مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال شانزدهم، شماره اول (پیاپی ۶۰)، بهار ۹۸، ص ص ۱۲۹-۱۱۷
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

تعمیمی بر تحلیل پوششی داده‌های نادقیق

لیلا خوش اندام [1*]
۱- استادیار، گروه ریاضی، واحد لشت نشا- زیباکنار، دانشگاه آزاد اسلامی، لشت نشا، ایران

رسید مقاله: ۱۶ آذر ۱۳۹۶
پذیرش مقاله: ۱۲ خرداد ۱۳۹۷

چکیده

در مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها، فرض بر این است که مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها معلوم و دقیق باشد؛ اما گاهی شرایطی اتفاق می‌افتد که ناچار به استفاده از مقادیری هستیم که به صورت دقیق مشخص نیستند و به صورت داده‌های ترتیبی ضعیف، ترتیبی قوی، فازی، کراندار وکراندار کسری و ... می‌باشد. مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها با حضور این‌گونه داده‌ها تبدیل به مدل‌های غیرخطی و نامحدب خواهند شد و تحت عنوان تحلیل پوششی داده‌های نادقیق معرفی می‌شوند. در این تحقیق به مطالعه‌ی حالت خاصی از داده‌های نادقیق می‌پردازیم. به این صورت که در بسیاری از کاربردهای واقعی حالت‌هایی رخ می‌دهند که برخی از ورودی‌ها و خروجی‌ها متعلق به بازه‌ای از اعداد و برخی دیگر از آن‌ها درون مجموعه‌ای گسسته از اعداد می‌باشند. مدلی با حضور هم‌زمان این دو نوع داده‌ی نادقیق معرفی می‌شود که مدلی غیرخطی می‌باشد. سپس با استفاده از روشی این مدل غیرخطی به مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی معادل تبدیل می‌شود. همچنین کران‌های بالا و پایینی برای واحدهای عملیاتی تعریف و محاسبه می‌شود و در انتها نیز کاربردی از روش پیشنهاد شده بر روی یک مورد واقعی از بانک‌های تجاری ایران اجرا می‌شود و عملکرد و نحوه‌ی کارکرد روش پیشنهاد شده مورد سنجش و بررسی قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی، داده‌های نادقیق، داده‌های بازه‌ای، داده‌های گسسته

۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها تکنیکی ناپارامتری ابداع شده توسط چارنز و کوپر [۱] است که برای ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ی متجانسی به‌کار می‌رود که چندین ورودی را برای تولید چندین خروجی مصرف می‌کنند. در مدل های کلاسیک DEA فرض بر این است که داده‌های به کار رفته به عنوان ورودی‌ها و خروجی‌ها، دارای مقادیر معلوم و مشخص باشند، در حالی که در بسیاری از مسایل کاربردی عملاً با حالت‌هایی مواجه می‌

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: L.khoshandam.lziau.ac.ir

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]

شویم که داده‌ها به طور دقیق در دسترس قرار ندارند و به صورت کراندار، ترتیبی و یا داخل بازه‌ای از اعداد و یا متعلق به مجموعه‌ی گسسته‌ای از اعداد هستند. تحلیل پوششی داده‌های نادقیق (IDEA) به بررسی ارزیابی عملکرد واحدها با حضور این گونه داده‌ها می‌پردازد که موضوعی پرکاربرد در علم مدیریت و اقتصاد می‌باشد. کوک و همکاران ([۲،۳]) نوع خاصی از داده‌های مبهم را معرفی نمودند. به این صورت که روابط بین آن داده‌ها به صورت ترتیبی بیان می‌شد و هیچ گونه مقادیر دقیقی بین آن‌ها وجود نداشت؛ اما عنوان تحلیل پوششی داده‌های نادقیق اولین بار توسط کوپر، پارک و ژو [۴] مطرح گردید. ایشان تحت عنوان داده‌های نادقیق، ترکیبی از داده‌های ترتیبی و بازه‌ای را بیان نمودند و با افزودن این‌گونه داده‌ها به مدل استاندارد CCR، تکنیک جدیدی به نام تحلیل پوششی داده‌های نادقیق (IDEA) را معرفی نمودند. آن‌ها با به کار بردن دو مرحله‌ی تغییر مقیاس و تغییر متغیر، مدل غیرخطی ایجاد شده با داده‌های مبهم را به مدلی خطی تبدیل کردند. کیم و همکاران [۵] برای روشن‌شدن روش خطی‌سازی فوق و نشان دادن کاربردی از تحلیل پوششی داده‌های نادقیق، مسأله‌ی ارزیابی ۳۳ مرکز تلفن کشور کره را مورد مطالعه قرار دادند. به دلیل مشکلاتی که در روش خطی‌سازی کوپر و همکاران [۱] و کیم و همکاران [۵] وجود داشت در سال ۲۰۰۱ مقاله‌ای توسط کوپر و همکاران [۶] مطرح گردید که علاوه بر بهبود روش قبلی، روش جدیدی نیز بیان شد که در این روش به جای حل مدل غیرخطی IDEA، ابتدا داده‌های نادقیق را به داده‌های دقیق تبدیل کرده و سپس با قرار دادن داده‌های دقیق در مدل CCR، مدلی خطی را حل نمود. همچنین لی و کیم [۷] فرض کردند که در ارزیابی توسط مدل IDEA، اگر واحدی ناکارا باشد، برای تحلیل ناکارایی از اطلاعاتی نظیر مازاد در ورودی و کمبود در خروجی می‌توان استفاده کرد. دسپاتیس و اسمیلیس [۸] روش دیگری در مواجهه با داده‌های مبهم ارایه کردند. آن‌ها برای ارزیابی کارایی، مدل‌های غیرخطی IDEA را با استفاده از روشی به مدل‌های خطی استاندارد معادل تبدیل کردند. ژو [۹] نیز روشی را برای ساده‌سازی روش کوپر و همکاران [۲] بیان کردند. همچنین کائو [۱۰] یک روش برنامه‌ریزی ریاضی دو مرحله‌ای برای محاسبه‌ی کارایی دو مرحله‌ای با حضور داده‌های بازه‌ای و داده‌های ترتیبی ارایه کرد. سم پارک [۱۱] قابلیت‌های کامل‌تر محاسباتی را برای مدل‌های IDEA ارایه نمود و از طریق مطالعه‌ی دوآل، مشخصه‌ای کامل را از جواب‌های کارایی هر مدل ممکن از این دست نشان داد. در سال ۲۰۰۷ یانگ و وانگ [۱۲] عملکرد واحدهای تصمیم را با استفاده از کارایی های بازه‌ای اندازه گرفتند. ایشان بیان کردند که کارایی هر واحد در محدوده‌ی بازه‌ای اندازه‌گیری می‌شود که حد بالای آن، یک، و حد پایین آن از طریق معرفی یک واحد غیرایده‌آل مجازی تعیین می‌شود که عملکرد آن قطعاً از عملکرد هر واحد کم‌تر است. حسین عزیزی و وانگ [۱۳] با یک مثال عددی نشان دادند که مدل‌های کراندار تحلیل پوششی داده‌ها قادر به تعیین کارایی بازه‌ای برای واحدهایی که مقدار صفر را در هر خروجی خود دارند نمی‌باشد؛ لذا ایشان یک جفت مدل کراندار بهبودیافته برای غلبه بر این نقص پیشنهاد کردند و با ارایه‌ی مثالی واقعی شامل اندازه‌گیری عملکرد کشورهایی که در بازی-های المپیک تابستانی آتن ۲۰۰۴ شرکت کردند، نشان دادند که رویکرد پیشنهادی یک روش مؤثر برای تحلیل عملکرد واقعی می‌باشد. همچنین در سال ۲۰۱۵ حسین عزیزی و همکاران [۱۴] یک روش تحلیل پوششی داده‌های نادقیق مبتنی بر متغیرهای کمکی ارایه نمودند. آن‌ها در این تحقیق از دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه کارایی

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]

