

یک الگوریتم خطی برای مساله پیدا کردن هسته درخت‌های بازه‌ای وزن‌دار

سمانه متولی اشکذری^۱، جعفر فتحعلی^{۲*}

۱- دانشجوی دکترای، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده علوم ریاضی، شاهرود، ایران

۲- دانشیار، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده علوم ریاضی، شاهرود، ایران

رسید مقاله: ۱۸ آذر ۱۳۹۴

پذیرش مقاله: ۲۵ اردیبهشت ۱۳۹۵

چکیده

در این مقاله ابتدا گراف‌های بازه‌ای را تعریف و سپس مساله‌ی پیدا کردن هسته روی گراف‌های بازه‌ای و درخت‌های بازه‌ای را بررسی می‌کنیم. یک هسته در یک گراف بازه‌ای، مسیری از بازه‌های متصل به هم است که مجموع فاصله‌های تمام بازه‌ها تا این مسیر کمینه شود. نشان می‌دهیم بازه‌هایی که روی هسته‌ی یک درخت قرار دارند نمی‌توانند بازه‌ای غیر ماکسیمال باشند. سپس الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n)$ برای پیدا کردن هسته‌ی یک درخت بازه‌ای ارائه می‌دهیم.

کلمات کلیدی: گراف بازه‌ای، هسته درخت، مکانیابی.

۱ مقدمه

در جوامع امروزی، بهینه‌سازی در زمینه‌های مختلف اهمیت فراوانی برای صاحبان سرمایه و مدیران کارخانه‌ها دارد. پرکاربرد بودن این مسایل توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده و تحقیقات فراوانی در این زمینه انجام شده‌است. یکی از مسایل مهم بهینه‌سازی، مساله‌ی مکانیابی است. این مساله انواع مختلفی دارد. اولین طبقه‌بندی مدل‌های مختلف مکانیابی توسط هندلر و میرچندانی [۱] ارائه شد. پس از آن طبقه‌بندی‌های دیگری از جمله توسط هاماکر و نیکل [۲] انجام شد.

در یک شبکه با n راس، مساله‌ی پیدا کردن مکان p سرویس‌دهنده روی شبکه به‌طوری که مجموع وزنی فاصله رؤس تا نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده مینیمم شود، مساله‌ی p -میانه نامیده می‌شود. هسین و تمیر [۳] مساله p -میانه را روی یک مسیر با وزن‌های مثبت در نظر گرفتند و برای حل آن الگوریتمی خطی با پیچیدگی زمانی

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: fathali@shahroodut.ac.ir

$O(pn)$ ارایه کردند. مایمانی [۴] و فتحعلی و همکاران [۵] مساله مکانیابی میانه را روی گراف‌های خاص بررسی کردند.

در مساله مکانیابی سرویس‌دهنده، سرویس‌دهنده می‌تواند به صورت یک مسیر در یک شبکه نیز مطرح شود. بنابراین مساله عبارت است از پیدا کردن مسیری از یک شبکه که مجموع فاصله‌های وزنی رئوس شبکه تا این مسیر کم‌ترین مقدار ممکن باشد. واضح است که برخلاف مساله p -میانه که سرویس‌دهنده‌ها بر روی چند نقطه‌ی جدا از هم قرار دارند، در این مساله سرویس‌دهنده یک وسیله‌ی بهم‌پیوسته است که بر روی یک مسیر قرار می‌گیرد. چنین مسیری را هسته‌ی شبکه و مساله را مساله‌ی هسته می‌نامند. مساله‌ی پیدا کردن هسته روی شبکه یا درخت به طور جداگانه قابل بررسی و دارای خواص متفاوتی است. پیدا کردن هسته یک درخت توسط مورگان و اسلیتر [۶] و بکر [۷] بررسی و الگوریتم‌هایی خطیرای حل آن پیشنهاد شده‌است. هم‌چنین حکیمی و همکاران [۸] در سال ۱۹۹۳ نشان داد که پیدا کردن مسیر بر روی شبکه یک مساله‌ی NP -سخت است. زعفرانی و فتحعلی [۹] این مساله را روی شبکه‌های درختی با وزن مثبت و منفی مورد بررسی قرار دادند. سرویس‌دهنده‌ها در مسایل مکانیابی را می‌توان به صورت درخت نیز در نظر گرفت. این مساله توسط تمیر و همکاران [۱۰] در سال ۲۰۰۵ بررسی شد.

مساله‌ی هسته مقید حالت دیگری از این مساله است که در آن طول مسیر مورد نظر باید از مقدار مشخصی مانند l کم‌تر شود. این حالت از مساله که به مساله‌ی l -هسته معروف است توسط نویسندگان مختلفی از جمله مراجع [۱۱-۱۴] مورد بررسی قرار گرفته‌است. هم‌چنین اگر هدف، یافتن زیردرختی با حداکثر k برگ باشد، مساله را مساله‌ی k -هسته می‌نامند. پنگ و همکاران [۱۵] دو الگوریتم با پیچیدگی زمانی $O(kn)$ و $O(n \log n)$ برای یافتن k -هسته‌ی یک درخت ارایه کردند.

