

رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا با استفاده از نظریه بازی همکارانه مبتنی بر مدل ورودی محور SBM و ارزش هسته‌ای

علی اشرفی^{۱*}، مهدیه امیری^۲

۱- استادیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

۲- دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

رسید مقاله: ۱۰ خرداد ۱۳۹۷

پذیرش مقاله: ۴ آذر ۱۳۹۸

چکیده

در ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده به کمک مدل‌های DEA، ممکن است بیش از یک واحد تصمیم‌گیرنده دارای مقدار کارایی یک باشد. از آنجایی که رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا برای تصمیم‌گیران ضروری است؛ لذا روش‌ها و مدل‌های مختلفی بدین منظور ارایه شده است. یکی از این روش‌ها، روش مبتنی بر استفاده از نظریه بازی‌ها برای تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا است. در این تحقیق، از مدل‌های لی و لوزانو [۲، ۱] استفاده می‌شود که این مدل‌ها ترکیبی از تحلیل پوششی داده‌ها و نظریه بازی‌ها هستند. همچنین از مدل SBM ورودی محور و ارزش هسته‌ای به منظور رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا استفاده می‌شود.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، نظریه بازی همکارانه، واحد تصمیم‌گیرنده، رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا، ارزش هسته‌ای

۱ مقدمه

ارزیابی عملکرد سازمان‌ها با هر سیستمی، به منظور افزایش بهره‌وری، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است که معمولاً با مدل‌بندی سیستم‌های مختلف به کمک شاخه‌های گوناگونی از ریاضیات، این امر تحقق می‌یابد. تحلیل پوششی داده‌ها که به اختصار DEA نامیده می‌شود، یکی از روش‌های غیرپارامتریک و کمی برای بررسی کارایی سیستم‌ها است. تحلیل پوششی داده‌ها برای اولین بار در دهه ۶۰ قرن بیستم میلادی توسط فارل [۳] معرفی شده است. در سال‌های بعد این روش توسط چارنز، کوپر و رودز [۴] توسعه یافت و اولین مدل CCR ارایه گردید. آنها یک مساله برنامه‌ریزی خطی را فرموله کردند که در آن واحدهای تصمیم‌گیرنده با چندین ورودی و خروجی ارزیابی می‌شدند. در ارزیابی عملکرد هر واحد تصمیم‌گیرنده توسط DEA، مقادیر کارایی نسبی بین

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: a_ashrafi@semnan.ac.ir

صفر و یک به دست می‌آید. واحدهای تصمیم‌گیرنده در DEA به دو دسته واحدهای کارا و ناکارا تقسیم می‌شوند که واحدهای کارا مقادیر کارایی برابر با یک دارند.

از آنجا که در مدل‌های کلاسیک DEA، معمولاً بیش از یک واحد کارا وجود دارد، ارایه مدل‌هایی به منظور رتبه‌بندی واحدهای کارا و انتخاب یک واحد تصمیم‌گیرنده به عنوان کاراترین واحد در بین تمام واحدها، یکی از فعالیت‌های مورد توجه در تحلیل پوششی داده‌ها است. بدین منظور روش‌ها و مدل‌های مختلفی ارایه شده است [۶، ۵].

یکی از این روش‌ها، رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده مبتنی بر تئوری بازی همکارانه است. این روش ترکیبی از دو مدل بازی همکارانه و DEA است که تنها برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا به کار می‌رود. مقاله حاضر، مساله رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا را با کمک مدل‌های معرفی شده توسط لی و همکاران و لوزانو و همکاران که یک روش بازی همکارانه هستند، حل می‌کند. مدل‌های لی و لوزانو یک مدل ترکیبی از تحلیل پوششی داده‌ها و نظریه بازی‌ها هستند. ایده اصلی مدل‌های لی و لوزانو این است که اگر واحدهای تصمیم‌گیرنده کارایی که مرز کارا را تشکیل می‌دهند در نمونه حضور نداشته باشند، آنگاه مقدار کارایی همان واحدهای کارا و مقدار کارایی واحدهای ناکارا افزایش می‌یابد و ممکن است تعدادی از واحدهای ناکارا، کارا شوند. در مدل‌های لی و لوزانو از مدل CCR ورودی محور به منظور محاسبه مقادیر کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده و از ارزش شیلی به منظور رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا استفاده شده است [۲، ۱].

ارزش هسته‌ای و ارزش شیلی دو روش متفاوت برای حل مساله تخصیص سود حاصل از همکاری بازیکنان در یک بازی همکارانه است که ارزش هسته‌ای یک مساله برنامه‌ریزی خطی است و ارزش شیلی به صورت یک فرمول ریاضی می‌باشد. هر دو راه حل ارزش هسته‌ای و ارزش شیلی یک جواب منحصر به فرد ارایه می‌دهند و ارزش هسته‌ای نسبت به ارزش شیلی جواب بهتری را ارایه می‌دهد [۷]. مدل CCR یک مدل شعاعی و مدل SBM یک مدل غیرشعاعی است. مدل‌های CCR و SBM نسبت به تغییر واحد پایدار هستند اما این مدل‌ها نسبت به انتقال پایدار نیستند که این ویژگی‌ها در کتاب‌های کوپر و همکاران ۲۰۰۰ و ۲۰۰۶ بیان شده است [۹، ۸، ۱۰، ۱۱ و ۱۲]. مدل SBM نسبت به مدل CCR در توانایی ارایه معیارهای مناسب‌تر کارایی به ویژه برای واحدهای کارای ضعیف برتری دارد [۸].