هر واحد را با حضور داده‌های نادقیق مورد ارزیابی قرار دادند. همچنین ایشان از اندازه‌ی مبتنی بر متغیرهای کمکی برای ارزیابی مستقیم کارایی با حضور این گونه داده‌ها استفاده کردند. کاوه خلیلی و همکاران [۱۵] مدل-های تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای را با حضور عوامل نامطلوب برای ارزیابی عملکرد نیروگاه‌های سیکل ترکیبی مورد مطالعه قرار دادند. در سال ۲۰۱۸ عادل حاتمی و همکاران [۱۶] بازده به مقیاس را در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای مورد مطالعه قرار دادند. در این تحقیق ایشان ناحیه‌ی پایداری از طبقه‌بندی بازده به مقیاس را با حضور داده‌های بازه‌ای ارایه کردند و سپس با بیان مثالی، روش پیشنهادی خود را تحلیل نمودند. مهدی طلوع و همکاران [۱۷] از عواملی با نقش دوگانه در تحلیل پوششی داده‌های نادقیق استفاده کردند. تمرکز آن‌ها بر داده‌های بازه‌ای بود. ایشان ابتدا یک جفت مدل برای تعیین کران‌های بالا و پایین اندازه‌ی کارایی نسبی برای هر واحد تصمیم‌گیرنده و با حضور داده‌های بازه‌ای ارایه کردند و سپس یک مدل برای به دست آوردن کارایی بازه-ای برای واحدهایی ارایه کردند که عواملی با نقش دوگانه‌ی یکسان دارند. آن‌ها کاربرد مدل‌های پیشنهادی خود را بر روی مجموعه‌ای از داده‌های ۲۰ بانک اجرا و تجزیه و تحلیل نمودند. تا کنون محققان زیادی در این زمینه مطالعه نموده‌اند. در بسیاری از مطالعات کاربردی با مواردی مواجه می‌شویم که برخی از متغیرهای ورودی و خروجی، متعلق به بازه و همچنین مجموعه‌ی گسسته‌ای از اعداد هستند. در این مقاله به بررسی کارایی واحدهایی پرداخته می‌شود که برخی از ورودی‌ها و خروجی‌هایشان شامل داده‌های نادقیق بازه‌ای و برخی دیگر گسسته می-باشند. برای ارزیابی عملکرد این گونه واحدها، در بخش دوم، مدلی غیرخطی پیشنهاد و سپس با استفاده از تغییراتی، این مدل تبدیل به یک مدل ترکیبی صحیح و خطی می‌شود. در بخش سوم و چهارم به ترتیب داده‌های گسسته و داده‌های بازه‌ای معرفی می‌شوند. در بخش پنجم توسیعی از مدل پیشنهادی بیان می‌گردد. در بخش ششم، مدل‌هایی ارایه می‌شود که کارایی واحد تحت ارزیابی را با وجود داده‌های نادقیق، یک بار در خوشبینانه-ترین حالت و یک بار در بدبینانه‌ترین حالت تخمین می‌زند و از این طریق کران‌های بالا و پایینی برای کارایی به دست می‌آورد و سپس با توجه به نتایج حاصل، واحدهای تحت بررسی از منظر کارایی در سه مجموعهٔ مجزا طبقه‌بندی می‌شود. در بخش هفت، مدل‌های پیشنهادی بر روی داده‌های مستخرج از یکی از بانک‌های ایران اجرا و نتایج و تحلیل داده‌ها به طور مبسوط بیان می‌شود. در نهایت نتیجه‌گیری در بخش آخر بیان می‌شود.

۲ مدل پیشنهادی برای داده‌های نادقیق

n واحد تصمیم‌گیرنده DMU_j، $(j = ۱,...,n)$، که خروجی‌های y_{rj}، $(r = ۱,...,s)$ را با مصرف ورودی‌های x_{ij}، $(i = ۱,...,m)$ تولید می‌کند در نظر می‌گیریم. برخلاف تحلیل پوششی داده‌های استاندارد فرض می‌کنیم مقادیری که برای ورودی‌ها و خروجی‌ها استفاده شده است نادقیق باشد. فرض کنیم دو نوع داده‌ی نادقیق به طور همزمان وجود دارد: داده‌های بازه‌ای و داده‌های با مقادیر گسسته.

مجموعه‌ی اندیس ورودی‌ها و خروجی‌ها را به ترتیب به صورت $I = I^I \bigcup I^D$، $O = O^I \bigcup O^D$ در نظر می-گیریم که در آن I^I، O^Iبه ترتیب مجموعه‌ی اندیس ورودی‌ها و خروجی‌های از نوع بازه‌ای و I^D، O^D به

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]

ترتیب مجموعه‌ی اندیس ورودی‌ها و خروجی‌های از نوع گسسته می‌باشد. وقتی DMU_o، واحد تحت ارزیابی باشد، آنگاه مدل زیر می‌تواند برای ارزیابی این واحد به کار برده شود:

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \sum_{r\in O^I} u_r y_{ro} + \sum_{r\in O^D} u_r y_{ro} \\
s.t. \quad & \sum_{i\in I^I} v_i x_{io} + \sum_{i\in I^D} v_i x_{io} = ۱, \\
& \sum_{r\in O^I} u_r y_{rj} + \sum_{r\in O^D} u_r y_{rj} - \sum_{i\in I^I} v_i x_{ij} + \sum_{i\in I^D} v_i x_{ij} \le ۰, \qquad j = ۱,\dots,n, \\
& v_i \ge ۰, \qquad i = ۱,\dots,m, \\
& u_r \ge ۰, \qquad r = ۱,\dots,s.
\end{aligned} \tag{۱}$$

در مدل فوق u_r ,v_i متغیرهای تصمیم هستند و از آنجایی که ورودی‌ها و خروجی‌های تعریف شده دارای مقادیر نادقیق و متعلق به بازه و یا مجموعه‌ی گسسته‌ای از اعداد می‌باشند؛ بنابراین دارای مقادیر معین و مشخصی نیستند به همین دلیل به صورت متغیر در نظر گرفته می‌شوند؛ لذا کاملاً واضح است که مدل (۱) یک مدل غیرخطی می‌باشد. در ادامه روش تبدیل مدل غیرخطی (۱) به مدل خطی معادل آن بیان خواهد شد. قبل از پرداختن به روش خطی‌سازی مدل (۱) ابتدا به معرفی داده‌های نادقیق به کار رفته در این مدل یعنی داده‌های بازه-ای و داده‌های گسسته می‌پردازیم.

۳ داده‌های گسسته

نوع خاصی از داده‌های نادقیق، داده‌های گسسته می‌باشد که مقادیر دقیق آن‌ها به صورت زیر درون یک مجموعه ی گسسته از اعداد تعیین می‌شود:

$$x_{ij} \in DI_{ij} = \{x_{ij}^{(۱)}, x_{ij}^{(۲)}, \dots, x_{ij}^{(l_i)}\}; \quad i \in I^D \quad , \quad j = ۱,\dots,n, \tag{۲}$$

$$y_{rj} \in DO_{rj} = \{y_{rj}^{(۱)}, y_{rj}^{(۲)}, \dots, y_{rj}^{(k_r)}\}; \quad r \in O^D \quad , \quad j = ۱,\dots,n. \tag{۳}$$

برای تضمین شدنی بود x_{ij} , y_{rj} تغییرات زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x_{ij} \in DI_{ij} \quad \Rightarrow \quad x_{ij} = \sum_{l=۱}^{l_i} \mu_l^{(i)} x_{ij}^{(l)} \quad with \quad ; \quad \sum_{l=۱}^{l_i} \mu_l^{(i)} = ۱, \quad \mu_l^{(i)} \in \{۰,۱\} \tag{۴}$$

$$y_{rj} \in DO_{rj} \quad \Rightarrow \quad y_{rj} = \sum_{k=۱}^{k_r} \rho_k^{(r)} y_{rj}^{(k)} \quad with \quad ; \quad \sum_{r=۱}^{k_r} \rho_k^{(r)} = ۱, \quad \rho_k^{(r)} \in \{۰,۱\} \tag{۵}$$

با در نظر گرفتن چنین متغیرهایی، مادامی که DMU_o تحت ارزیابی می‌باشد، مدل، $\rho_k^{(r)}$ و $\mu_l^{(i)}$ را در بهترین حالت برای این واحد تعیین می‌کند. با در نظر گرفتن این تبدیل، مجموع توزین شده‌ی ورودی‌ها و مجموع توزین شده‌ی خروجی‌ها برای DMU_j در مدل (۱) به صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_{r\in O^I} u_r y_{rj} = \sum_{r\in O^I} \sum_{k=۱}^{k_r} u_r \rho_k^{(r)} y_{rj}^{(k)} \tag{۶}$$