حال اگر هدف یافتن زیردرختی با حداکثر k برگ و با قطر حداکثر l باشد که مجموع فاصله‌های رئوس درخت از زیردرخت انتخاب شده کمینه شود، مساله را مساله‌ی (K, L) -هسته می‌نامند که در آن قطر درخت، ماکزیمم فاصله بین دو رأس از درخت است. الگوریتمی با پیچیدگی $O(n^2 \log n)$ برای حل این مساله بر روی درخت‌های بدون وزن و درخت‌های با وزن مثبت توسط بکر و همکارانش [۱۴] در سال ۲۰۰۲ ارایه شده‌است. متولی و همکاران [۱۶] الگوریتم آن‌ها را به حالت نیمه ناخوشایند یعنی درخت با وزن مثبت و منفی توسعه دادند. در این مقاله ما به بررسی مساله هسته بر روی گراف‌های بازه‌ای می‌پردازیم. یک گراف بازه‌ای مجموعه‌ای از بازه‌ها است که این بازه‌ها می‌توانند متناظر با رئوس یک گراف باشند به طوری که اگر یالی بین رأس v_i و v_j برقرار باشد، دوبازه متناظر با آن‌ها I_i و I_j دارای اشتراک هستند. گراف‌های بازه‌ای دارای ساختار توپولوژی مناسبی هستند. هم‌چنین ابزار مهمی در زمینه‌های کاربردی از جمله باستان‌شناسی، زیست‌شناسی، زمان‌بندی و کنترل ترافیک هستند [۱۷ و ۱۸]. به همین دلیل محققان زیادی علاقه‌مند به مطالعه بر روی گراف‌های بازه‌ای شدند (مراجع [۱۹-۲۱] را ببینید). مساله ۱-میانه روی گراف‌های بازه‌ای با وزن مثبت توسط بسپامیانیک و همکارانش [۱۹] بررسی شد. آن‌ها الگوریتمی خطی برای حل این مساله پیشنهاد کردند. چنگ و کانگ [۲۲] به بررسی

مساله p-ماکسین روی گراف‌های بازه‌ای پرداخته‌اند. قاسمی نیز در [۲۳] مساله‌ی P-ماکسین روی گراف‌های بازه‌ای که هر بازه دارای یک وزن مثبت است را بررسی کرده است. درخت‌های بازه‌ای حالت خاصی از گراف‌های بازه‌ای هستند که از هر بازه به بازه‌ی دیگر فقط یک مسیر وجود دارد و این گراف فاقد دور است. ساختار داده‌ای درخت‌های بازه‌ای در [۲۴] توسط ربیعی بررسی شده است. ما در این مقاله ابتدا هسته را در یک گراف بازه‌ای تعریف کرده، سپس با ارایه خواصی برای این مساله روی درخت‌های بازه‌ای الگوریتمی خطی برای پیدا کردن هسته درخت بازه‌ای ارایه می‌کنیم.

۲ مساله‌ی میانه بازه‌ای

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بامجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد. در یک گراف بازه‌ای هر رأس v_i تناظر یک به یک با بازه I_i دارد و یال $(v_i, v_j) \in E$ در صورتی وجود دارد که $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. مساله p-میانه در یک گراف بازه‌ای عبارت است از یافتن p بازه یا سرویس‌دهنده روی شبکه با n بازه به عنوان نقاط تقاضا، به‌طوری که مجموع فاصله‌های n-p بازه‌ی دیگر تا p بازه موردنظر کمینه شود.

در این مقاله طول هر یال را یک در نظر گرفته و اگر رأس v_i دارای وزن w_i باشد طول بازه I_i را w_i در نظر می‌گیریم. بنابراین یک گراف بازه‌ای مجموعه‌ای از بازه‌ها است که اگر دو بازه I_i و I_j با هم اشتراک داشته باشند، یالی بین رأس v_i و v_j برقرار است. هم‌چنین فرض کنید $C(I_i, I_j)$ کوتاه‌ترین مسیر بازه‌های متصل I_i و I_j باشد. تعداد یال‌های روی $C(I_i, I_j)$ را فاصله بین I_i و I_j در نظر گرفته و با $d(I_i, I_j)$ نشان می‌دهیم. بنابر تعاریف فوق مساله p-میانه در گراف‌های بازه‌ای عبارت است از پیدا کردن مجموعه $I = \{I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_p}\}$ به طوری که تابع هدف زیر کمینه شود:

$$F(I) = \sum_{k=1}^n w(I_k) \min_{1 \leq j \leq p} d(I_k, I_{i_j}) \quad (1)$$

فرض کنید $I_i = [a_i, b_i]$ که a_i و b_i به ترتیب نقاط انتهایی چپ و راست بازه I_i هستند. فرض می‌کنیم هیچ دو بازه‌ای در مجموعه بازه‌های I نقاط انتهایی یکسانی ندارند و $a_i < b_i$. نقاط انتهایی بازه‌ها را مرتب کرده و در بردار L قرار می‌دهیم. بنابراین

