

رویکرد روش مونت کارلوی کمترین مربعات برای قیمت گذاری اختیار فروش آمریکایی چند دارایی تحت مدل هستون-هال-وایت

الدوز صمیمی^۱، فرشید مهردوست^{۲*}

۱- دانشجوی دکتری، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

۲- دانشیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

رسید مقاله: ۱ بهمن ۱۳۹۵

پذیرش مقاله: ۱۷ تیر ۱۳۹۶

چکیده

در این مقاله، مسأله‌ی قیمت گذاری اختیار معامله‌های چند دارایی آمریکایی تحت مدل هستون-هال-وایت را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. مدل مورد نظر ما در مقایسه با مدل اصلی هستون، با توجه به نرخ بهره تصادفی و تلاطم تصادفی آن، با واقعیت بازار سازگارتر است. کارایی و دقت روش پیشنهادی را با بررسی تاثیر میزان نرخ بهره و تلاطم بر قیمت اختیار فروش چند دارایی آمریکایی تحت مدل هستون-هال-وایت نشان می‌دهیم.

کلمات کلیدی: اختیار آمریکایی، چند دارایی، مدل تلاطم تصادفی، روش مونت کارلوی کمترین مربعات

۱ مقدمه

اختیار از نوع اروپایی دارای یک زمان اعمال است که در زمان انقضا می‌باشد. اگر اختیار در زمانی غیر از زمان انقضا سودآور باشد، باید تا زمان انقضا برای اعمال اختیار منتظر ماند. اگر دارنده‌ی اختیار در هر زمان از شروع تا پایان زمان انقضا زمان اعمال اختیار را بتواند انتخاب کند، اختیار را آمریکایی گویند. یک اختیار متوسط بین اختیار از نوع آمریکایی و اختیار از نوع اروپایی، اختیار برمودان است. در حقیقت، اختیار برمودان فقط روی مجموعه‌های متناهی از زمان مجاز به اعمال زودتر از موعد می‌باشد. به یک اختیار آمریکایی می‌توان به صورت یک اختیار اروپایی نگاه کرد، با این فرض که بازدهی اختیار در همه‌ی دوره‌های زمانی تا زمان انقضا مورد نیاز است؛ زیرا نمی‌توان گفت چه زمانی باید اختیار را اعمال کرد. فرضیه‌ی موجود در این قسمت بر این اصل استوار است، به دست آوردن بهترین زمانی که دارنده‌ی اختیار می‌تواند آن را اعمال کند، از نقطه نظر مالک اختیار، این زمان بهینه‌ترین زمان اعمال است. قیمت گذاری اختیار آمریکایی به دلیل دارا نبودن یک فرم بسته مشکل تر از

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: fmehrdoust@guilan.ac.ir

قیمت‌گذاری اروپایی است؛ زیرا در اختیار آمریکایی زمان اعمال مشخص نیست و زمانی که قیمت به مقدار مورد نظر رسید اعمال صورت می‌پذیرد؛ ولی در اختیار اروپایی زمان اعمال اختیار از ابتدا مشخص است [۱، ۲]. مدل فیشر بلک و مایرن شولز و رابرت مرتون، گام بزرگی در قیمت‌گذاری اختیار بود. آن‌ها مدلی ارائه دادند که تحت عنوان مدل بلک شولز [۲، ۳] معروف شد. معادله دیفرانسیل مدل بلک شولز به صورت زیر می‌باشد:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad (1)$$

که در آن μ نرخ بهره، σ واریانس و $dW(t)$ حرکت براونی می‌باشد. واریانس و نرخ بهره در این مدل ثابت فرض می‌شود [۱]؛ اما این مدل دارای کمبودهایی است که از آن جمله می‌توان به ثابت فرض کردن نرخ بهره و تلاطم اشاره کرد. بعدها مدل‌های بهتری ارائه شد که بعضی از نقص‌های مدل بلک شولز را پوشش داد که از آن جمله می‌توان هال وایت^۱ (۱۹۸۷)، اسکات^۲ (۱۹۸۷)، استین و استین^۳ (۱۹۹۱) و هستون^۴ (۱۹۹۳) را نام برد [۴].

برای قیمت‌گذاری اختیار معمولاً از روش‌های انتگرال‌گیری استفاده می‌شود و به طور خاص روی روش فوریه سریع متمرکز است. روش انتگرال‌گیری از روش‌های عددی برای قیمت‌گذاری اختیار است که اولین بار توسط ادوارو شوارتز در سال (۱۹۷۷) به کار گرفته شد. معادلات دیفرانسیل چگونگی نمو قیمت یک دارایی در طول زمان را به وسیله یک سری معادلات دیفرانسیل با زمان گسسته توضیح می‌دهد [۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰]. استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری برای چند دارایی‌ها بسیار مشکل و در مواقعی که با تعداد زیادی دارایی مواجهه می‌شویم (بیش‌تر از سه دارایی) تقریباً غیر ممکن است. با توجه به ساده و کارآمد بودن روش‌های شبیه‌سازی در این مقاله از روش شبیه‌سازی کم‌ترین مربعات مونت کارلو استفاده می‌کنیم. از مهم‌ترین کاربردهای روش مونت کارلو در ریاضیات مالی، حل معادله بلک شولز در مدل‌سازی قیمت اختیار با نرخ‌های تصادفی است. حل این معادله یک مدل شبیه‌سازی شده می‌سازد که این مدل شبیه‌سازی شده برای پیش‌بینی تغییرات در قیمت سهام مورد استفاده قرار می‌گیرد. شبیه‌سازی مونت کارلو برای قیمت‌گذاری از نوع اروپایی بسیار مناسب است که در آن زمان انقضا همان زمان اعمال است؛ ولی در مورد قیمت‌گذاری از نوع آمریکایی، روش کم‌ترین مربعات مونت کارلو مناسب‌تر از روش شبیه‌سازی مونت کارلو است. اولین بار در سال ۱۷۹۴ روش کم‌ترین مربعات توسط کارل فردریش گاوس بیان شد. کم‌ترین مربعات یک روش آماری برای حل دستگاه معادلاتی است که تعداد معادله‌های بیش از تعداد مجهول‌ها است. این روش بیش‌تر در تحلیل رگرسیون به کار می‌رود. در ریاضیات مالی بویل در سال ۱۹۷۷ برای حل اختیار اروپایی، از روش شبیه‌سازی مونت کارلو استفاده کرد. در سال ۱۹۹۶ چگونگی استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو برای حل قیمت‌گذاری اختیار آسیایی بیان شد [۱۱، ۱۲، ۱۳].