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]

$$\sum_{i\in I^I} v_i x_{io} = \sum_{i\in I^I}\sum_{l=1}^{l_i} v_i \mu_l^{(i)} x_{ij}^{(l)} \qquad (۷)$$

با به کار بردن این تبدیلات، مدل (۱) همچنان یک مدل غیرخطی خواهد بود. برای برطرف شدن این مشکل قرار می‌دهیم:

$$\theta_{il} = v_i \mu_l^{(i)} \quad , \quad \varphi_{rk} = u_r \rho_k^{(r)} \qquad (۸)$$

به طوری که

$$0 \le \varphi_{rk} \le M\, \rho_k^{(r)} \quad \forall r,k \qquad (۹)$$

$$\varphi_{rk} \le u_r \le \varphi_{rk} + M\,(1-\rho_k^{(r)}) \quad \forall r,k \qquad (۱۰)$$

$$0 \le \theta_{il} \le M\, \mu_l^{(i)} \quad \forall i,l \qquad (۱۱)$$

$$\theta_{il} \le v_i \le \theta_{il} + M\,(1-\mu_l^{(i)}) \quad \forall i,l \qquad (۱۲)$$

که در آن M یک عدد بسیار بزرگی می‌باشد. همچنین اگر $\rho_k^{(r)} = 0$ باشد، آنگاه $\varphi_{rk} = 0$ و اگر $\mu_l^{(i)} = 0$ باشد، آنگاه $\theta_{il} = 0$ خواهد بود.

٤ داده‌های بازه‌ای

مقادیر واقعی داده‌های بازه‌ای دورن یک بازه‌ی کراندار از اعداد به شکل زیر قرار دارند:

$$x_{ij} \in \left[x_{ij}^L, x_{ij}^U\right] \quad , \quad i \in I^I \quad , \quad y_{rj} \in \left[y_{rj}^L, y_{rj}^U\right] \quad , \quad r \in O^I \, , \quad j = 1,\ldots,n \qquad (۱۳)$$

به طوری که کران‌های بالا و پایین این بازه‌ها ثابت و مثبت فرض شده‌است. دسپاتیس و اسمیرلیس [۸] تغییر متغیر زیر را بر روی متغیرهای $x_{ij}\left(i \in I^I\right), y_{rj}\left(r \in O^I\right)$ به کار بردند:

$$x_{ij} = x_{ij}^L + s_{ij}(x_{ij}^L - x_{ij}^U) \qquad i = 1,\ldots,m,\ \ j = 1,\ldots,n,\ \ with \quad 0 \le s_{ij} \le 1 \qquad (۱۴)$$

$$y_{rj} = y_{rj}^L + t_{rj}(y_{rj}^L - y_{rj}^U) \qquad r = 1,\ldots,s,\ \ j = 1,\ldots,n,\ \ with \quad 0 \le t_{rj} \le 1 \qquad (۱۵)$$

با این تغییرات داریم:

$$\sum_{i\in I^I} v_i x_{ij} = \sum_{i\in I^I} v_i x_{ij}^L + s_{ij}(x_{ij}^U - x_{ij}^L) = \sum_{i\in I^I} v_i x_{ij}^L + v_i s_{ij}(x_{ij}^U - x_{ij}^L) = \sum_{i\in I^I} v_i x_{ij}^L + \bar{v}_i (x_{ij}^U - x_{ij}^L) \qquad (۱۶)$$

$$\sum_{r\in O^I} u_r y_{rj} = \sum_{r\in O^I} u_r y_{rj}^L + t_{rj}(y_{rj}^U - y_{rj}^L) = \sum_{r\in O^I} u_r y_{rj}^L + u_r t_{rj}(y_{rj}^U - y_{rj}^L) = \sum_{r\in O^I} u_r y_{rj}^L + \bar{u_r}(y_{rj}^U - y_{rj}^L) \qquad (۱۷)$$

که در آن $v_i s_{ij} = \bar{v}_{ij}$ و $u_r t_{rj} = \bar{u}_r$. همچنین واضح است که به ازای هر i, r $\bar{v}_{ij} \le v_i$ ، $\bar{u}_r \le u_r$. حال با معرفی داده‌های بازه‌ای و داده‌های گسسته، به معرفی مدل توسعه‌یافته و پیشنهادی با حضور همزمان این دو نوع داده‌ی نادقیق می‌پردازیم.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]

۵ توسعه‌ی مدل پیشنهادی

اگر تبدیلات بیان شده در بخش‌های (۳) و (۴) را روی مدل (۱) اعمال کنیم یک مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی صحیح مختلط به شکل زیر خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
e_o^* = Max \quad & \sum_{r\in O^I}\sum_{k=1}^{k_r}\varphi_{rk}y_{ro}^{(k)} + \sum_{r\in O^I} u_r y_{ro}^L + \overline{u}_r(y_{ro}^U - y_{ro}^L) \\
s.t. \quad & \sum_{i\in I^I}\sum_{l=1}^{l_i}\theta_{il}x_{io}^{(l)} + \sum_{i\in I^I} v_i x_{io}^L + \overline{v}_i(x_{io}^U - x_{io}^L) = 1, \\
& \sum_{r\in O^I}\sum_{k=1}^{k_r}\varphi_{rk}y_{ro}^{(k)} + \sum_{r\in O^I} u_r y_{rj}^L + \overline{u}_r(y_{rj}^U - y_{rj}^L) - \\
& \sum_{i\in I^I}\sum_{l=1}^{l_i}\theta_{il}x_{ij}^{(l)} + \sum_{i\in I^I} v_i x_{ij}^L + \overline{v}_i(x_{ij}^U - x_{ij}^L) \le 0, \ j = 1,\dots,n, \\
& 0 \le \varphi_{rk} \le M\rho_k^{(r)}, && r\in O^D, k = 1,\dots,k_r, \\
& \varphi_{rk} \le u_r \le \varphi_{rk} + M(1-\rho_k^{(r)}), && r\in O^D, k = 1,\dots,k_r, \\
& 0 \le \theta_{il} \le M\mu_l^{(i)}, && i\in I^D, l = 1,\dots,l_i, \\
& \theta_{il} \le v_i \le \theta_{il} + M(1-\mu_l^{(i)}), && i\in I^D, l = 1,\dots,l_i, \\
& \sum_{k=1}^{k_r}\rho_k^{(r)} = 1, && r\in O^D, \\
& \sum_{l=1}^{l_i}\mu_l^{(i)} = 1, && i\in I^D, \\
& v_i \ge \overline{v}_i, && i = 1,\dots,m, \\
& u_r \ge \overline{u}_r, && r = 1,\dots,s, \\
& \rho_k^{(r)}, \mu_l^{(i)} \in \{0,1\} && for\ all\ i,r,k,l, \\
& \varphi_{rk}, \theta_{il}, u_r, v_i, \overline{v}_i, \overline{u}_r \ge 0 && for\ all\ i,r,k,l.
\end{aligned}
\tag{۱۸}
$$

بعد از اینکه جواب های بهینه‌ی $\varphi_{rk}, \theta_{il}, u_r, v_i, \overline{u}_r, \overline{v}_i$ از حل مدل (۱۸) به‌دست آمد، مقدار بهینه برای x_{ij} و y_{rj} تعیین می‌شود. مدل استاندارد CCR با مقادیر دقیق ورودی و خروجی، حالت خاصی از مدل (۱) می‌باشد. در واقع وقتی مجموعه‌های DI_{ij} و DO_{rj} مجموعه‌های تک عضوی باشند مدل پیشنهاد شده‌ی (۱) همان مدل CCR خواهد بود.

تعریف : DMU_o کارا گفته می‌شود اگر و فقط اگر $e_o^* = 1$ باشد.