$$L = \{p_1, p_2, \dots, p_{2n}\}$$

که p_i ها در آن یا a_i یا b_i هستند. بنابراین در این بردار اگر $i < j$ آن گاه $b_i < b_j$ و اگر انتهایی بازه‌ی I_i ابتدای بازه‌ی I_j باشد آن گاه در بردار L ، b_i قبل از a_j قرار می‌گیرد. چنگ و کانگ [۷] نشان داده‌اند که این برچسب‌گذاری در زمان $O(n \log n)$ به دست می‌آید. اگر s کوچک‌ترین نقطه پایانی چپ و t بزرگ‌ترین نقطه پایانی راست باشد، آن گاه قرار می‌دهیم $s = a_1$ ، $t = b_n$ و $L \in \{1, 2, \dots, n\}$ هم‌چنین فرض می‌کنیم $\bigcup_{i=1}^n I_i = [s, t]$.

تعریف ۱: بازه‌ی I_i را در I ماکسیمال گوئیم، هر گاه مشمول هیچ بازه‌ی دیگری نباشد.

تعریف ۲: بازه‌ی I_i را در I مینیمال گوئیم، هرگاه شامل هیچ بازه‌ی دیگری نباشد و بازه‌ی ماکسیمالی مانند I_j وجود داشته باشد که شامل آن باشد.

برای ادامه بحث نیاز به لم زیر داریم که اثبات آن در [۲۱] آمده است.

لم ۱: اگر بازه‌ی I_i در بازه‌ی I_j قرار داشته باشد یعنی $a_j < a_i < b_i < b_j$ آن‌گاه برای هر بازه‌ی دیگر مانند I_h داریم: $(I_h \neq I_i, I_j)$

$$d(I_h, I_j) \leq d(I_h, I_i)$$

قضیه ۱: هیچ بازه‌ی مینیمالی نمی‌تواند کاندیدی برای جواب مساله ۱-میانه باشد.

اثبات: با توجه به لم ۱ اگر بازه‌ی I_i در بازه‌ی I_j قرار داشته باشد یا $a_j < a_i < b_i < b_j$ آن‌گاه برای هر بازه‌ی دیگر I_h داریم: $(I_h \neq I_i, I_j)$

$$d(I_h, I_j) \leq d(I_h, I_i)$$

بنابراین چون فاصله بازه‌های دیگر به I_j کم‌تر از I_i است و برای مینیمم شدن تابع $F(I)$ کم‌ترین فاصله لازم است. بازه‌ی I_j می‌تواند جایگزین بازه I_i شود. بنابراین بازه I_i نمی‌تواند به عنوان کاندیدی برای مساله ۱-میانه در نظر گرفته شود. $\square$

اگر $q \in L$ یک نقطه پایانی از بازه‌ی I_i باشد. تعاریف زیر را در نظر بگیرید:

$$I_i \cap I_j \neq \emptyset$$

هم‌چنین توابع $F_{al}(q)$ و $F_{ar}(q)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F_{al}(q) = \sum_{I_j \in L | a_j < q} w(I_j) d(I_j, I_i)$$

$$F_{ar}(q) = \sum_{I_j \in L | a_j > q} w(I_j) d(I_j, I_i)$$

بنابراین همان‌طور که در [۱۱] آمده‌است، برای یک کاندید ۱-میانه تابع هدف می‌تواند به صورت زیر فرمول‌بندی شود:

$$F(I_i) = \sum_{k=1}^n w(I_k) d(I_k, I_i) = F_{al}(a_i) + F_{ar}(a_i) \quad (2)$$

به‌طوری‌که بازه‌ای که تابع فوق را کمینه کند ۱-میانه است. هم‌چنین یانگ چنگ در [۱۱] نشان داده‌است که مساله‌ی ۱-ماکسین و ۱-میانه روی گراف‌های بازه‌ای که نقاط پایانی آن‌ها مرتب شده‌اند در زمان $O(n)$ قابل حل هستند.

۳ مساله‌ی پیدا کردن هسته‌ی یک درخت بازه‌ای

هسته‌ی یک گراف مسیری است در گراف که مجموع فاصله‌ها از تمام رئوس تا این مسیر کمینه شود. بنابراین در یک گراف بازه‌ای یک هسته عبارت‌است از مجموعه‌ای از بازه‌های متصل بهم مانند $I = \{I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_p}\}$ که

مجموع فاصله‌ها از تمام بازه‌ها به این مسیر بازه‌ای کمینه شود. لذا با توجه به تعاریف فوق تابع هدف در این مساله را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$F(I) = \sum_{k=1}^n w(I_k) \min_{1 \leq j \leq p} d(I_k, I_{i_j}) \quad (3)$$

به طوری که $\{1, 2, \dots, p-1\}$ و $I_{i_u} \cap I_{i_{u+1}} \neq \emptyset$.