شبیه‌سازی مونت کارلو در مواردی که فرمول تحلیلی در دست نیست، روش بسیار مناسبی است. چون زمان اعمال بهینه در قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی نامشخص است، نمی‌توانیم به راحتی یک فرم بسته برای آن ارائه

^۱ - Hull-White

^۲ - Scott

^۳ - Stein and Stein

^۴ - Heston

دهیم؛ بنابراین، از روش‌های شبیه‌سازی برای برآورد زمان بهینه استفاده می‌شود، که یکی از این روش‌ها مونت-کارلو است. در روش مونت‌کارلو، گام‌های شبیه‌سازی شده همه در نمونه‌های زمانی تولید شده است. آن‌ها از قیمت اولیه سهام S شروع و مطابق با حرکت براونی هندسی معین به سمت زمان انقضا حرکت می‌کند؛ اما چون در قیمت‌گذاری از نوع اختیار آمریکایی شروع فرآیند از حرکت رو به عقب است؛ بنابراین محاسبات از زمان انقضا شروع می‌شود و رو به عقب حرکت می‌کند، تا به S برسد. معمولاً این روش همه‌ی قیمت‌های دارایی را در امتداد همه‌ی مسیرها ذخیره می‌کند [۱۴، ۱۵].

در اینجا از روش شبیه‌سازی کم‌ترین مربعات مونت‌کارلوی (LSM) استفاده می‌شود، که برای محاسبه اختیار چند دارایی از نوع آمریکایی نیاز به ذخیره همه قیمت‌های دارایی نیست و ذخیره‌سازی از $O(dMN)$ به $O((d+1)M+N)$ کاهش می‌یابد. ایده اصلی تولید دو نوع مسیر می‌باشد؛ اولی روش رو به جلو، برای تولید قیمت دارایی تا زمان انقضا و دیگری روش رو به عقب برای محاسبه میانگین برای مواقعی که نیاز است. هر عدد تصادفی در این روش دو بار در عوض یک بار محاسبه می‌شود و این تنها هزینه اضافی موجود است. در نتیجه هزینه‌ی محاسباتی کم‌تر از روش‌هایی است که همه‌ی نمونه‌های قیمت‌های دارایی را ذخیره می‌کنند [۱۷، ۱۶، ۱۵].

چند دارایی‌ها که به عنوان یک دارایی یا سبدی از چند دارایی شناخته شده است، ترکیبی از چند دارایی (مانند پول نقد، سهام یا اوراق قرضه) است که به عنوان یک سرمایه‌گذاری باعث ایجاد یک گروه یا مجموعه‌ای از دارایی‌ها می‌شود. با افزایش تنوع در سبد کالا، خطر نوسانات نسبت به سبدی با یک دارایی کاهش می‌یابد و همچنین ممکن است بازده را افزایش دهد. نتیجه حاصل از استفاده چند دارایی، واکنش کم‌تر به تغییرات و نوسانات منفی بازار و جلوگیری از زیان است، برای مثال $S \& P 500$ و داوجونز ($DJIA$) را می‌توان نام برد. در این مقاله ما سعی کردیم که یک قیمت منصفانه برای یک سبد از چند دارایی به دست آوریم [۱۸].

در [۹] اختیار آمریکایی یک دارایی تحت مدل هستون هال وایت با روش کم‌ترین مربعات قیمت‌گذاری شد؛ ولی در این مقاله قیمت‌گذاری اختیار فروش آمریکایی چند دارایی تحت مدل هستون هال وایت مورد مطالعه قرار می‌گیرد. مدل هستون هال وایت مدلی برای برآورد قیمت چند دارایی در آینده و مدلی با واریانس و نرخ بهره تصادفی است و چون قیمت دارایی را با واریانس و نرخ بهره تصادفی فرض می‌کند در نتیجه انتظار می‌رود که برآورد قیمت‌های دارایی در آینده به واقعیت نزدیک‌تر باشد و در نتیجه قیمت عادلانه‌تری برای اختیار به دست آوریم.

در بخش ۲، مدل هستون هال وایت را برای دو دارایی و سه دارایی بیان می‌کنیم. برای حل معادلات از گسسته‌سازی اوایلر استفاده کردیم. قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی با استفاده از روش کم‌ترین مربعات مونت‌کارلو و الگوریتم سه دارایی را در بخش ۳ مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش ۴، نتایج عددی برای اختیار فروش آمریکایی چند دارایی را بیان می‌کنیم و تغییرات قیمت اختیار فروش آمریکایی چند دارایی، در برابر افزایش نرخ بهره بدون ریسک، زمان انقضا، واریانس و ضریب همبستگی محاسبه و مقایسه می‌کنیم. نتیجه گیری را در بخش ۵ ارائه می‌دهیم.

۲ مدل هستون هال وایت

مدل هستون هال وایت، مدلی با واریانس تصادفی و نرخ بهره تصادفی می باشد، که این مدل به وسیله معادله دیفرانسیل زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} dS(t) &= (r(t) - d) S(t) dt + \sqrt{V(t)} S(t) dW_1(t), \\ dV(t) &= k(\theta - V(t)) dt + \nu \sqrt{V(t)} dW_2(t), \\ dr(t) &= \lambda(\theta_r - r(t)) dt + \eta dW_3(t), \\ S(\cdot) &= S_0, V(\cdot) = V_0, r(\cdot) = r_0, \\ \langle dW_i^i, dW_j^i \rangle &= \rho_{ij} dt, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2)$$

در معادله بالا k سرعت رسیدن به میانگین، θ واریانس دراز مدت، r نرخ بهره، ν تلاطم واریانس، λ سرعت تبدیل به میانگین، η پارامتر واریانس، ρ_{ij} ضریب همبستگی بین دو حرکت برآونی W_j و W_i ، S_0 قیمت اولیه دارایی، V_0 واریانس اولیه و r_0 نرخ بهره اولیه می باشند (پارامترها عددهای مثبت هستند) [۴].