٦ کران‌های بالا و پایین از کارایی

بر طبق کائو [۱۰]، وقتی داده‌ها نادقیق باشند امتیازات کارایی به‌دست آمده از چنین داده‌هایی نیز باید به صورت نادقیق بیان شود. به عبارت دیگر امتیازات کارایی به جای این‌که به صورت دقیق بیان شود باید درون بازه‌ای از اعداد به‌دست آید. کران بالای کارایی واحد تحت ارزیابی DMU_o با حل مدل زیر به‌دست می‌آید:

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]

$$e_o^{(U)} = \underset{\substack{x_{ij}^L \le x_{ij} \le x_{ij}^U \\ y_{rj}^L \le y_{rj} \le y_{rj}^U \\ x_{ij} \in DI_{ij} \\ y_{rj} \in DO_{rj} \\ j=1,\ldots,n}}{Max} \begin{cases} \underset{u_r, v_i \ge 0}{Max} \sum_{r \in O^D} u_r\ y_{ro} + \sum_{r \in O^I} u_r y_{ro} \\ s.t. \\ \sum_{i \in I^D} v_i x_{io} + \sum_{i \in I^I} v_i x_{io} = 1, \\ \sum_{r \in O^D} u_r\ y_{rj} + \sum_{r \in O^I} u_r y_{rj} - \sum_{i \in I^D} v_i x_{ij} - \sum_{i \in I^I} v_i x_{ij} \le 0,\ j = 1,\ldots,n, \\ u_r, v_i \ge 0\ ,\ \ for\ all\ i, r. \end{cases} \quad (۱۹)$$

قسمت دوم مدل (۱۹) امتیاز کارایی را برای هر x_{ij} و y_{rj} محاسبه و قسمت اول مدل، سطوحی از x_{ij} و y_{rj} ای را تعیین می‌کند که بالاترین اندازه‌ی کارایی را تولید می‌کنند.

مقدار تابع هدفی که از این مدل به‌دست می‌آید کران بالایی برای کارایی واحد تحت ارزیابی DMU_o می‌باشد.

قضیه ۱ مقدار بهینه‌ی برنامه‌ی داخلی از مدل (۷) می‌تواند به صورت زیر تعیین شود:

$$y_{ro} = y_{ro}^U : r \in O^I\ ,\ x_{io} = x_{io}^L : i \in I^I \qquad for \quad DMU_o \quad (۲۰)$$

$$y_{rj} = y_{rj}^L : r \in O^I\ ,\ x_{ij} = x_{ij}^U : i \in I^I \qquad for \quad DMU_j : j \ne o \quad (۲۱)$$

$$y_{ro} = \underset{1 \le k \le k_r}{Max} \{ y_{ro}^{(k)} \} : r \in O^D,\ x_{io} = \underset{1 \le l \le l_i}{Min} \{ x_{io}^{(l)} \} : i \in I^D \qquad for \quad DMU_o \quad (۲۲)$$

$$y_{rj} = \underset{1 \le k \le k_r}{Min} \{ y_{rj}^{(k)} \} : r \in O^D,\ x_{ij} = \underset{1 \le l \le l_i}{Max} \{ x_{ij}^{(l)} \} : i \in I^D \qquad for \quad DMU_j : j \ne o\ . \quad (۲۳)$$

برهان: مدل CCR کسری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} Max \quad & \frac{\sum_{r \in O^I} u_r y_{ro} + \sum_{r \in O^D} u_r y_{ro}}{\sum_{i \in I^I} v_i x_{io} + \sum_{i \in I^D} v_i x_{io}} \\ s.t. \quad & \frac{\sum_{r \in O^I} u_r y_{ro} + \sum_{r \in O^D} u_r y_{ro}}{\sum_{i \in I^I} v_i x_{io} + \sum_{i \in I^D} v_i x_{io}} \le 0, \quad j = 1,\ldots,n, \\ & x_{ij} \in [x_{ij}^L, x_{ij}^U],\ i \in I^I,\ j = 1,\ldots,n, \\ & y_{rj} \in [y_{rj}^L, y_{rj}^U],\ r \in O^I,\ j = 1,\ldots,n, \\ & x_{ij} \in DI_{ij},\ i \in I^D\ and\ j = 1,\ldots,n, \\ & y_{rj} \in DO_{rj},\ r \in O^D\ and\ j = 1,\ldots,n, \\ & u_r, v_i \ge 0\ , \qquad for\ all\ i,\ r. \end{aligned} \quad (۲۴)$$

حال فرض کنیم که مقدار بهینه مدل (۲۴) برابر y_{rj}^* و x_{ij}^* برای $DMU_j : j \ne o$ به طوری باشد که:

$$y_{rj}^L < y_{rj}^* \le y_{rj}^U : r \in O^I\ , x_{ij}^L \le x_{ij}^* < x_{ij}^U : i \in I^I\ , \quad (۲۵)$$

$$y_{rj}^* > \underset{1 \le k \le k_r}{Min} \{ y_{rj}^{(k)} \},\ r \in O^D, x_{ij}^* < \underset{1 \le l \le l_i}{Max} \{ x_{ij}^{(l)} \},\ i \in I^D. \quad (۲۶)$$

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]

بنابراین:

$$\frac{\sum_{r\in O^I} u_r y^*_{rj} + \sum_{r\in O^D} u_r y^*_{rj}}{\sum_{i\in I^I} v_i x^*_{ij} + \sum_{i\in I^D} v_i x^*_{ij}} > \frac{\sum_{r\in O^I} u_r y^L_{rj} + \sum_{r\in O^D} u_r \underset{1\le k\le k_r}{Min}\{ y^{(k)}_{rj}\}}{\sum_{i\in I^I} v_i x^U_{ij} + \sum_{i\in I^D} v_i \underset{1\le l\le l_i}{Max}\{ x^{(l)}_{ij}\}}, \quad j\neq o, \qquad (۲۷)$$

و این به این معناست که:

$$x_{ij} = x^U_{ij} : i\in I^I,\ y_{rj} = y^L_{rj} : r\in O^I,\ y_{rj} = \underset{1\le k\le k_r}{Min}\{y^{(k)}_{rj}\},\ r\in O^D, x_{ij} = \underset{1\le l\le l_i}{Max}\{x^{(l)}_{ij}\},\ i\in I^D$$

برای مدل (۲۴) شدنی هستند. سپس فرض می‌کنیم مقدار بهینه‌ی مدل (۲۴) برای DMU_o، برابر y^*_{ro} و x^*_{io} می‌باشد به طوری که:

$$y^L_{ro} \le y^*_{ro} < y^U_{ro} : r\in O^I,\ x^L_{ij} < x^*_{ij} \le x^U_{ij} : i\in I^I, \qquad (۲۸)$$

$$y^*_{ro} < \underset{1\le k\le k_r}{Max}\{y^{(k)}_{ro}\},\ r\in O^D, x^*_{io} > \underset{1\le l\le l_i}{Min}\{x^{(l)}_{ij}\},\ i\in I^D. \qquad (۲۹)$$

بنابراین :

$$e^{(U)}_o = \frac{\sum_{r\in O^I} u_r y^*_{ro} + \sum_{r\in O^D} u_r y^*_{ro}}{\sum_{i\in I^I} v_i x^*_{io} + \sum_{i\in I^D} v_i x^*_{io}} < \frac{\sum_{r\in O^I} u_r y^U_{ro} + \sum_{r\in O^D} u_r \underset{1\le k\le k_r}{Max}\{ y^{(k)}_{ro}\}}{\sum_{i\in I^I} v_i x^L_{io} + \sum_{i\in I^D} v_i \underset{1\le l\le l_i}{Min}\{ x^{(l)}_{io}\}} \qquad (۳۰)$$

و این یک تناقض با فرض است؛ بنابراین اثبات کامل است.