در ادامه به بررسی مساله پیدا کردن هسته روی یک درخت بازه‌ای می‌پردازیم.

قضیه ۲: در یک درخت بازه‌ای اگر دو بازه I_i و I_j که $a_i \leq a_j$ و $b_i \leq b_j$ با هم اشتراک داشته و یالی بین رئوس متناظر با آن‌ها موجود باشد، هیچ بازه‌ی I_h ($I_h \neq I_i, I_j$) دیگری نمی‌تواند وجود داشته باشد به طوری که

$$a_j \leq a_h < b_h \leq b_i.$$

اثبات: فرض کنید بازه‌ی I_h وجود دارد که $I_h \neq I_i, I_j$ و $a_j \leq a_h < b_h \leq b_i$. از آنجا که $a_j \leq a_h$ و $b_i \leq b_j$ بنا بر این $a_j < a_h \leq b_j$ یعنی بازه‌ی I_h با I_j دارای اشتراک است و $I_j \cap I_h \neq \emptyset$. همچنین چون $a_j \leq a_h$ و $a_i \leq a_j$ بنا بر این $a_i \leq a_h$ می‌باشد و چون $a_h < b_h \leq b_i$ لذا $a_h \leq b_i$ در نتیجه $a_i < b_h \leq b_i$ یعنی $I_i \cap I_h \neq \emptyset$. از طرفی طبق فرض $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ بنا بر این $I_i \cap I_h \cap I_j \neq \emptyset$ که نشان می‌دهد گراف دارای دور است و با فرض درخت بودن گراف تناقض دارد. □

قضیه ۳: اگر $I = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ مجموعه‌ی بازه‌ها در درخت بازه‌ای G و $I_p = \{I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_p}\}$ هسته‌ی درخت G باشد. آن گاه

$$F(I_p) = F_{al}(a_{i_1}) + F_{ar}(a_{i_1}) - \sum_{j=1}^{p-1} w_{ar}(b_{i_j}) - \sum_{j=2}^p w(I_{i_j})$$

اثبات: می‌دانیم $F(I_{i_1}) = F_{al}(a_{i_1}) + F_{ar}(a_{i_1})$ با اضافه کردن بازه‌های $I_{i_2}, I_{i_3}, \dots, I_{i_p}$ به مسیر

$$I_p = \{I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_p}\}$$

تشکیل می‌شود. به وضوح $F(I_p) < F(I_{i_1})$. فرض کنید

$$F(I_p) = F(I_{i_1}) - E$$

که $E > 0$. ثابت می‌کنیم:

$$E = \sum_{j=1}^{p-1} w_{ar}(b_{i_j}) + \sum_{j=2}^p w(I_{i_j})$$

برای بازه‌های I_j که $b_{i_1} < a_j < b_j < b_{i_2}$ ، چون بازه‌ی I_j با I_{i_1} دارای اشتراک نیست و با I_{i_2} اشتراک دارد، پس $d(I_j, I_{i_1}) = 2$ و $d(I_j, I_{i_2}) = 1$. از طرفی مجموع وزن‌های بازه‌های بین I_{i_1} و I_{i_2} به اندازه‌ی $w_{ar}(I_{i_1}) - w_{ar}(I_{i_2})$ می‌باشد و از آنجا که فاصله تا I_{i_1} ، ۲ واحد است که یک واحد از آن فاصله تا I_{i_2} می‌باشد. بنابراین از مقدار $F(I_{i_1})$ به اندازه‌ی $w_{ar}(I_{i_1}) - w_{ar}(I_{i_2})$ کاسته می‌شود. هم‌چنین برای بازه‌های I_j که $b_{i_2} < a_j < b_j < b_{i_3}$ ، چون بازه‌ی I_j با I_{i_2} دارای اشتراک نیست و با I_{i_3} اشتراک دارد، پس $d(I_j, I_{i_2}) = 3$ و $d(I_j, I_{i_3}) = 1$. از طرفی مجموع وزن‌های بازه‌های بین I_{i_2} و I_{i_3} به اندازه‌ی

می‌باشد و از آن‌جا که فاصله تا I_{i_1} ، ۳ واحد است که یک واحد از آن فاصله تا I_{i_r} می‌باشد و $d(I_{i_1}, I_{i_r}) = 2$. بنابراین $F(I_{i_1})$ به اندازه‌ی $2[w_{ar}(I_{i_r}) - w_{ar}(I_{i_1})]$ کاهش می‌یابد. با ادامه این روند برای بازه‌های I_j که $b_{i_{p-1}} < a_j < b_j < b_{i_p}$ داریم: $d(I_j, I_{i_1}) = p$ و $d(I_j, I_{i_k}) = 1$ که به اندازه‌ی $(p-1)[w_{ar}(I_{i_{p-1}}) - w_{ar}(I_{i_p})]$ و برای بازه‌های I_j که $b_{i_p} < a_j$ اگر $d(I_j, I_{i_p}) = k$ ، چون $d(I_j, I_{i_1}) = p + k - 1$ بنابراین به اندازه $(p-1)w_{ar}(I_{i_p})$ از مقدار $F(I_{i_1})$ کم می‌شود. از طرف دیگر خود بازه‌های $I_{i_r}, I_{i_{r-1}}, \dots, I_{i_p}$ که در مسیر قرار گرفته شده‌اند نیز مقدار $F(I_{i_1})$ را کاهش می‌دهند این بازه‌ها در محاسبات قبل به طور کامل محاسبه نمی‌شوند. مثلاً بازه‌ی I_j در