۲-۱ مدل هستون هال وایت برای دو دارایی

در این بخش، مدل هستون هال وایت در حالی که دو دارایی تحت اختیار می باشد، مورد بررسی قرار می گیرد. معادله دیفرانسیل تصادفی، برای دو دارایی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} dS^i(t) &= (r(t) - d) S^i(t) dt + \sqrt{V^i(t)} S^i(t) dW_1^i(t), \quad i = 1, 2, \\ dV^i(t) &= k(\theta - V^i(t)) dt + \nu \sqrt{V^i(t)} dW_2^i(t), \quad i = 1, 2, \\ dr(t) &= \lambda(\theta_r - r(t)) dt + \eta dW_3(t), \\ S^i(\cdot) &= S_0^i, V^i(\cdot) = V_0^i, r(\cdot) = r_0, \\ \langle dW_i^i, dW_j^i \rangle &= \rho_{ij} dt, \quad i, j = 1, 2, 3. \\ \langle dW_1^1, dW_2^2 \rangle &= \rho' dt. \end{aligned} \quad (3)$$

که در معادله بالا، ρ' ضریب همبستگی بین دو دارایی تحت اختیار است. پارامترها، همان پارامترهای متعلق به یک دارایی است. از روش گسسته سازی اوایلر مارویاما برای گسسته سازی [۴] قیمت دارایی استفاده می کنیم، تا بتوانیم یک برآورد برای قیمت دارایی در آینده به دست آوریم. فرض کنیم، S_t یک فرآیند تصادفی است که از معادله دیفرانسیل (۳) به دست آمده که در روی شبکه ای از نقاط $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} S_{j+1}^i &= S_j^i + (r_j - d) S_j^i \Delta t + \sqrt{V_j^i} S_j^i \Delta W_{\gamma}^i \\ V_{j+1}^i &= V_j^i + k(\theta - V_j^i) \Delta t + \nu \sqrt{V_j^i} \Delta W_{\gamma}^i, \\ r_{j+1} &= r_j + \lambda(\theta_j - r_j) \Delta t + \eta \Delta W_{\gamma}, \end{aligned} \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

که در آن، $t_j = j\Delta t$ ، $1 \leq j \leq N$ ، $\Delta W_{ik}^j = W_i^j(t_{k+1}) - W_i^j(t_k) \sim N(0, \Delta t)$ ، برای هر $i = 1, 2$.

بر طبق قضیه حد مرکزی داریم:

$$\Delta W_{ik}^j = Z_i^j \sqrt{\Delta t}$$

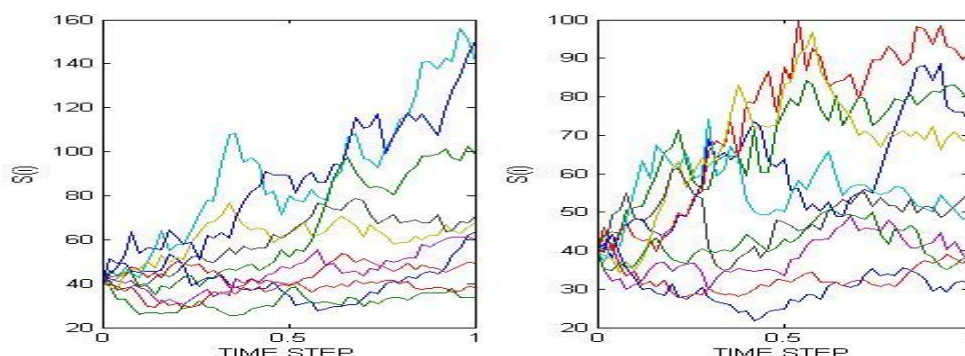
برای ضریب همبستگی بین دو دارایی، از تجزیه چولسکی استفاده کرده ایم [۴]. زمانی که دو دارایی تحت اختیار می باشد به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \rho^1 Z_1 + \sqrt{1 - (\rho^1)^2} Z_{\gamma} \\ \varepsilon_{\gamma} &= \rho^1 Z_{\gamma} + \sqrt{1 - (\rho^1)^2} Z_1 \end{aligned} \quad (5)$$

معادله (۳)، به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} S_{j+1}^i &= S_j^i + (r_j - d) S_j^i \Delta t + \sqrt{\Delta t} V_j^i S_j^i \varepsilon_i, \\ V_{j+1}^i &= V_j^i + k(\theta - V_j^i) \Delta t + \nu \sqrt{\Delta t} V_j^i \Phi_i^i, \\ r_{j+1} &= r_j + \lambda(\theta_j - r_j) \Delta t + \eta \sqrt{\Delta t} \Phi_{\gamma}, \\ \Phi_1^i &= \rho_1^i Z_1^i + \sqrt{1 - \rho_1^i} Z_{\gamma}^i \\ \Phi_{\gamma} &= \rho_{\gamma}^i Z_1^i + \sqrt{1 - \rho_{\gamma}^i} Z_{\gamma}^i \\ \varepsilon_i &= \rho^i Z_i + \sqrt{1 - (\rho^i)^2} Z_j \end{aligned} \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (6)$$

که در فرمول بالا، ε_i با استفاده از تجزیه چولسکی به دست آمده است و $S_j^i = S^i(t_j)$ و $V_j^i = V^i(t_j)$ برای $t_j = j\Delta t$ به ازای $1 \leq j \leq N$ است.



شکل ۱. ماکزیمم مسیرهای شبیه سازی شده برای مدل هستون هال وایت. شکل سمت راست با ضریب همبستگی $\rho' = 0/5$ و شکل سمت چپ با ضریب همبستگی بین دو دارایی $\rho' = 0$.