بر طبق قضیه‌ی ۱ مدل غیرخطی (۷) می‌تواند به صورت مدل زیر برای محاسبه کران بالای کارایی بازنویسی شود:

$$\begin{aligned} e^{(U)}_o = Max\ & \sum_{r\in O^D} u_r \underset{1\le k\le k_r}{Max}\{y^{(k)}_{ro}\} + \sum_{r\in O^I} u_r y^U_{ro} \\ s.t.\ & \sum_{i\in I^D} v_i \underset{1\le l\le l_i}{Min}\{x^{(l)}_{io}\} + \sum_{i\in I^D} v_i x^L_{io} = 1, \\ & \sum_{r\in O^D} u_r \underset{1\le k\le k_r}{Max}\{y^{(k)}_{ro}\} + \sum_{r\in O^I} u_r y^U_{ro} - \sum_{i\in I^D} v_i \underset{1\le l\le l_i}{Min}\{x^{(l)}_{io}\} - \sum_{i\in I^D} v_i x^L_{io} \le 0, \\ & \sum_{r\in O^D} u_r \underset{1\le k\le k_r}{Min}\{y^{(k)}_{rj}\} + \sum_{r\in O^I} u_r y^L_{rj} - \sum_{i\in I^D} v_i \underset{1\le l\le l_i}{Max}\{x^{(l)}_{ij}\} - \sum_{i\in I^D} v_i x^U_{ij} \le 0,\ j = 1,\cdots,n, \\ & u_r, v_i \ge 0,\ \ for\ all\ i, r. \end{aligned} \qquad (۳۱)$$

کران پایین کارایی برای واحد تحت بررسی DMU_o با حل مدل زیر به‌دست می‌آید:

$$e^{(L)}_o = \underset{\substack{x^L_{ij}\le x_{ij}\le x^U_{ij}\\ y^L_{rj}\le y_{rj}\le y^U_{rj}\\ x_{ij}\in DI_{ij}\\ y_{rj}\in DO_{rj}\\ j=1,\ldots,n}}{Min} \begin{cases} \underset{u_r, v_i\ge 0}{Max} \sum_{r\in O^D} u_r\ y_{ro} + \sum_{r\in O^I} u_r y_{ro} \\ s.t. \\ \sum_{i\in I^D} v_i x_{io} + \sum_{i\in I^I} v_i x_{io} = 1, \\ \sum_{r\in O^D} u_r\ y_{rj} + \sum_{r\in O^I} u_r y_{rj} - \sum_{i\in I^D} v_i x_{ij} - \sum_{i\in I^I} v_i x_{ij} \le 0,\ j = 1,\ldots,n, \\ u_r, v_i \ge 0,\ \ for\ all\ i, r. \end{cases} \qquad (۳۲)$$

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]

قضیه ۲ مقدار بهینه‌ی برنامه‌ی داخلی مدل (۳۲) می‌تواند به صورت زیر تعیین شود:

$$y_{ro} = y_{ro}^{L} : r \in O^{I} \ , \ x_{io} = x_{io}^{U} : i \in I^{I} \ for \quad DMU_o \tag{۳۳}$$

$$y_{rj} = y_{rj}^{U} : r \in O^{I} \ , \ x_{ij} = x_{ij}^{L} : i \in I^{I} \ for \quad DMU_j : j \neq o \tag{۳۴}$$

$$y_{ro} = \underset{1 \le k \le k_r}{Min} \{ y_{ro}^{(k)} \} : r \in O^{D}, \ x_{io} = \underset{1 \le l \le l_i}{Max} \{ x_{io}^{(l)} \} : i \in I^{D} \quad for \quad DMU_o \tag{۳۵}$$

$$y_{rj} = \underset{1 \le k \le k_r}{Max} \{ y_{rj}^{(k)} \} : r \in O^{D}, \ x_{ij} = \underset{1 \le l \le l_i}{Min} \{ x_{ij}^{(l)} \} : i \in I^{D} \quad for \quad DMU_j : j \neq o \ . \tag{۳۶}$$

برهان- اثبات مشابه قضیه‌ی ۱ می‌باشد.

با روشی مشابه قبل مدل غیرخطی (۱۰) می‌تواند با مدل خطی زیر جایگزین شود:

$$\begin{aligned} e_o^{(L)} = Max \quad & \sum_{r \in O^D} u_r \ . \underset{1 \le k \le k_r}{Min} \{ y_{ro}^{(k)} \} + \sum_{r \in O^I} u_r y_{ro}^{L} \\ s.t. \quad & \\ & \sum_{i \in I^D} v_i \ . \underset{1 \le l \le l_i}{Max} \{ x_{io}^{(l)} \} + \sum_{i \in I^D} v_i x_{io}^{U} = 1, \\ & \sum_{r \in O^D} u_r \ . \underset{1 \le k \le k_r}{Min} \{ y_{ro}^{(k)} \} + \sum_{r \in O^I} u_r y_{ro}^{L} - \sum_{i \in I^D} v_i \ . \underset{1 \le l \le l_i}{Max} \{ x_{io}^{(l)} \} - \sum_{i \in I^D} v_i x_{io}^{U} \le 0, \\ & \sum_{r \in O^D} u_r \ . \underset{1 \le k \le k_r}{Max} \{ y_{rj}^{(k)} \} + \sum_{r \in O^I} u_r y_{rj}^{U} - \sum_{i \in I^D} v_i \ . \underset{1 \le l \le l_i}{Min} \{ x_{ij}^{(l)} \} - \sum_{i \in I^D} v_i x_{ij}^{L} \le 0, \ j = 1, \cdots, n \ , \\ & u_r, v_i \ge 0 \ , \ \ for \ all \ i, r. \end{aligned} \tag{۳۷}$$

مدل (۳۱) یک مدل با داده‌های دقیق می‌باشد به طوری که سطوح ورودی‌ها و خروجی‌ها برای واحد تحت ارزیابی در مطلوب‌ترین حالت و برای مابقی واحدها در بدترین حالت تنظیم و در مدل (۳۷) برعکس مدل (۳۱) سطوح ورودی‌ها و خروجی‌ها برای واحد تحت ارزیابی در بدترین حالت و برای مابقی واحدها در مطلوب‌ترین حالت تنظیم شده است. بر این اساس ما سه نوع دسته‌بندی را برای واحدها به صورت زیر تنظیم می‌کنیم:

$$E^{++} = \{ j : e_o^{P} = 1 \} \tag{۳۸}$$

$$E^{+} = \{ j : e_o^{P} < 1, e_o^{O} = 1 \} \tag{۳۹}$$

$$E^{-} = \{ j : e_o^{O} = 1 \} \tag{۴۰}$$

مجموعه‌ی E^{++} شامل تمام واحدهای کارایی می‌باشد که در هر شرایط کارا است. به این واحدها، واحدهای کارای کامل می‌گوییم. واحدهایی که در مجموعه‌ی E^{+} قرار دارند در حالت خوشبینانه کارا و در حالت بدبینانه ناکارا هستند. در نهایت مجموعه‌ی E^{-} شامل واحدهایی می‌شود که ناکارای کامل هستند. در بخش بعد کاربرد واقعی از مدل‌های پیشنهادشده مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند.

۷ مثال کاربردی

مدل پیشنهاد شده در این تحقیق برای محاسبه‌ی کارایی تکنیکی بر روی مجموعه‌ای از داده‌های یک بانک خصوصی در ایران اجرا شده است. بر اساس قوانین بانکداری در جمهوری اسلامی ایران، بانک ها در ایران به دو گروه تقسیم می‌شوند: بانک‌های دولتی، بانک‌های خصوصی. هرکدام از این گروه‌ها به طور جداگانه به فعالیت

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]

اقتصادی درحوزه‌ی خود می‌پردازند. در این مقاله به مطالعه بر روی بانک‌های خصوصی در ایران پرداخته شده است. از دیدگاه عملیات بانک‌های خصوصی در ایران، می‌توان دریافت که سپرده‌ها و وام‌ها مورد توجه عمده آن‌ها می‌باشند و همچنین تأکید مدیریت بانک، بر جذب سپرده‌ها و سپس توزیع مطلوب سپرده‌های جذب‌شده می‌باشد. در این مقاله هر شعبه‌ی بانکی به عنوان یک واحد تصمیم‌گیرنده در نظر گرفته شده است. داده‌ها از ۲۵ نمونه از شعب انتخاب شده و از عملیات طی ۱۲ ماه سال ۲۰۰۹ استفاده شده است. این ۱۲ ماه به دو دوره‌ی ۶ ماهه تقسیم شد، به طوری که هر ۶ ماه جمع‌آوری داده‌ها انجام و داده‌ها استخراج شدند. از شش متغیر از مجموعه داده‌ها، به عنوان ورودی‌ها و خروجی‌ها استفاده شد. هر شعبه از تعدادی کارمند (x_1)، تعدادی حساب چک (x_2) و هزینه‌های عملیاتی (به استثنای هزینه‌های کارمندان) (x_3) تحت عنوان ورودی استفاده می‌کنند. همچنین سپرده‌ها (y_1)، وام‌ها (y_2) و تعداد معاملات (y_3) می‌توانند به عنوان خروجی در نظر گرفته شوند. کل داده‌های ورودی و خروجی در جدول ۱ آورده شده است. در پایان هر دوره (۶ ماه)، مقادیر مختلف داده‌ها برآورد می‌شود. از آنجایی که سپرده‌ها، وام‌ها و هزینه‌ها در یک دوره تغییر می‌کنند، اندازه‌گیری این داده‌ها از نوع نادقیق محسوب می‌شوند؛ بنابراین متغیرهای ورودی و خروجی x_3، y_1 و y_2 دارای ارزش واقعی و متعلق به بازه‌ای کراندار از اعداد هستند. همچنین متغیرهای x_1، x_2 و y_3 دارای مقادیر گسسته می‌باشند و لذا به مجموعه‌ای گسسته از اعداد تعلق دارند.