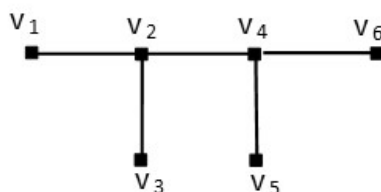
$$(j-2)[w_{ar}(I_{i_{j-2}}) - w_{ar}(I_{i_{j-1}})]$$

در نظر گرفته می‌شود اما $d(I_j, I_{i_1}) = j-1$ بنابراین برای هر بازه‌ی I_j ، $j = 2, 3, \dots, p$ به اندازه‌ی $w_{ar}(I_{i_j})$ باید از مقدار $F(I_p)$ کم کنیم. لذا داریم:

$$\begin{aligned} F(I_p) &= F_{al}(a_{i_1}) + F_{ar}(a_{i_1}) - [w_{ar}(b_{i_1}) - w_{ar}(b_{i_r})] \\ &- 2[w_{ar}(b_{i_r}) - w_{ar}(b_{i_{r-1}})] - \dots - (p-1)[w_{ar}(b_{i_{p-1}}) - w_{ar}(b_{i_p})] - pw_{ar}(b_{i_p}) = \\ &F_{al}(a_{i_1}) + F_{ar}(a_{i_1}) - \sum_{j=1}^{p-1} w_{ar}(b_{i_j}) - \sum_{j=2}^p w(I_{i_j}). \end{aligned}$$

مثال زیر کاربرد قضیه ۳ را نشان می‌دهد.

مثال ۱: گراف نشان داده شده در شکل ۱ همراه با وزن رئوسی که در جدول ۱ آمده است را در نظر بگیرید. بازه‌ای متناظر با گراف شکل ۱ در شکل ۲ آمده است.



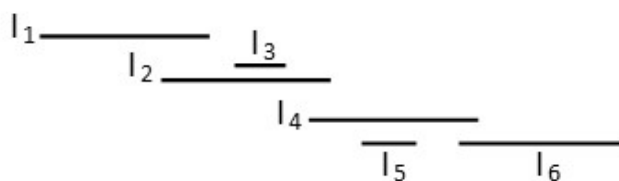
شکل ۱. گراف بازه‌ای

جدول ۱. وزن رئوس گراف شکل ۱

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6
۲	۲	۱	۲	۱	۲

برای بازه‌ی I_r ، مقدار تابع هدف به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$F(I_r) = F_{al}(a_r) + F_{ar}(a_r) = 2 + 9 = 11$$



شکل ۲. بازه‌های متناظر با گراف ۱

حال اگر مسیر $I = \{I_r, I_f, I_s\} = \{I_{i_1}, I_{i_r}, I_{i_s}\}$ را در نظر بگیریم. داریم:

$$F(I) = F_{al}(a_r) + F_{ar}(a_r) - \sum_{j=1}^r w_{ar}(b_{i_j}) - \sum_{j=2}^r w(I_{i_j}) = 11 - 3 - 3 = 5$$

بنابراین با استفاده از قضیه ۳ اگر مقدار تابع هدف را در ابتدای مسیر داشته باشیم با استفاده از مجموع وزن‌ها با محاسبات کم‌تری می‌توان مقدار تابع هدف را برای مسیر مورد نظر به دست آورد. هم‌چنین با استفاده از این قضیه می‌توان تغییرات تابع هدف را در زمان اضافه و کم شدن بازه‌ها به راحتی به دست آورد.

نتیجه ۱: اگر I_1 بازه‌ای در درخت بازه‌ای G و $F(I_1) = F_{al}(a_1) + F_{ar}(a_1)$ و $I_p = \{I_{i_1}, I_{i_p}\}$ مسیری از درخت G باشد. آن‌گاه

$$F(I_p) = F(I_1) - w_{ar}(b_1) - w(I_r)$$

قضیه ۴: اگر $I_p = \{I_{i_1}, I_{i_r}, \dots, I_{i_p}\}$ یک هسته‌ی درخت G باشد هیچ یک از بازه‌های $I_{i_1}, I_{i_r}, \dots, I_{i_{p-1}}$ بازه مینیمال نیستند.

