار می‌دهیم $b_1 = 0/9xopt$ ، $b_2 = -b_1$ ، $\beta_1 = \|b_1\|^2$ و $\beta_2 = -\beta_1 + 0/1$. در این صورت دو ابرصفحه‌ی $b_1^T x = \beta_1$ و $b_2^T x = \beta_2$ موازی هستند و بنابراین مساله‌ی (۱) تولید شده، با مساله‌ی (۲) معادل است. نتایج عددی به دست آمده از اجرای الگوریتم پیشنهادی و همچنین حل مساله‌ی (۲) روی دسته‌ی اول از مسایل تست در ابعاد کوچک در جدول ۱ خلاصه شده است. در هر بعد، ده مساله تولید و میانگین نتایج به دست آمده گزارش شده است. دقت هر یک از روش‌ها از رابطه زیر محاسبه شده است:

$$\frac{|q(x^*) - q(x_{best})|}{|q(x_{best})|}$$

که در آن x^* جواب بهینه‌ی به دست آمده از هر روش و x_{best} جواب با کم‌ترین مقدار تابع هدف از میان دو جواب به دست آمده از دو روش است. همان‌طور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، الگوریتم پیشنهادی جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۱) را با دقت تقریباً یکسان و در مدت زمان کوتاه‌تری نسبت به مساله‌ی (۲) محاسبه می‌کند. نتایج حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی روی دسته‌ی اول از مسایل تست در ابعاد بزرگ در جداول ۲ و ۳ بیان شده است. از مباحث مطرح شده در بخش ۲ می‌دانیم جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۱)، x^* ، یا مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) متناظر است و یا جواب بهینه‌ی یک زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان است. اگر x^* مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) باشد، در تمامی جداول KKT_1 و KKT_2 به ترتیب از روابط زیر محاسبه شده است:

$$KKT_1 = \|(A + \lambda^* I)x^* + a\|_\infty,$$

$$KKT_2 = \lambda^* (\|x^*\|^2 - \delta),$$

که در آن λ^* ضریب لاگرانژ متناظر است. اگر x^* جواب بهینه یک زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان باشد، KKT_1 و KKT_2 به ترتیب از روابط زیر محاسبه شده است:

$$KKT_1 = \|(\tilde{A} + \lambda^* I)x^* + \tilde{a}\|_\infty,$$

$$KKT_2 = \lambda^* (\|x^*\|^2 - \tilde{\delta}),$$

که در آن λ^* ضریب لاگرانژ متناظر، $\tilde{A}$ هسیان تابع هدف، $\tilde{a}$ بردار متناظر با جمله‌ی خطی تابع هدف و $\tilde{\delta}$ اسکالر مثبت سمت راست قيد نرمی مساله‌ی ناحیه اطمینانی است که x^* جواب بهینه آن است. همان‌طور که در جداول ۲ و ۳ مشاهده می‌شود با کاهش میزان چگالی ماتریس A زمان اجرای الگوریتم نیز کاهش می‌یابد. دلیل این امر را می‌توان در هزینه‌ی محاسباتی حاصل ضرب یک بردار در یک ماتریس دانست که هزینه‌ی غالب در الگوریتم‌های موجود برای حل مسایل مقدار ویژه است و این نیز با کاهش میزان چگالی ماتریس کاهش می‌یابد.

جدول ۱. مقایسه بین الگوریتم پیشنهادی و حل مساله‌ی (۲) روی دسته‌ی اول از مسایل تست

الگوریتم پیشنهادی		مساله‌ی (۲)		بعد
زمان (ثانیه)	دقت	زمان	دقت	
۰/۲۰	$6/2589 \times 10^{-11}$	۲/۶۵	$5/4780 \times 10^{-12}$	۱۰۰
۰/۳۸	$4/5136 \times 10^{-11}$	۱۸/۱۵	$1/6274 \times 10^{-10}$	۲۰۰
۰/۳۹	$2/0858 \times 10^{-10}$	۷۲/۵۷	$5/5983 \times 10^{-12}$	۳۰۰
۰/۵۶	$8/9449 \times 10^{-11}$	۱۹۶/۹۳	$4/1439 \times 10^{-10}$	۴۰۰

جدول ۲. نتایج حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی روی دسته‌ی اول از مسایل تست با density=۰/۰۱