با استفاده از مدل پیشنهادی (۱۸)، چهارده شعبه، کارا ارزیابی شدند. امتیازات کارایی به دست آمده از مدل (۱۸) برای تمام شعبه‌ها در جدول ۲ آورده شده است. سومین و چهارمین ستون از جدول ۲ به ترتیب کران پایین و کران بالای بازه‌ی کارایی محاسبه شده توسط مدل‌های (۳۱) و (۳۷) را نشان می‌دهند. لازم به ذکر است که شعبه-های ۸، ۱۰، ۱۶ و ۲۳ دارای امتیار کارایی ۱ می‌باشند. نتیجه‌ای که می‌توان در اینجا گرفت این است که این چهار شعبه کارای کامل هستند. از سوی دیگر، شعبه‌های ۳، ۷، ۱۴ و ۱۹ دارای امتیاز کارایی کم‌تر از ۱ هستند؛ لذا نتیجه می‌گیریم که این چهار شعبه ناکارای کامل می‌باشند. برای تفسیر نتایج به دست آمده به عنوان نمونه، واحد ۱ را در نظر می‌گیریم. بازه‌ی کارایی این واحد $[۱, ۷۰۷۷ / ۰]$ و امتیاز کارایی به‌دست آمده از مدل (۶) برای آن ۰/۸۲۱۴ می‌باشد. همچنین بردار ورودی‌ها و خروجی‌ها برای این واحد

$$(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (۱۵/۱۴, ۷۹۵, ۲۲۳۷۱۶, ۱۱۴۰۵۳۵۶۳, ۹۴۰۵۸۹۵, ۱۹۰۴۶)$$

به دست می‌آید. در این تحقیق از نرم افزار GAMS نصب شده بر روی کامپیوتر پنتیوم ۴ با حافظه ی رم ۵۱۲M و GHZ۲ استفاده شده است.

جدول ۱. مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها

شعبه	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
۱	{۱۳/۱۴ و ۱۵/۱۴}	{۷۳۷ و ۷۹۵}	[۲۲۳۷۱۶, ۲۳۷۴۴۴]	[۱۱۴۰۵۳۵۶۳, ۱۳۰۷۴۸۹۹۰]	[۹۴۰۵۸۹۵۶, ۱۰۰۷۶۸۹۹۰]	{۱۷۰۴۶ و ۱۹۰۴۶}
۲	{۲۶/۸۲ و ۲۹/۷۴}	{۲۸۱ و ۳۶۲}	[۱۹۷۸۲۲, ۲۰۲۹۹۳]	[۲۲۹۶۴۷۸۵۴, ۲۴۴۱۸۹۶۸۴]	[۱۷۹۶۷۳۲۸۴, ۱۹۴۱۰۹۶۸۴]	{۱۵۵۷۶ و ۱۵۸۳۰}
۳	{۲۹/۰۷ و ۳۳/۲۵}	{۷۴۱ و ۸۵۳}	[۱۶۷۸۸۶, ۱۹۴۵۳۳]	[۱۷۲۲۰۳۷۶۱, ۱۹۴۳۹۱۲۹۸]	[۱۱۲۲۳۲۷۱, ۱۲۴۳۰۱۲۹۸]	{۱۸۷۴۴ و ۱۶۸۰۷}
۴	{۲۵/۳۱ و ۲۹/۱۲}	{۵۱۲ و ۵۲۷}	[۲۲۲۱۶۹, ۲۳۵۸۱۵]	[۱۱۸۰۲۷۶۶۴, ۱۲۸۸۸۵۸۴۰]	[۱۷۸۰۷۲۱۶۴, ۱۸۸۸۹۵۸۴۰]	{۲۳۳۵۹ و ۲۱۰۲۶}
۵	{۲۴/۳۲ و ۲۵/۵۸}	{۲۷۳ و ۳۶۳}	[۲۲۵۴۴۶, ۲۳۸۱۳۹]	[۱۸۹۵۵۵۲۶۱, ۱۹۶۲۵۴۱۴]	[۱۲۹۵۵۹۱۲۱, ۱۴۶۲۳۶۴۱۴]	{۲۲۸۰۵ و ۲۰۶۵۳}

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]