اثبات: طبق قضیه ۱ اگر بازه‌ی I_{i_j} ، $j = 2, 3, \dots, p$ یک بازه‌ی مینیمال باشد بازه ماکسیمالی مشمول آن مانند I_{i_k} وجود دارد که فاصله‌ی بازه‌های دیگر تا آن از I_{i_j} کم‌تر است. بنابراین I_{i_k} می‌تواند جایگزین I_{i_j} باشد. □

نتیجه ۲: اگر $I_p = \{I_{i_1}, I_{i_r}, \dots, I_{i_p}\}$ یک هسته‌ی درخت G باشد هیچ یک از بازه‌های $I_{i_1}, I_{i_r}, \dots, I_{i_p}$ نمی‌توانند بازه‌ای غیر ماکسیمال باشند. به عبارت دیگر تمام بازه‌های روی هسته ماکسیمال هستند.

قضیه ۵: اگر $I = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ مجموعه‌ی بازه‌ها در درخت بازه‌ای G و $I_p = \{I_{i_1}, I_{i_r}, \dots, I_{i_p}\}$ مسیری از درخت G باشد و $I_k = \{I_{i_k}, I_{i_{k+1}}, \dots, I_{i_p}\}$ که $1 < k < p$ آن‌گاه

$$F(I_k) = F(I_p) - F_{al}(a_{i_1}) - F_{ar}(a_{i_1}) + F_{al}(a_{i_k}) + F_{ar}(a_{i_k}) - \sum_{j=1}^{k-1} w_{ar}(b_{i_j}) - \sum_{j=2}^k w(I_{i_j})$$

اثبات: از قضیه ۳ داریم:

$$F(I_p) = F_{al}(a_{i_1}) + F_{ar}(a_{i_1}) - \sum_{j=1}^{p-1} w_{ar}(b_{i_j}) - \sum_{j=2}^p w(I_{i_j})$$

و

$$F(I_k) = F_{al}(a_{i_k}) + F_{ar}(a_{i_k}) - \sum_{j=k}^{p-1} w_{ar}(b_{i_j}) - \sum_{j=k+1}^p w(I_{i_j})$$

برای یافتن اختلاف $F(I_p)$ و $F(I_k)$ ، تفاضل دو رابطه‌ی فوق را به دست می‌آوریم.

$$F(I_p) - F(I_k) = F_{aL}(a_{i_1}) + F_{aR}(a_{i_1}) - \sum_{j=1}^{p-1} w_{aR}(b_{i_j}) - \sum_{j=2}^p w(I_{i_j}) -$$

$$[F_{aL}(a_{i_k}) + F_{aR}(a_{i_k}) - \sum_{j=k}^{p-1} w_{aR}(b_{i_j}) - \sum_{j=k+1}^p w(I_{i_j})] = F_{aL}(a_{i_1}) + F_{aR}(a_{i_1}) - F_{aL}(a_{i_k})$$

بنابراین

$$F(I_k) = F(I_p) - F_{aL}(a_{i_1}) - F_{aR}(a_{i_1}) + F_{aL}(a_{i_k}) + F_{aR}(a_{i_k}) - \sum_{j=1}^{k-1} w_{aR}(b_{i_j}) - \sum_{j=2}^k w(I_{i_j}).$$

۳-۱ الگوریتم

با استفاده از قضایا و نتایج فوق می‌توان الگوریتمی برای به‌دست آوردن هسته‌ی یک درخت بازه‌ای پیشنهاد کرد. به‌این صورت که اگر سمت چپ‌ترین بازه I_1 باشد، $F(I_1)$ را محاسبه می‌کنیم. طبق قضیه‌ی ۴ و نتیجه‌ی ۲ بازه‌های مینیمال نمی‌توانند کاندیدی برای قرار گرفتن در هسته باشند و بازه‌های ماکسیمال هسته را تشکیل می‌دهند. بنابراین برای ساختن هسته از I_1 شروع کرده و از بین بازه‌هایی است که شامل b_1 هستند بازه‌ی ماکسیمال I_p را که بزرگ‌ترین نقطه‌ی انتهایی b_p را دارد انتخاب و آن را $RSUC(I_1)$ نامیده و به مسیر $I_p = \{I_1\}$ اضافه می‌کنیم. بنابراین $RSUC(I_1) = I_p$ که در آن همانند [۶] برای هر نقطه q روی خط حقیقی $RSUC(q) = I_k$ اگر $b_k = \max\{b_i | q \in I_i\}$ و برای هر بازه I_j تعریف می‌کنیم $RSUC(I_j) = RSUC(b_j)$. بنابراین طبق نتیجه‌ی ۱ داریم:

$$F(I_p) = F(I_1, I_p) = F(I_1) - w_{aR}(b) - w(I_p)$$

حال $RSUC(I_p)$ را یافته و آن را I_p نامیده و به مسیر اضافه می‌کنیم. با ادامه‌ی این روند رابطه‌ی بازگشتی زیر را به‌دست می‌آوریم.