شکل ۱، قیمت دارایی برای ماکزیمم ۳۰ مسیر شبیه سازی شده، با واریانس اولیه $V_1 = 0/3$ و $V_2 = 0/5$ می باشد. در سمت راست ضریب همبستگی بین دو دارایی $\rho' = 0/5$ و در سمت چپ ضریب همبستگی بین دو دارایی $\rho' = 0$ است. با افزایش ضریب همبستگی بین دو دارایی تحت اختیار، انتظار داشتن قیمت های پایین تر افزایش می یابد، وقتی که احتمال داشتن قیمت های پایین تر در آینده افزایش می یابد، قیمت اختیار فروش آمریکایی افزایش می یابد. در نتیجه، در دو دارایی ها افزایش ضریب همبستگی بین دو دارایی، به افزایش قیمت اختیار فروش آمریکایی می انجامد (در نتایج عددی می توان به خوبی مشاهده کرد).

۲-۲ مدل هستون هال وایت سه دارایی

در این بخش، اختیار آمریکایی فروش با مدل هستون هال وایت بررسی می شود، درحالی که سه دارایی تحت اختیار است. معادله دیفرانسیل تصادفی، برای سه دارایی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} dS^i(t) &= (r(t) - d) S^i(t) dt + \sqrt{V^i(t)} S^i(t) dW_1^i(t), & i = 1, 2, 3, \\ dV^i(t) &= k(\theta - V^i(t)) dt + \nu \sqrt{V^i(t)} dW_2^i(t), & i = 1, 2, 3, \\ dr(t) &= \lambda(\theta_r - r(t)) dt + \eta dW_3(t), \\ S^i(0) &= S_0^i, V^i(0) = V_0^i, r(0) = r_0, \\ \langle dW_1^i, dW_1^j \rangle &= \rho_{ij} dt, & i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (7)$$

ادامه روند همانند دو دارایی می باشد، یعنی در ابتدا، یک برآورد برای قیمت دارایی تحت اختیار به دست می آوریم، از روش گسسته سازی اوایلر مارویاما [۴، ۱۹] برای به دست آوردن یک تقریب برای قیمت دارایی، نرخ بهره و واریانس بر روی شبکه ای با زمان گسسته استفاده می کنیم و برای هر یک از مسیرهای شبیه سازی شده و همه گام های زمانی، یک تقریب به دست می آوریم. فرض می کنیم که S_t فرآیندی تصادفی است که از معادله دیفرانسیل (۷) پیروی می کند و آن را در روی شبکه ای از نقاط به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\begin{aligned} S_{j+1}^i &= S_j^i + (r_j - d) S_j^i \Delta t + \sqrt{V_j^i} S_j^i \Delta W_{jk}^i, \\ V_{j+1}^i &= V_j^i + k(\theta - V_j^i) \Delta t + \nu \sqrt{V_j^i} \Delta W_{\nu}^i, \\ r_{j+1} &= r_j + \lambda(\theta_j - r_j) \Delta t + \eta \Delta W_r. \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن، $t_j = j\Delta t$ ، $1 \leq j \leq N$ ، $\Delta W_{ik}^j = W_i^j(t_{k+1}) - W_i^j(t_k) \sim N(0, \Delta t)$ ، برای همه $i=1, 2, 3$. بر طبق قضیه حد مرکزی داریم:

$$\Delta W_{ik}^j = Z_i^j \sqrt{\Delta t}$$

برای ضریب همبستگی بین سه دارایی از تجزیه چولسکی استفاده کرده‌ایم و فرمول تجزیه چولسکی زمانی که سه دارایی تحت اختیار می باشد ($n=3$)، به صورت زیر است [۳]:

$$\varepsilon_r = \rho_{r1}' Z_1 + \frac{\rho_{rr}' - \rho_{r1}' \rho_{r1}'}{\sqrt{1 - (\rho_{r1}')^2}} Z_r + \sqrt{\frac{1 + 2\rho_{rr}' \rho_{r1}' \rho_{r1}' - (\rho_{r1}')^2 - (\rho_{r1}')^2 - (\rho_{rr}')^2}{1 - (\rho_{r1}')^2}} Z_r$$

پس معادله (۷) را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} S_{j+1}^i &= S_j^i + (r_j - d) S_j^i \Delta t + \sqrt{\Delta t} V_j^i S_j^i \varepsilon_i, \\ V_{j+1}^i &= V_j^i + k(\theta - V_j^i) \Delta t + \nu \sqrt{\Delta t} V_j^i \Phi_{\nu}^i, \\ r_{j+1} &= r_j + \lambda(\theta_j - r_j) \Delta t + \eta \sqrt{\Delta t} \Phi_r, \\ \Phi_{\nu}^i &= \rho_{\nu}^i Z_{\nu}^i + \sqrt{1 - \rho_{\nu}^2} Z_r^i, \\ \Phi_r &= \rho_r Z_r^i + \sqrt{1 - \rho_r^2} Z_r, \\ \varepsilon_i &= \rho^i Z_1^i + \frac{\rho^i - (\rho^i)^2}{\sqrt{1 - (\rho^i)^2}} Z_1^i + \sqrt{\frac{1 + 2(\rho^i)^2 - 3(\rho^i)^2}{1 - (\rho^i)^2}} Z_1^k, \quad k, i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j \neq k. \end{aligned} \quad (9)$$