۶	{۱۹/۵۴ و ۲۳/۲۴}	{۳۵۱ و ۲۹۸}	[۲۱۰۷۵۰ , ۲۳۶۶۵۱]	[۱۴۴۳۴۳۹۲۳ , ۱۶۴۹۱۸۹۴۲]	[۱۰۴۳۳۴۵۹۳ , ۱۲۴۹۵۸۹۴۲]	{۲۱۶۳۹ و ۱۹۴۲۴}
۷	{۲۷/۹۶ و ۲۹/۳۸}	{۵۰۵ و ۶۱۱}	[۱۹۱۹۶۰ , ۲۱۳۳۲۸]	[۱۷۵۵۱۳۱۵۲ , ۱۹۹۳۱۴۷۴۱]	[۱۳۵۵۳۰۱۲ , ۱۵۹۳۱۴۷۴۱]	{۱۷۸۵۳ و ۱۸۲۸۴}
۸	{۲۲/۴۰ و ۲۵/۰۸}	{۴۳۴ و ۶۱۴}	[۱۱۲۳۹۲ , ۱۳۵۳۸۳]	[۱۲۹۷۶۰۵۴۲ , ۱۳۹۵۲۱۳۹۳]	[۱۶۹۷۰۱۳۵۲ , ۱۷۹۵۸۱۳۹۳]	{۲۱۴۶۸ و ۲۲۲۹۹}
۹	{۱۸/۴۷ و ۲۱/۳۴}	{۴۲۲ و ۵۱۷}	[۲۶۵۴۲۴ , ۲۸۱۰۷۹]	[۲۱۵۶۰۷۶۱۹ , ۲۲۵۸۳۵۲۶۸]	[۱۷۵۶۷۷۷۶۹ , ۱۸۵۸۱۵۲۶۸]	{۲۱۴۶۶ و ۲۲۰۶۹}
۱۰	{۲۷/۳۲ و ۲۸/۷۸}	{۳۳۲ و ۴۲۶}	[۲۱۴۰۹۶ , ۲۲۶۸۱۴]	[۳۳۰۶۷۸۷۷۳ , ۳۴۲۹۲۵۰۴۴]	[۲۲۰۶۸۹۰۷۳ , ۲۴۲۹۶۵۰۴۴]	{۲۲۶۵۱ و ۲۴۶۹۳}
۱۱	{۱۴/۶۲ و ۱۷/۲۴}	{۳۲۱ و ۴۸۱}	[۱۴۴۳۳۸ , ۱۶۲۴۸۳]	[۱۴۸۵۱۳۴۳۰ , ۱۵۰۴۸۴۱۱۲]	[۱۰۸۵۳۲۶۴۰ , ۱۲۰۴۷۴۱۱۲]	{۱۸۶۴۵ و ۱۹۲۸۹}
۱۲	{۲۱/۰۱ و ۲۳/۲۵}	{۴۳۹ و ۵۳۳}	[۲۰۱۰۸۵ , ۲۱۲۱۳۵]	[۱۱۷۶۶۲۷۲۱ , ۱۴۰۹۶۳۶۸۴]	[۸۷۶۶۶۲۷۲ , ۹۹۹۳۹۶۸۴]	{۱۹۱۶۷ و ۲۱۲۸۹}
۱۳	{۳۷/۵۴ و ۴۰/۰۱}	{۴۲۴ و ۵۸۷}	[۹۰۷۲۴ , ۱۰۸۱۹۵]	[۱۵۵۳۴۶۸۵۹ , ۱۸۷۵۷۲۶۹۳]	[۱۱۵۳۶۴۳۸۹ , ۱۲۷۵۸۲۶۹۳]	{۱۱۲۷۱ و ۱۱۵۰۳}
۱۴	{۲۴/۶۶ و ۲۵/۹۶}	{۴۲۹ و ۵۷۵}	[۱۸۳۹۶۱ , ۲۰۵۵۶۳]	[۱۱۹۵۵۴۳۰۳ , ۱۳۹۲۲۹۹۴۶]	[۹۹۵۵۴۵۳۰ , ۱۱۹۲۲۹۹۴۶]	{۱۲۴۶۷ و ۱۳۸۹۳}
۱۵	{۱۱/۱۴ و ۱۳/۲۳}	{۴۸۹ و ۵۲۹}	[۱۱۵۲۶۴ , ۱۳۹۸۳۵]	[۱۴۷۳۳۹۵۷۷ , ۱۵۹۵۵۷۰۵۷]	[۱۰۷۳۹۰۴۵۷ , ۱۲۹۵۰۷۰۵۷]	{۱۲۶۲۴ و ۱۴۴۰۵}
۱۶	{۲/۷۷ و ۱۲/۱۴}	{۴۷۳ و ۵۴۶}	[۲۱۴۵۱۳ , ۲۳۴۲۳۹]	[۱۹۴۲۸۷۱۸۶ , ۱۹۹۹۷۲۳۰۴]	[۱۴۴۲۷۷۶۱۶ , ۱۵۹۹۰۲۳۰۴]	{۱۱۰۲۵ و ۱۲۴۷۸}
۱۷	{۱۲/۷۰ و ۱۴/۱۹}	{۳۴۵ و ۴۱۲}	[۲۰۴۵۷۲ , ۲۱۰۴۷۱]	[۱۹۳۳۴۰۰۸۴ , ۱۹۷۶۰۹۵۲۹]	[۱۲۳۳۰۰۲۰۴ , ۱۳۷۶۸۹۵۲۹]	{۱۱۱۹۷ و ۱۲۱۳۱}
۱۸	{۱۱/۸۱ و ۱۲/۲۹}	{۵۴۱ و ۶۴۳}	[۲۱۸۳۴۴ , ۲۲۰۳۲۳]	[۱۳۹۶۱۶۵۶۲ , ۱۴۳۰۷۱۹۹۸]	[۱۰۹۶۶۴۷۵۲ , ۱۲۳۰۷۱۹۹۸]	{۱۳۷۶۳ و ۱۴۵۰۹}
۱۹	{۲۲/۷۳ و ۲۴/۲۸}	{۶۶۳ و ۷۹۹}	[۱۳۰۱۲۷ , ۱۵۴۴۸۶]	[۱۱۰۱۵۹۰۴۴ , ۱۳۹۸۹۳۳۳۸]	[۹۰۱۵۹۸۰۴ , ۱۰۹۸۷۳۳۳۸]	{۹۴۳۰ و ۱۰۸۲۸}
۲۰	{۱۱/۳۳ و ۱۳/۳۸}	{۲۷۶ و ۸۳۸}	[۱۵۶۷۹۹ , ۱۶۸۵۳۳]	[۱۵۹۰۸۱۶۴۳ , ۱۶۵۴۵۶۲۱۱]	[۱۱۹۰۱۳۱۶۳ , ۱۲۵۴۵۶۲۱۱]	{۱۳۸۳۷ و ۱۵۲۹۵}
۲۱	{۱۵/۸۰ و ۱۷/۸۷}	{۳۵۷ و ۷۹۵}	[۱۱۲۳۲۰ , ۱۲۱۷۰۳]	[۱۲۳۳۱۹۵۵۸ , ۱۴۷۱۴۰۱۸۶]	[۱۰۳۳۹۳۲۵۸ , ۱۲۷۱۶۰۱۸۶]	{۱۳۴۷۴ و ۱۴۰۷۲}
۲۲	{۱۲/۴۹ و ۱۴/۹۷}	{۷۴۳ و ۶۷۳}	[۱۳۹۲۸۲ , ۱۴۵۸۲۴]	[۱۹۳۰۰۶۲۹۸ , ۱۹۹۵۱۷۵۲۰]	[۱۵۳۰۶۶۴۲۸ , ۱۶۹۵۲۷۵۲۰]	{۹۹۷۵ و ۱۱۱۴۲}
۲۳	{۱۳/۸۴ و ۱۵/۶۴}	{۴۴۱ و ۵۶۲}	[۱۳۰۹۰۵ , ۱۴۸۷۶۸]	[۱۷۳۷۴۶۲۶۰ , ۱۸۷۲۲۳۰۹۸]	[۱۵۳۷۶۱۷۲۰ , ۱۷۷۲۴۳۰۹۸]	{۲۱۵۴۴ و ۲۱۹۹۸}
۲۴	{۱۲/۹۰ و ۱۴/۲۴}	{۳۷۱ و ۴۸۳}	[۱۱۷۸۸۶ , ۱۳۶۴۷۰]	[۱۴۰۶۸۱۶۳۲ , ۱۵۳۱۹۴۶۶۰۴]	[۱۰۰۶۱۴۴۶۲ , ۱۲۳۱۸۴۶۰۴]	{۱۳۴۷۶ و ۱۵۱۴۰}
۲۵	{۱۰/۹۲ و ۱۲/۶۳}	{۶۲۰ و ۵۴۷}	[۱۰۶۳۴۹ , ۱۱۶۹۲۲]	[۱۰۸۹۹۵۴۴۶ , ۱۱۶۱۴۶۷۷۵]	[۸۸۹۹۳۵۴۴ , ۱۰۶۱۵۶۷۷۵]	{۱۲۵۲۹ و ۱۴۸۳۹}

جدول ۲. امتیازات کارایی

شعبه	e_o^*	$e_o^{(L)}$	$e_o^{(U)}$	$(x_۱, x_۲, x_۳, y_۱, y_۲, y_۳)$
۱	۰/۸۲۱۴	۰/۷۰۷۷	۱	(۱۵/۱۴ , ۲۲۳۷۱۶ , ۱۱۴۰۵۳۵۶۳ , ۹۴۰۵۸۹۵۶ ,۱۹۰۴۶)
۲	۱	۰/۷۴۹۲	۱	(۲۹/۷۴ ,۲۸۱, ۱۹۷۸۲۲, ۲۴۴۱۸۹۶۸۴ ,۱۹۴۱۰۹۶۸۴,۱۵۸۳۰)
۳	۰/۷۲۲۷	۰/۵۶۰۸	۰/۸۹۲۹	(۳۳/۲۵,۷۴۱ , ۱۶۷۸۸۶ , ۱۷۲۲۰۳۷۶۱ , ۱۲۴۳۰۱۲۹۸ , ۱۶۸۰۷)
۴	۰/۸۶۵۹	۰/۶۵۴۷	۱	(۲۹/۱۲,۵۱۲ , ۲۲۲۱۶۹ , ۱۱۸۰۲۷۶۶۴ , ۱۸۸۸۹۵۸۴۰ , ۲۳۳۵۹)
۵	۱	۰/۷۸۹۱	۱	(۲۵/۵۸,۲۷۳ , ۲۲۵۴۴۶ , ۱۸۹۵۵۵۲۶۱ , ۱۲۹۵۵۹۱۲۱ , ۲۰۶۵۳)
۶	۱	۰/۷۸۴۳	۱	(۲۳/۲۴,۲۹۸ , ۲۱۰۷۵۰ , ۱۴۴۳۴۳۹۲۳ , ۱۰۴۳۳۴۵۹۳ , ۱۹۴۲۴)
۷	۰/۸۱۴۹	۰/۵۵۰۸	۰/۸۱۸۸	(۲۹/۳۸,۵۰۵ , ۱۹۱۹۶۰ , ۱۷۵۵۱۳۱۵۲ , ۱۵۹۳۱۴۷۴۱ , ۱۸۲۸۴)
۸	۱	۱	۱	(۲۵/۰۸,۴۳۴ , ۱۱۲۳۹۲ , ۱۲۹۶۰۵۴۲ , ۱۷۹۵۸۱۳۹۳ , ۲۱۴۶۸)
۹	۰/۹۶۳۳	۰/۷۴۸۱	۱	(۲۱/۳۴,۴۲۲ , ۲۶۵۴۲۴ , ۲۱۵۶۰۷۶۱۹ , ۱۸۵۸۱۵۲۶۸ , ۲۱۴۶۶)
۱۰	۱	۱	۱	(۲۸/۷۸,۳۳۲ , ۲۱۴۰۹۶ , ۳۳۰۶۷۸۷۷۳ , ۲۴۲۹۶۵۰۴۴ , ۲۲۶۵۱)
۱۱	۱	۰/۷۳۸۶	۱	(۱۷/۲۴,۳۲۱ , ۱۴۴۳۳۸ , ۱۴۸۵۱۳۴۳۰ , ۱۲۰۴۷۴۱۱۲ , ۱۸۶۴۵)
۱۲	۰/۹۱۹۵	۰/۶۲۹۵	۱	(۲۳/۲۵,۴۳۹ , ۲۰۱۰۸۵ , ۱۱۷۶۶۲۷۲۱ , ۹۹۹۳۹۶۸۴ , ۱۹۱۶۷)
۱۳	۱	۰/۹۱۱۷	۱	(۴۰/۰۱,۴۲۴ , ۹۰۷۲۴ , ۱۵۵۳۴۶۸۵۹ , ۱۲۷۵۸۲۶۹۳ , ۱۱۲۷۱)
۱۴	۰/۶۸۲۸	۰/۳۹۵۹	۰/۶۸۲۸	(۲۵/۹۶,۴۲۹ , ۱۸۳۹۶۱ , ۱۱۹۵۵۴۳۰۳ , ۹۹۵۵۴۵۳۰ , ۱۲۴۶۷)
۱۵	۱	۰/۷۶۰۲	۱	(۱۳/۲۳,۴۸۹ , ۱۱۵۲۶۴ , ۱۴۷۳۳۹۵۷۷ , ۱۲۹۵۰۷۰۵۷ , ۱۲۶۲۴)
۱۶	۱	۱	۱	(۱۲/۱۴,۴۷۳ , ۲۱۴۵۱۳ , ۱۹۴۲۸۷۱۸۶ , ۱۵۹۹۰۲۳۰۴ , ۱۱۰۲۵)
۱۷	۱	۰/۸۳۹۱	۱	(۱۴/۱۹,۴۱۲ , ۲۰۴۵۷۲ , ۱۹۳۳۴۰۰۸۴ , ۱۳۷۶۸۹۵۲۹ , ۱۱۱۹۷)