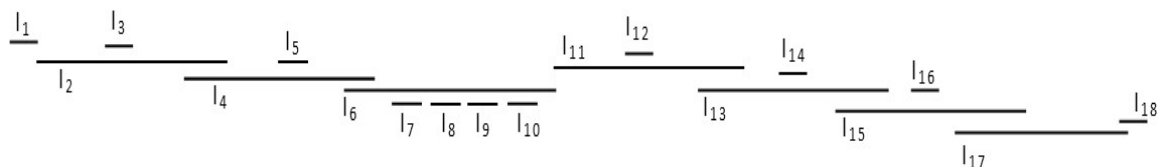
$$F(I_p) = F(I_1, I_p, \dots, I_k) = F(I_1, I_p, \dots, I_{k-1}) - w_{aR}(b_{k-1}) - w(I_k) \quad (۴)$$

اضافه شدن بازه‌ها به مسیر را تا سمت راست‌ترین بازه ادامه می‌دهیم. مسیر به‌دست آمده هسته می‌باشد.

قضیه ۶: مساله‌ی پیدا کردن هسته‌ی یک درخت بازه‌ای که نقاط پایانی آن‌ها مرتب شده‌اند، می‌تواند در زمان $O(n)$ حل شود.

اثبات: فرض کنیم $I = \{I_1, I_p, \dots, I_n\}$ مجموعه‌ی بازه‌ها در درخت بازه‌ای G باشد. با توجه به الگوریتم ارایه شده، در بدترین حالت اگر n بازه‌ی ماکسیمال متصل به هم داشته باشیم، هسته شامل تمام بازه‌ها است. مقدار $F(I_n)$ می‌تواند در زمان ثابت محاسبه شود و چون n بازه داریم، مساله‌ی پیدا کردن هسته‌ی یک درخت بازه‌ای که نقاط پایانی آن‌ها مرتب شده‌اند، می‌تواند در زمان $O(n)$ حل شود. □

مثال ۲: بازه‌های شکل ۳ را در نظر بگیرید. که وزن رئوس در جدول ۲ داده شده‌است.



شکل ۳. بازه‌های مثال ۲

جدول ۲. وزن رئوس متناظر با بازه‌های شکل ۳

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}
۰/۱	۱	۰/۱	۱	۰/۱	۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱

w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}	w_{18}
۱	۰/۱	۱	۰/۱	۱	۰/۱	۱	۰/۱

برای به‌دست آوردن هسته‌ی آن طبق الگوریتم از سمت چپ‌ترین بازه شروع می‌کنیم. بنابراین

$$F(I_p) = F(I_1) = 32/7$$

سپس برای اضافه کردن بازه‌ی بعدی به مسیر، بازه‌ی I_2 را انتخاب می‌کنیم زیرا $RSUC(I_1) = I_2$.

$$F(I_p) = F(I_1, I_2) = F(I_1) - w_{ar}(b_1) - w(I_2) = 32/7 - 7 - 1 = 24/7$$

داریم: $RSUC(I_2) = I_4$ بنابراین بازه‌ی I_4 به مسیر اضافه می‌شود.

$$F(I_p) = F(I_1, I_2, I_4) = F(I_2) - w_{ar}(b_2) - w(I_4) = 24/7 - 5/9 - 1 = 17/8$$

به‌همین ترتیب در هر مرحله RSUC آخرین بازه را به‌دست آورده و به مسیر اضافه می‌کنیم. این روند را تا رسیدن به سمت راست‌ترین بازه یعنی I_{18} ادامه می‌دهیم.

$$F(I_p) = F(I_1, I_2, I_4, I_6) = F(I_4) - w_{ar}(b_4) - w(I_6) = 17/8 - 4/8 - 1 = 12$$

$$F(I_p) = F(I_1, I_2, I_4, I_6, I_{11}) = F(I_6) - w_{ar}(b_6) - w(I_{11}) = 12 - 3/4 - 1 = 7/6$$

$$F(I_p) = F(I_1, I_2, I_4, I_6, I_{11}, I_{13}) = F(I_{11}) - w_{ar}(b_{11}) - w(I_{13}) = 7/6 - 2/3 - 1 = 4/3$$

$$F(I_p) = F(I_1, I_2, I_4, I_6, I_{11}, I_{13}, I_{15}) = F(I_{13}) - w_{ar}(b_{13}) - w(I_{15}) = 4/3 - 1/2 - 1 = 2/1$$

$$F(I_p) = F(I_1, I_2, I_4, I_6, I_{11}, I_{13}, I_{15}, I_{17}) = F(I_{15}) - w_{ar}(b_{15}) - w(I_{17}) = 2/1 - 0/1 - 1 = 1$$

$$F(I_p) = F(I_1, I_2, I_4, I_6, I_{11}, I_{13}, I_{15}, I_{17}, I_{18}) = F(I_{17}) - w_{ar}(b_{17}) - w(I_{18}) = 1 - 0/1 = 0/9$$

بنابراین هسته‌ی گراف بازه‌ای فوق مسیر $P = \{I_1, I_2, I_4, I_6, I_{11}, I_{13}, I_{15}, I_{17}, I_{18}\}$ است و $F(I_p) = 0/9$ می‌باشد.