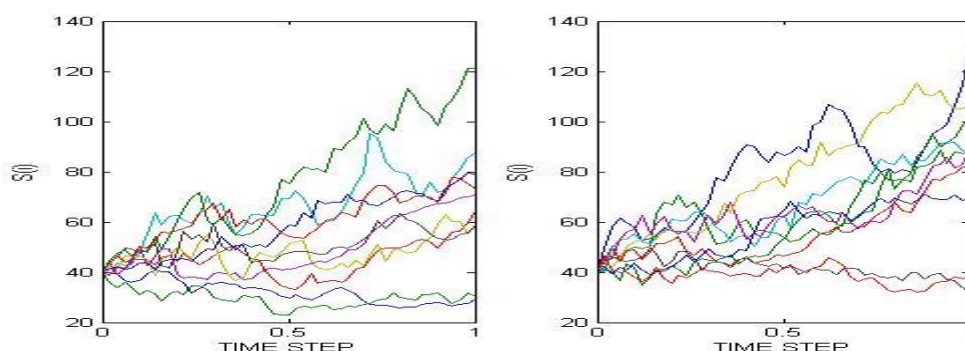
در فرمول بالا، ε_i با استفاده از تجزیه چولسکی به دست آمده و $S_j^i = S^i(t_j)$ و $V_j^i = V^i(t_j)$ برای $i=1, 2, 3$ و $t_j = j \Delta t$ برای $1 \leq j \leq N$ است. برای به دست آوردن قیمت اختیار فروش آمریکایی چند دارایی از روش LSM ، استفاده می کنیم [۱۴، ۱۵، ۱۶، ۲۰].

الگوریتم ۱. تعیین قیمت دارایی تحت مدل هستون هال وایت

Algorithm ۳. HHW Asset Path

۱. Set $\Delta t = \frac{T}{N}$
۲. Generate independent standard normal variates $\varepsilon_i \sim N(0,1)$, $j=1, \dots, N$.
۳. Set $S_{j+1}^i \leftarrow S_j^i + (r_j - d) S_j^i \Delta t + \sqrt{\Delta t} V_j^i S_j^i Z_j^i$ $j=1, \dots, N$, $i=1, \dots, N$
۴. Set $V_{j+1}^i \leftarrow V_j^i + k(\theta - V_j^i) \Delta t + v \sqrt{\Delta t} V_j^i \Phi_j^i$, $j=1, \dots, N$, $i=1, \dots, N$
۵. Set $r_{j+1} \leftarrow r_j + \lambda(\theta_j - r_j) \Delta t + \eta \sqrt{\Delta t} \Phi_r$, $j=1, \dots, N$, $i=1, \dots, N$
۶. Set $\theta_{j+1} = \frac{(\theta_j + \theta_{j-1})}{2}$, $j=1, \dots, N$
۷. End For
۸. Set $S_i \leftarrow \max(S_j^1, S_j^2, S_j^r)$.

الگوریتم ۱، برآورد قیمت دارایی در هر گام زمانی و هر مسیر برای سه دارایی را تحت مدل هستون هال وایت نشان می دهد.



شکل ۲. مسیرهای شبیه سازی شده برای ماکزیمم سه دارایی. شکل سمت راست با ضریب همبستگی بین سه دارایی $\rho = 0$ و شکل سمت چپ با ضریب همبستگی بین سه دارایی $\rho = 0.5$ می باشد.

شکل ۲، مسیرهای شبیه سازی شده برای ۳۰ دارایی را با نرخ بهره $r = 0.05$ و ضریب همبستگی $\rho = 0$ و $\rho = 0.5$ را نشان می دهد. تغییر در ضریب همبستگی بین سه دارایی، احتمال داشتن قیمت های پایین تر و کاهش ضریب همبستگی بین سه دارایی، احتمال داشتن قیمت های بالاتر را افزایش می دهد. این تغییرات در قیمت اختیار فروش آمریکایی چند دارایی به طور مستقیم اثر می گذارد. در نتایج عددی می توان دید، که افزایش ضریب همبستگی بین سه دارایی موجب بالاتر رفتن قیمت اختیار فروش آمریکایی می شود.

۳ روش کمترین مربعات مونت کارلو

اگر یک دارنده‌ی اختیار، زمان اعمال اختیار را بتواند انتخاب کند، در هر زمان از شروع تا پایان زمان انقضاء، آن اختیار را آمریکایی گویند.

تعریف: فرض کنید، $t \leq u \leq T$ و $x \geq 0$ داده شده باشد و $S(t) = x$ و با پالایه $F_u^{(t)}$ ، $\Psi_{t,T}$ را مجموعه‌ای از زمان‌های توقف برای پالایه‌ی $F_u^{(t)}$ ، $t \leq u \leq T$ ، $\{ \tau \leq u \} \in F_u^{(t)}$ برای هر $u \in [t, T]$ تصمیم برای توقف در یک زمان $u \in [t, T]$ ، فقط بر اساس مسیر قیمت سهام بین زمان t و u است. قیمت در زمان t در قرارداد آمریکایی با زمان انقضاء T به صورت زیر تعریف شده است.

$$v(t, x) = \max_{x \in \Psi_{t,T}} \tilde{E} \left[e^{-r(\tau-t)} (K - S(\tau)) | S(t) = x \right]$$

که در آن، $S(\tau)$ قیمت دارایی در زمان τ و K قیمت توافقی اختیار است. دارنده‌ی قرارداد آمریکایی، باید منتظر باشد، تا قبل از انقضاء قیمت سهام به سطح معینی یا زیر K پایین بیاید؛ اما در حال حاضر این سطح وابسته به زمان انقضاء $T - t$ است. از سوی دیگر، زمانی که قیمت سهام به مقدار کم‌تر از K می‌رسد، باید قرارداد را اعمال کرد. وقتی قیمت سهام قیمتی بالاتر از K دارد، نباید قرارداد را اعمال کرد و اگر قیمت سهام برابر با K باشد، تفاوتی بین اعمال و اعمال نکردن قرارداد وجود ندارد. فرمولی برای قیمت اختیار فروش آمریکایی در دست نیست؛ ولی این تابع را می‌توان به صورت عددی، از تحلیل ویژگی‌های تعیین قیمت قرارداد به دست آورد. در این مقاله ما این قیمت را با استفاده از روش‌های شبیه‌سازی محاسبه می‌کنیم [۱].