بعد	زمان (ثانیه)	KKT ۱	KKT ۲
۱۰۰۰	۱/۱۶	$1/6338 \times 10^{-10}$	$-8/2321 \times 10^{-17}$
۲۰۰۰	۳/۳۶	$8/3511 \times 10^{-10}$	$3/1453 \times 10^{-17}$
۳۰۰۰	۶/۸۱	$5/6302 \times 10^{-10}$	$-5/1149 \times 10^{-16}$
۴۰۰۰	۱۲/۵۳	$4/2516 \times 10^{-10}$	$-2/9622 \times 10^{-14}$
۵۰۰۰	۲۱/۸۱	$2/0642 \times 10^{-10}$	$2/1939 \times 10^{-43}$

جدول ۳. نتایج حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی روی دسته‌ی اول از مسایل تست با density=۰/۰۰۱

بعد	زمان (ثانیه)	KKT ۱	KKT ۲
۱۰۰۰	۰/۶۳	$2/7767 \times 10^{-9}$	$-3/8128 \times 10^{-17}$
۲۰۰۰	۱/۵۲	$3/3275 \times 10^{-9}$	$-1/1341 \times 10^{-15}$
۳۰۰۰	۲/۴۸	$1/8396 \times 10^{-10}$	$-1/0726 \times 10^{-16}$
۴۰۰۰	۴/۶۱	$2/9711 \times 10^{-9}$	$1/2528 \times 10^{-16}$
۵۰۰۰	۳/۸۸	$3/4954 \times 10^{-9}$	$2/6681 \times 10^{-16}$

۴-۲ دسته دوم از مسایل تست

فرض کنید x_ℓ و x_{opt} به ترتیب مینیمم موضعی و مینیمم سراسری مساله‌ی (TRS) تولید شده باشد، قرار می‌دهیم $b_1 = x_{opt} - x_\ell$ و $\beta_1 = b_1^T x_\ell + 0/01 \|b_1\|^2$. همچنین b_ℓ را برداری در نظر می‌گیریم که درایه‌های آن دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس ۱ هستند و قرار می‌دهیم $\beta_\ell = b_\ell^T x_\ell + 0/1$. در این صورت x_{opt} برای مساله‌ی (۱) حاصل، نشدنی و x_ℓ شدنی است. همانند دسته‌ی اول از مسایل تست، در هر بعد ده مساله تولید و میانگین نتایج به دست آمده در جداول ۴ و ۵ گزارش شده است. همانند دسته‌ی اول از مسایل تست، با کاهش چگالی ماتریس A زمان اجرای الگوریتم نیز کاهش می‌یابد.

جدول ۴. نتایج حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی روی دسته دوم از مسایل تست با $\text{density} = 0.01$

بعد	زمان (ثانیه)	KKT ۱	KKT ۲
۱۰۰۰	۳/۴۶	$4/7827 \times 10^{-9}$	$1/2125 \times 10^{-15}$
۲۰۰۰	۶/۲۳	$1/1171 \times 10^{-9}$	$2/3843 \times 10^{-15}$
۳۰۰۰	۱۴/۹۱	$8/0612 \times 10^{-11}$	$-6/4599 \times 10^{-16}$
۴۰۰۰	۵۳/۶۲	$6/0281 \times 10^{-8}$	$1/0053 \times 10^{-14}$
۵۰۰۰	۶۴/۱۲	$4/2163 \times 10^{-11}$	$1/9227 \times 10^{-14}$

جدول ۵. نتایج حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی روی دسته دوم از مسایل تست با $\text{density} = 0.001$

بعد	زمان (ثانیه)	KKT ۱	KKT ۲
۱۰۰۰	۱/۴۲	$7/1172 \times 10^{-10}$	$2/3511 \times 10^{-16}$
۲۰۰۰	۱/۶۸	$7/9524 \times 10^{-10}$	$7/5585 \times 10^{-16}$
۳۰۰۰	۳/۳۲	$2/8822 \times 10^{-10}$	$2/8455 \times 10^{-16}$
۴۰۰۰	۴/۱۷	$5/1819 \times 10^{-7}$	$2/3665 \times 10^{-15}$
۵۰۰۰	۵/۶۹	$4/6716 \times 10^{-11}$	$1/1151 \times 10^{-15}$