۴ نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی مساله پیدا کردن هسته روی درخت‌های بازه‌ای پرداختیم و نشان دادیم بازه‌هایی که روی هسته‌ی یک درخت قرار دارند نمی‌توانند بازه‌ای غیر ماکسیمال باشند. سپس الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n)$ برای پیدا کردن هسته‌ی یک درخت بازه‌ای ارائه دادیم. در مطالعات بعدی می‌توان هسته‌ی درخت با محدودیت طول در نظر گرفت. بنابراین هدف یافتن هسته‌ای با طول L روی درخت بازه‌ای است. هم‌چنین می‌توان مساله را از یافتن هسته به (K, L) -هسته تغییر داد که در این حالت هدف یافتن زیردرختی با طول حداکثر L و تعداد برگ‌های حداکثر K است که مجموع فاصله‌های تمام بازه‌ها تا این زیردرخت کمینه شود.

منابع

- [۲۱] امینی، ف.، (۱۳۸۸). گراف‌های بازه‌ای کاوشگر. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۳(۲۲)، ۶۱-۷۰.
- [۲۳] قاسمی، ح.، (۱۳۹۱)، مساله مکانیابی p -ماکسین، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده ریاضی.
- [۲۴] ربیعی، ا.، (۱۳۹۴)، گراف بازه‌ای و کاربردهایش، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده ریاضی.
- [1] Handler, G. Y., Mirchandani, P. B., (1979). Location On Network. Theory And Algorithms, Cambridg.
- [2] Hamacher, H. W., Nickel, S., (1998). Classification of location models. Location science, 6, 229-242.
- [3] Hassin, R., Tamir, A., (1991). Improved complexity bounds for location problems on the real line. Operation Research Letters, 10, 395-402.
- [4] Maimani, H. R., (2008). Median and center of zero-divisor graph of commutative semigroups. Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics, 3, 69-76.
- [5] Fathali, J., Jafari-Rad, N., Sherbaf, S. R., (2014). The p -median and p -center problems on bipartite graphs. Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics, 9, 37-43.
- [6] Morgan, C. A., Slater, P. J., (1980). A linear algorithm for a core of atree. Journal of Algorithms, 1, 247-258.
- [7] Becker, R. I., (1990). Inductive algorithms on finite trees. Quaest Math., 13, 165-181.
- [8] Hakimi, S. L., Schmeichel, E. F., Labbe, M., (1993). On locating path or tree shaped facilities on network. Networks, 23, 543-555.
- [9] Zaferanieh, M., Fathali, J., (2012). Finding a core of a tree with pos/neg weight. Math. Meth. Oper. Res., 26, 147-160.
- [10] Tamir, A., Puerto, J., Mesa, J. A., Rodriguez-chia, A. M., (2005). Conditional location of path and tree shaped facilities on trees, Journal of Algorithms, 56, 50-75.
- [11] Peng, S., Lo, W., (1996). Efficient algorithms for finding a core of a tree with a specified length, Journal of Algorithms, 20, 445-458.
- [12] Minieka, E., Patel, N. H., (1983). On finding the core of a treewith a specified length. J. Alg., 345-352.
- [13] Becker, R. I., Chang, Y. I., Lari, I., Scozzari, A., and Storchi, G., (2002). Finding the l -core of a tree, Discrete Applied Mathematics, 118, 25-42.
- [14] Becker, R. I., Lari, I., Storchi, G., Scozzari, A., (2002). Efficient algorithms for finding the (k, l) -core of tree networks. Networks, 40, 208-215.
- [15] Peng, S. T., Stephens, A. B., Yesha, Y., (1993). Algorithms for a core and k -tree core of a tree. Journal of Algorithms, 15, 143-159.
- [16] Motevalli, S., Fathali, J., Zaferanieh, M., (2015). An efficient algorithm for finding the semi-obnoxious (k, l) -core of a tree. Journal of Mathematical Modeling, 3, 129-144.
- [17] Halldorsson, M. M., Kortsarz, G., Shachnai, H., (2003). Sum coloring interval and k -claw free graphs with application to scheduling dependent jobs. Algorithmica, 37, 187-209.
- [18] Irani, S., Leung, V., (2003). Scheduling with conflicts on bipartite interval graphs. J. Scheduling, 6, 287-307.

- [19] Bespamyatnikh, S., Bhattacharya, B., Keil, M., Kirkpatrick, D., Segal, M., (2002). Efficient algorithms for centers and medians in interval and circular-arc graphs. *Networks*, 29, 144-152.
- [20] Cheng, T. C. E., Kang, L. Y., Ng, C. T., (2007). An improved algorithm for the p-center problem on interval graphs with unit lengths. *Comput. Oper. Res.*, 34, 2215-2222.
- [22] Cheng, Y., Kang, L., (2010). The p-maxian problem on interval graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 158, 1986-1993.