یکی از روش‌های مناسب برای قیمت‌گذاری اختیار روش مونت کارلو است. روش مونت کارلو از الگوریتمی برای محاسبات بهره می‌گیرد که از نمونه‌گیری تصادفی برای محاسبه نتایج استفاده می‌کند [۲، ۱۱، ۱۷]. از طرف دیگر در روش مونت کارلو الگوریتم محاسبه گر، برای محاسبه نتایج خود بر نمونه‌گیری‌های تکرار شونده تصادفی اتکاء می‌کند؛ ولی استفاده از روش مونت کارلو برای قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی کمی مشکل و دارای محاسبات بسیار زیاد است. برای کم‌تر کردن تعداد محاسبات و در نتیجه بالاتر بردن دقت، روش شبیه‌سازی کم‌ترین مربعات مونت کارلو (LSM) را به کار می‌بریم. این روش توسط لانگ استف و شوارتز در سال ۲۰۰۱ ارائه شد [۱۵، ۱۶، ۱۹].

در ابتدا باید یک قیمت برای دارایی در هر زمان و در هر گام زمانی از زمان شروع تا زمان انقضاء به دست آوریم. در ادامه از انتها شروع به حرکت می‌کنیم و تمام مسیرهایی را که در آن‌ها اختیار سودآور می‌باشد مشخص می‌نماییم. برای مسیرهایی که اختیار در آن‌ها سودآور است از روش کم‌ترین مربعات استفاده می‌شود تا یک برآورد برای امید بازده از ادامه نگه داشتن اختیار شرطی به دست آید [۱۵]. از آنجایی که تنها مسیرهایی با اختیار سودآور، در رگرسیون مورد استفاده قرار می‌گیرند، پس این روش به طور قابل توجهی زمان محاسبات را

کاهش می دهد. به هر حال، مانند بقیه روش های مونت کارلو برای محاسبه ی اختیار آمریکایی، در این روش هم، تمامی قیمت های دارایی برای محاسبه ی قیمت اختیار ذخیره می شود. (در این مقاله درجه رگرسیون دو است).

الگوریتم ۲. به دست آوردن قیمت اختیار فروش آمریکایی چند دارایی با استفاده از شبیه سازی LSM

Algorithm ۲. LSM

```

۱. Set  $S_j \leftarrow HHW^3 \text{ Asset Path}$ 
۲. If  $S_j < E$ 
۳. Set  $C(j) = (E - S_j) e^{-r\Delta t}$   $j = 1, \dots, \text{number of pathes}$ 
۴. Else  $C(j) = 0$ 
۵. End if
۶. For  $j = N - 1 : -1 : 1$ 
۷. Set  $index = find(E - S_i > 0)$ 
۸. Set  $X = [ones(size(index)) \ S(index) \ S(index)^2]$ 
۹. Set  $B = (X^T X)^{-1} X^T C(index)$ 
۱۰. Set  $D = XB$ 
۱۱. If  $D \leq E - S_i$   $i = 1 : size(index, 1)$ 
۱۲. Set  $C(index(i)) = E - S_i$   $i = 1 : size(index, 1)$ 
۱۳. End if
۱۴. Set  $C = C e^{-r\Delta t}$ 
۱۵. End if
۱۶. Set  $American\ option = C$ 

```

الگوریتم ۲، قیمت گذاری اختیار آمریکایی سه دارایی با استفاده از روش مونت کارلوی کمترین مربعات را نشان می دهد. در الگوریتم بالا درجه رگرسیون دو می باشد. با بالاتر رفتن درجه رگرسیون خطا افزایش می یابد.

۴ نتایج عددی

در این قسمت مدل هستون هال وایت و مدل هستون را با استفاده از روش کمترین مربعات مونت کارلو حل و نتایج عددی به دست آمده از این دو مدل را با هم مقایسه می کنیم. در بخش ۴-۱، در جدول شماره ۱ نتایج عددی برای دو دارایی، با نرخ بهره متفاوت و ضریب همبستگی متفاوت محاسبه و نتایج عددی را بررسی می کنیم. در بخش ۴-۲، در جدول شماره ۲، قیمت اختیار فروش آمریکایی سه دارایی را محاسبه و قیمت ها را در زمانی که نرخ بهره بدون ریسک و ضریب همبستگی افزایش می یابد را بررسی و مقایسه می کنیم.

۴-۱ نتایج عددی برای دو دارایی

در جدول ۱، قیمت یک اختیار فروش آمریکایی تحت مدل هستون هال وایت ($H.HW$) و هستون (H)، با نرخ بهره $r = 0.05$ ، $\eta = 0.08$ ، $\lambda = 0.26$ ضریب همبستگی $\rho = 0.26$ ، $k = 1/58$ ، $d = 0$ و با زمان‌های انقضا متفاوت، برای قیمت‌های توافقی $E = 35, 40, 45$ محاسبه می‌شود. تعداد مسیر $M = 10000$ و تعداد گام‌های زمانی $N = 50$ ، این محاسبات ۱۰۰ بار تکرار شد. در این جدول ضریب همبستگی بین دو دارایی، $\rho' = 0$ و $\rho'' = 0.5$ ، واریانس $V_1' = 0.3$ و $V_2' = 0.5$ است. برای قیمت‌گذاری اختیار، از روش LSM استفاده شد.

جدول ۱، تغییرات قیمت اختیار فروش آمریکایی دو دارایی با مدل هستون هال وایت ($H.HW$) و هستون (H)، را مقایسه می‌کند. همچنین می‌توان دید، که افزایش نرخ بهره باعث کاهش قیمت اختیار فروش و افزایش ضریب همبستگی باعث افزایش قیمت اختیار فروش می‌شود.