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]

۱۸	۰/۸۹۴۵	۰/۷۴۱۶	۱	(۱۲/۲۹,۶۴۳ ,۲۱۸۳۴۴ ,۱۳۹۶۱۶۵۶۲ ,۱۰۹۶۶۴۷۵۲ ,۱۴۵۰۹)
۱۹	۰/۶۶۲۹	۰/۴۵۲۱	۰/۸۰۱۷	(۲۴/۲۸,۷۹۹ ,۱۳۰۱۲۷ ,۱۱۰۱۵۹۰۴۴ ,۹۰۱۵۹۸۰۴ ,۹۴۳۰)
۲۰	۱	۰/۷۶۱۲	۱	(۱۳/۳۶,۲۷۶ ,۱۵۶۷۹۹ ,۱۶۵۴۵۶۲۱۱ ,۱۲۵۴۵۶۲۱۱ ,۱۳۸۳۷)
۲۱	۰/۸۹۰۸	۰/۶۷۴۸	۱	(۱۷/۸۷,۳۵۷ ,۱۱۲۳۲۰ ,۱۲۳۳۱۹۵۵۸ ,۱۲۷۱۶۰۱۸۶ ,۱۳۴۷۴)
۲۲	۱	۰/۹۲۸۱	۱	(۱۴/۹۷,۷۴۳ ,۱۴۵۸۲۴ ,۱۹۳۰۰۶۲۹۸ ,۱۶۹۵۲۷۵۲۰ ,۹۹۷۵)
۲۳	۱	۱	۱	(۱۵/۶۴,۴۴۱ ,۱۴۸۷۶۸ ,۱۷۳۷۴۶۲۶۰ ,۱۷۷۲۴۳۰۹۸ ,۲۱۵۴۴)
۲۴	۰/۹۱۹۱	۰/۷۱۱۸	۱	(۱۴/۲۴,۳۷۱ ,۱۱۷۸۸۶ ,۱۴۰۶۸۱۶۳۲ ,۱۲۳۱۸۴۶۰۴ ,۱۳۴۷۶)
۲۵	۱	۰/۶۴۷۲	۱	(۱۰/۹۲,۶۲۰ ,۱۰۶۳۴۹ ,۱۰۸۹۹۵۴۴۶ ,۱۰۶۱۵۶۷۷۵ ,۱۲۵۲۹)

۸ نتیجه‌گیری

در بسیاری از مطالعات کاربردی با مواردی مواجه می‌شویم که متغیرهای ورودی و خروجی متعلق به بازه‌ای و یا مجموعه‌ی گسسته‌ای از اعداد هستند. در این مقاله به بررسی کارایی واحدهایی پرداخته می‌شود که برخی از ورودی‌ها و خروجی‌هایشان همزمان شامل داده‌های نادقیق بازه‌ای و گسسته می‌باشند. برای این منظور، مدلی غیرخطی پیشنهاد شد و سپس با استفاده از تغییراتی، این مدل تبدیل به یک مدل صحیح و خطی شده است که برای محاسبه‌ی کارایی چنین واحدهایی مورد استفاده قرار گرفت.

منابع

[1] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 2, 429–44.

[2] Cook, W. D., Kress, M., Seiford, L., (1993). On the use of ordinal data in data envelopment analysis. Journal of Operational Research Society, 44, 133-140.

[3] Cook, W. D., Kress, M., Seiford, L., (1996). Data envelopment analysis in the presence of both quantitative and qualitative factors. Management Science, 45, 597-607.

[4] Cooper, W. W., Park, K. S., Yu G., (1999). IDEA and AR-IDEA: Models for dealing with imprecise data in DEA. Journal of Operational Research Society, 47, 945-953.

[5] Kim, S. H., Park C. G., Park K. H., (1999). An application of data envelopment analysis in telephone offices evaluation with partial data. Computers & Operations Research, 26, 59-72.

[6] Cooper, W. W., Park K. S., Yu, G., (2001). An illustrative application of IDEA (Imprecise data envelopment analysis) to a Korean mobile telecommunication company. Operations Research, 49, 807-820.

[7] Lee, Y. K., Park K. S., Kim S. H., (2002). An Identification of inefficiencies in an additive model based on IDEA (Imprecise data envelopment analysis). Computers & Operations Research, 29, 1661-1676.

[8] Despotis, D. K., Smirlis, Y. G., (2002). Data envelopment analysis with imprecise data European Journal of Operational Research, , 140(1), 24-36.

[9] Zhu, J., (2003). Imprecise data envelopment analysis (IDEA): Areview and improvement with an application. Euroupean Journal of Operational Research, 144, 513-529.

[10] Kao, C., (2006) Interval efficiency measures in data envelopment analysis with imprecise data European Journal of Operational Research, 174(2), 1087-1099.

[11] Sam Park, K. Duality,(2010), efficiency computations and interpretations in imprecise DEA, European Journal of Operational Research. 200(1), 289-296.

[12] Wang, Y. M., Yang, J. B., (2007). Measuring the performances of decision-making units using interval efficiencies. Journal of Computational and Applied Mathematics, 198(1), 253- 267.

[13] Azizi, H., Wang, Y. B., (2013). Improved DEA models for measuring interval efficiencies of decision-making units. Measurement, 46(3), 1325- 1332.

[14] Azizi, H., Kordrostami, S., Amirteimoori, A., (2015). Slacks-based measures of efficiency in

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]

imprecise data envelopment analysis: An approach based on data envelopment analysis with double frontiers. Computers & Industrial Engineering, 79, 42- 51.
[15] Khalili-Damaghani, K., Tavana, M., (2015). A data envelopment analysis model with interval data and undesirable output for combined cycle power plant performance assessment. Expert Systems with Applications, 42(2), 760- 773.
[16] Hatami Marbini, A., Ghelej Beigi, Z., Hougard, J. L., Gholami, K,. (2018). Measurement of returns-to-scale using interval data envelopment analysis models. Computers & Industrial Engineering, 117, 94- 107.
[17] Toloo, M., Keshavarz, E., Hougard, J. L., Hatami Marbini, A., (2018). Dual-role factors for imprecise data envelopment analysis. Omega, 77, 15- 31.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.6.5]