۵ نتیجه گیری

زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان به همراه قیود خطی در حل سایر مسایل بهینه‌سازی غیرخطی مقید به روش ناحیه اطمینان و همچنین به روش برنامه‌ریزی درجه‌ی دوم ظاهر می‌شوند. در این مقاله حل زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان به همراه دو قید خطی در ابعاد بزرگ مورد مطالعه قرار گرفته است. با بهره‌گیری از جدیدترین نتایج به دست آمده که نشان می‌دهد جواب بهینه زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان و مینیمم موضعی آن را می‌توان از طریق حل یک مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته محاسبه نمود، به حل زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان به همراه دو قید خطی پرداخته شد. این امر حل مساله‌ی توسعه یافته را در ابعاد بزرگ از طریق حل تعدادی مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته ممکن می‌سازد. مقایسه الگوریتم پیشنهادی با فرمول‌بندی مخروطی مساله‌ی توسعه یافته نشان می‌دهد که روش پیشنهادی جواب بهینه‌ی مساله را در مدت زمان کوتاه‌تری و با دقت تقریباً یکسانی محاسبه می‌کند.

سپاسگزاری

نویسنده دوم از حمایت مالی دانشگاه گیلان در طول دوره فرصت مطالعاتی در دانشگاه واترلو کانادا قدردانی می‌نماید.

منابع

- [1] Conn, A. R., Gould, N. I., Toint, P. L., (2000). Trust region methods. SIAM, Philadelphia, PA.

- [2] Celis, M. R., Dennis, J. E., Tapia, A. R., (1985). A trust region strategy for nonlinear equality constrained optimization. *Numerical Optimization*, 71-82.
- [3] Boggs, P. T., Tolle, J. W., (1995). Sequential quadratic programming. *Acta Numerica*, 4, 1-51.
- [4] Sorensen, D. C., (1997). Minimization of a large-scale quadratic function subject to a spherical constraint. *SIAM Journal on Optimization*, 7(1), 141-161.
- [5] Adachi, S., Iwata, S., Nakatsukasa, Y., Takeda, A., (2015). Solving the trust region subproblem by a generalized eigenvalue problem. Technical report, Mathematical Engineering, The University of Tokyo.
- [6] Rendl, F., Wolkowicz, H., (1997). A semidefinite framework for trust region subproblems with applications to large scale minimization. *Mathematical Programming*, 77(1), 273-299.
- [7] Gould, N. I., Lucidi, S., Roma, M., Toint, P. L., (1999). Solving the trust-region subproblem using the Lanczos method. *SIAM Journal on Optimization*, 9(2), 504-525.
- [8] Fortin, C., Wolkowicz, H., (2004). The trust region subproblem and semidefinite programming. *Optimization Methods and Software*, 19(1), 41-67.
- [9] Sturm, J. F., Zhang, S., (2003). On cones of nonnegative quadratic functions. *Mathematics of Operations Research*, 28(2), 246-267.
- [10] Jeyakumar, V., Li, G. Y., (2014). Trust-region problems with linear inequality constraints: exact SDP relaxation, global optimality and robust optimization. *Mathematical Programming*, 147(1-2), 171-206.
- [11] Hsia, Y., Sheu, R. L., (2013). Trust region subproblem with a fixed number of additional linear inequality constraints has polynomial complexity. Report, Beihang University, Beijing, China.
- [12] Burer, S., Yang, B., (2013). The trust region subproblem with non-intersecting linear constraints. *Mathematical Programming*, 149(1-2), 253-264.
- [13] Burer, S., Anstreicher, K. M., (2013). Second-order-cone constraints for extended trust-region subproblems. *SIAM Journal on Optimization*, 23(1), 432-451.
- [14] Salahi, M., Fallahi, S., (2016). Trust region subproblem with an additional linear inequality constraint. *Optimization Letters*, 10(4), 821-832.
- [15] Salahi, M., Taati, A., Wolkowicz, H., (2016). Local nonglobal minima for solving large scale extended trust region subproblems. *Computational Optimization and Applications*, DOI: 10.1007/s10589-016-9867-4.
- [16] Martínez, J. M., (1994). Local minimizers of quadratic functions on Euclidean balls and spheres. *SIAM Journal on Optimization*, 4(1), 159-176.
- [17] Grant, M., Boyd, S., (2013). CVX: Matlab software for disciplined convex programming. version 2.0 beta. <http://cvxr.com/cvx>.