جدول ۱. قیمت اختیار فروش آمریکایی دو دارایی با نرخ بهره و ضریب همبستگی متفاوت

ρ	T	E	$r(0)=0.01$		$r(0)=0.05$		$r(0)=0.1$	
			H.H.W	H	H.H.W	H	H.H.W	H
۰	۱/۱۲	۳۵	۰/۱۲۷۷	۰/۱۳۰۴	۰/۱۲۳۴	۰/۱۲۲۶	۰/۱۱۶۶	۰/۱۱۴۴
		۴۰	۱/۰۸۷۵	۱/۰۹۲۴	۱/۰۶۷۱	۱/۰۶۶۴	۱/۰۳۷۸	۱/۰۳۴۴
		۴۵	۴/۵۶۱۲	۴/۵۶۳۳	۴/۵۴۹۷	۴/۵۴۹۰	۴/۵۳۵۳	۴/۵۳۳۳
	۴/۱۲	۳۵	۰/۶۶۹۳	۰/۶۹۹۷	۰/۶۳۴۶	۰/۶۴۱۷	۰/۵۷۹۵	۰/۵۷۴۷
		۴۰	۲/۰۲۳۶	۲/۰۹۳۰	۱/۹۶۲۵	۱/۹۷۳۷	۱/۸۴۷۷	۱/۸۴۴۷
		۴۵	۴/۷۶۳۸	۴/۸۱۹۰	۴/۶۹۴۹	۴/۷۰۴۴	۴/۵۹۴۸	۴/۵۹۶۵
	۷/۱۲	۳۵	۰/۹۱۶۷	۱/۰۵۹۵	۰/۸۶۸۰	۰/۹۴۷۸	۰/۷۹۶۸	۰/۸۲۱۴
		۴۰	۲/۳۴۶۰	۲/۵۹۱۲	۲/۲۵۸۷	۲/۳۹۸۸	۲/۱۱۷۰	۲/۱۸۱۹
		۴۵	۴/۹۳۱۶	۵/۲۰۲۸	۴/۸۳۳۵	۴/۹۸۶۱	۴/۷۰۰۴	۴/۷۶۳۷
۰/۵	۱/۱۲	۳۵	۰/۴۸۲۲	۰/۴۸۵۳	۰/۴۶۷۵	۰/۴۶۶۶	۰/۴۴۶۶	۰/۴۴۶۰
		۴۰	۲/۰۲۸۰	۲/۰۲۹۹	۱/۹۸۷۸	۱/۹۸۴۶	۱/۹۳۳۸	۱/۹۳۳۵
		۴۵	۵/۱۷۳۷	۵/۱۸۴۰	۵/۱۳۲۰	۵/۱۳۴۲	۵/۰۸۵۲	۵/۰۷۷۰
	۴/۱۲	۳۵	۱/۶۸۱۸	۱/۷۳۷۶	۱/۶۰۶۴	۱/۶۲۱۲	۱/۱۴۷۱	۱/۴۹۶۴
		۴۰	۳/۶۱۴۹	۳/۷۲۰۹	۳/۵۱۶۹	۳/۵۴۵۱	۳/۳۴۳۸	۳/۳۴۶۳
		۴۵	۶/۴۸۵۸	۶/۶۱۰۰	۶/۳۵۰۰	۶/۳۹۳۲	۶/۱۳۰۲	۶/۱۵۶۱
	۷/۱۲	۳۵	۲/۱۴۱۳	۲/۰۵۱۴	۲/۲۰۳۹	۲/۲۰۳۹	۱/۹۰۵۷	۱/۹۷۳۰
		۴۰	۴/۱۵۱۶	۴/۰۴۳۸	۴/۲۱۴۷	۴/۲۱۴۷	۳/۷۸۸۳	۳/۸۸۹۲
		۴۵	۶/۹۳۸۱	۷/۳۷۸۲	۶/۷۶۳۷	۷/۰۲۲۸	۶/۵۰۷۸	۶/۶۵۸۷

۴-۲ نتایج عددی برای سه دارایی

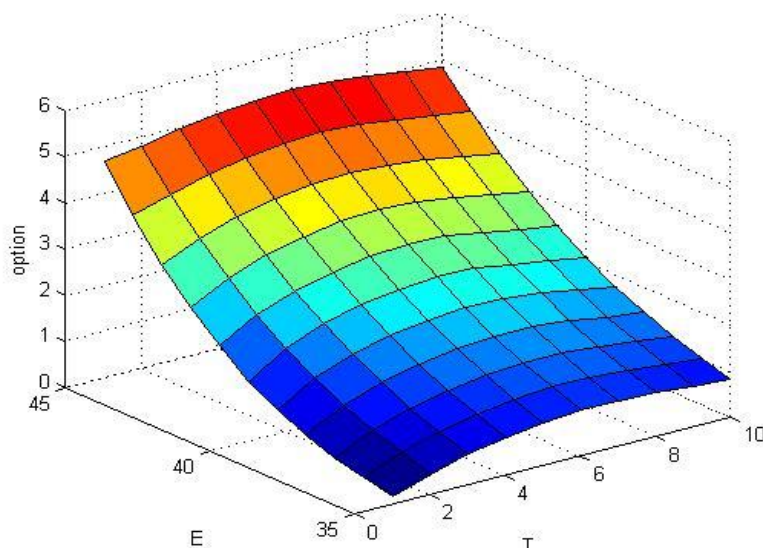
در جدول ۲، قیمت‌گذاری اختیار فروش آمریکایی برای سه دارایی، با استفاده از پارامترهای قسمت قبل آورده شده است. در این جدول ضریب همبستگی بین دو دارایی، $\rho^1 = 0$ ، $\rho^2 = 0.5$ ، واریانس $V_1^1 = 0.3$ ، $V_2^2 = 0.5$ و $V_3^3 = 0.2$ می‌باشد. برای به‌دست آوردن قیمت اختیار از روش LSM استفاده می‌کنیم.

جدول ۲، نشان می‌دهد که افزایش نرخ بهره کاهش قیمت اختیار فروش چند دارایی از نوع آمریکایی را در پی دارد و بر عکس، با افزایش قیمت توافقی، قیمت اختیار فروش آمریکایی افزایش می‌یابد. نتایج عددی بیانگر این است که واکنش قیمت اختیار فروش آمریکایی در برابر پارامترها با هم یکسان می‌باشد و با افزایش تعداد دارایی واکنش نسبت به پارامترهای قیمت توافقی، زمان، ضریب همبستگی، نرخ بهره بدون ریسک و واریانس تغییر نمی‌کند.

در ادامه، شکل ۳ تصویری سه بعدی از تغییرات قیمت اختیار فروش سه دارایی از نوع آمریکایی تحت مدل هستون-هال-وایت را نشان می‌دهد تا تاثیر افزایش زمان انقضا و تاثیر افزایش قیمت توافقی را بر قیمت اختیار سه دارایی ارایه دهد.

جدول ۲. قیمت اختیار فروش آمریکایی، سه دارایی با نرخ بهره و ضریب همبستگی متفاوت

ρ	T	E	$r(0)=0.01$		$r(0)=0.05$		$r(0)=0.1$	
			H.H.W	H	H.H.W	H	H.H.W	H
0	1/12	35	0.0147	0.0545	0.0139	0.0502	0.0128	0.0458
		40	0.04677	0.06284	0.04577	0.06078	0.04464	0.05895
		45	0.2444	0.32235	0.2402	0.32239	0.2319	0.3352
	4/12	30	0.01428	0.04075	0.01335	0.03615	0.01208	0.03147
		40	0.08839	0.14615	0.08515	0.13559	0.08021	0.12875
		45	0.37665	0.42444	0.37405	0.41658	0.36993	0.41054
	7/12	35	0.01924	0.06633	0.01818	0.05701	0.01617	0.04747
		40	0.09328	0.18180	0.08924	0.16757	0.08400	0.14919
		45	0.5284	0.3387	0.4844	0.3837	0.4274	0.39937
0.5	1/12	35	0.02044	0.02287	0.01996	0.02153	0.01869	0.02018
		40	0.02692	0.02835	0.02887	0.02427	0.02364	0.02189
		45	0.07124	0.07836	0.07002	0.07606	0.06784	0.07503
	4/12	35	0.08592	0.10471	0.08242	0.09606	0.07743	0.08845
		40	0.23945	0.27981	0.23260	0.26291	0.22296	0.24437
		45	0.51619	0.57771	0.50954	0.54952	0.49907	0.52945
	7/12	35	0.10403	0.15271	0.09994	0.13620	0.09298	0.12845
		40	0.25594	0.34107	0.24865	0.31429	0.23653	0.28448
		45	0.2454	0.2304	0.15557	0.19118	0.1333	0.15962



شکل ۲. تغییرات قیمت اختیار فروش سه دارایی از نوع آمریکایی تحت مدل هستون-هال-وایت

۵ بحث و نتیجه گیری

در این مقاله، قیمت اختیار فروش آمریکایی برای چند دارایی تحت مدل هستون هال وایت را با استفاده از روش *LSM* مورد بررسی قرار داده ایم. از مدل هستون هال وایت که دارای واریانس تصادفی و نرخ بهره تصادفی است، استفاده کردیم و نتایج عددی را با مدل هستون مقایسه نمودیم. نتایج عددی نشان می دهد که افزایش نرخ بهره منجر به کاهش قیمت اختیار فروش آمریکایی برای چند دارایی ها می شود. افزایش واریانس و افزایش زمان انقضا، قیمت اختیار فروش آمریکایی برای چند دارایی ها را افزایش می دهد و این نتایج به تعداد دارایی بستگی ندارد.

منابع

- [۲۰] حسین خنجر پناه و دیگران، (۱۳۵۹). رویکرد بهینه سازی سبد سهام بورس اوراق بهادار با محدودیت های منعطف. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن. ۱۳(۴)، ۳۹-۵۴.
- [1] Steven E. Shreve, (2000). Stochastic Calculus for Finance, Springer finance series.
- [2] Higham, D. J., (2004). An introduction to financial option valuation.
- [3] Robert A. van de Geijn, (2011). Notes on Cholesky Factorization. The University of Texas at Austin Austin.
- [4] Kienitz, J., Wetteran, D., (2012). Financial modelling, Springer.
- [5] Matsuda, K., (2004). Introduction to Option Pricing with Fourier Transform: Option Pricing with Exponential Lévy Models. The Graduate Center, The City University of New York. 365 Fifth Avenue, New York, NY 10016-4309.
- [6] White, R., (2013). Option Pricing with Fourier Methods.
- [7] Tchamga, N. F. K., (2009). Fourier Transform Methods in Option Pricing. University of Stellenbosch, South Africa.
- [8] Brennan. M. Schwartz, E., (1978). Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis. Journal of Financial and Quantitative Analysis. 13, 461-474.

- [9] Samimi, O., Mardani, Z., Sharafpour, S., Mehrdoust, F., (2016). LSM Algorithm for Pricing American Option Under Heston–Hull–White’s Stochastic Volatility Model. *Computational Economics*. 50(2), 173-187.
- [10] Schwartz, E., (1977). The Valuation of Warrants: Implementing a New Approach. *Journal of Financial Economics*. 4, 79-93.
- [11] Broadie, M., Glasserman, P., (1997). Pricing American-style securities using simulation, *J. Econom. Dynam. Control* 21 (8) 1323–1352.
- [12] Glasserman, P., (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer-Verlag.
- [13] Boyle, P., (1997). Options: a monte carlo approach. *Journal of Financial Economics*. 4(3), 323-338.
- [14] Black, F. and M. Scholes (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, 637-659.
- [15] Chan, R.H., Wong, C.Y., Yeung, K.-M., (2006). Pricing multi-asset American-style options by memory reduction Monte Carlo methods, *Appl. Math. Comput.* 179(2), 535–544.
- [16] Longstaff, F.A., Schwartz, E.S., (2001). Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach, *Rev. Financ. Stud.* 14 (1) 113–147.
- [17] Tilley, J. J.A., (1993). Valuing American options in a path simulation model, *Trans. Soc. Actuar.* 45 (83) 104.
- [19] Brigo, D., Mercurio, F., (2006). *Interest rate models, theory and practice*, Springer, Heidelberg.
- [20] Kavacs, B., (2012). *American option pricing with LSM algorithm and analytic bias correction*. Eotvos Lorand University, Faculty of Science.