لذا در طرح پیشنهادی از مدل SBM استفاده می‌کنیم و به منظور مقایسه ترتیب رتبه‌بندی طرح پیشنهادی خود با مدل‌های لی و لوزانو که از مدل ورودی محور CCR استفاده کردند، از مدل ورودی محور SBM استفاده می‌کنیم.

چون مرز کارا به کمک واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا تعریف می‌شود لذا ایده اندازه‌گیری تاثیر حذف زیر مجموعه‌ای از واحدهای کارا بر روی واحدهای تصمیم‌گیرنده دیگر می‌تواند نتیجه خوبی از رتبه‌بندی واحدهای کارا را به ما بدهد. لذا مقاله حاضر، سهم مشارکت یک واحد تصمیم‌گیرنده کارا را با کمک مدل‌های لی و لوزانو و مبتنی بر مدل SBM ورودی محور و ارزش هسته‌ای اندازه‌گیری می‌کند تا بتواند طرح پیشنهادی خود را با

مدل‌های لی و لوزانو از نظر ترتیب رتبه‌بندی واحدهای کارا مقایسه کند. ایده‌ها و مفاهیم مدل ترکیبی نظریه بازی‌ها و تحلیل پوششی داده‌ها در بخش ادبیات موضوع شرح داده می‌شود. ساختار این مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲، روش‌های مختلف مدل ترکیبی تحلیل پوششی داده‌ها و نظریه بازی‌ها شرح داده می‌شود. در بخش ۳، مدل‌های لی و لوزانو شرح داده می‌شود. در بخش ۴، تحقیقات خود را به منظور رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا ارائه می‌دهیم. بخش ۵ مثال عددی کاربردی با توجه به داده‌های ارائه شده را گزارش می‌دهد. در نهایت بخش آخر، نتایج حاصل از این پژوهش شرح داده شده و زمینه‌های مطالعات بیش‌تر در تحقیقات آتی معرفی شده‌اند.

۲ ادبیات موضوع

در سال ۱۹۵۷ فارل [۳] با استفاده از روش اندازه‌گیری کارایی در مباحث مهندسی اقدام به اندازه‌گیری کارایی برای یک واحد تولیدی نمود. با این وجود او در ارائه روشی که در برگیرنده وروی‌ها و خروجی‌های متعدد باشد، موفق نبوده است. چارنز، کوپر و رودز [۴] دیدگاه فارل را توسعه داده و مدلی ارائه نمودند که توانایی اندازه‌گیری کارایی با چندین ورودی و خروجی را داشت. این مدل تحت عنوان تحلیل پوششی داده‌ها نام گرفت. هدف در این مدل اندازه‌گیری و مقایسه کارایی نسبی واحدهای سازمانی مانند مدارس، بیمارستان‌ها، شعب بانک و... است که دارای چندین ورودی و خروجی شبیه به هم باشند.

در مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها در سنجش واحدهای تصمیم‌گیرنده، معمولاً بیش از یک واحد تصمیم‌گیری کارایی یک را دارد. لذا مقایسه آن‌ها امکان‌پذیر نیست. بنابراین یکی از فعالیت‌هایی که در مطالعات مربوط به تحلیل پوششی داده‌ها انجام می‌شود، ارائه روش‌هایی به منظور رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده است. به‌طور کلی چندین رده از روش‌های رتبه‌بندی DEA وجود دارد. در این مقاله به چهار رده مهم از رتبه‌بندی DEA اشاره می‌کنیم.

اولین رده رتبه‌بندی DEA، روش کارایی متقاطع است که توسط سکستون [۱۳] ارائه شده است. در این روش از مدل مضربی DEA بازده به مقیاس ثابت استفاده می‌شود و مقدار کارایی متقاطع هر DMU نه تنها با استفاده از مضرب‌های بهینه آن DMU بلکه با کمک مضرب‌های بهینه دیگر DMU ها به‌دست می‌آید. در سال ۲۰۱۸ فنگ لی و همکاران [۱۴] یک مدل ترکیبی از کارایی متقاطع و تئوری بازی همکارانه را ارائه دادند که بتواند یک جواب منحصر به فرد ارائه دهد.

رده دیگر رتبه‌بندی DEA، روش رتبه‌بندی مبتنی بر مجموعه مشترک وزن‌ها برای تمام DMU ها است که برای رتبه‌بندی تمام DMU ها به کار می‌رود. در این روش از مدل مضربی DEA بازده به مقیاس ثابت و متغیر استفاده می‌شود و معیارهای مختلفی را می‌توان برای انتخاب مجموعه مشترک وزن‌ها استفاده کرد. در سال ۲۰۱۸ سید حسین رضوی و همکاران [۱۵] یک روش فازی برای پیدا کردن مجموعه وزن‌های بهینه ارائه دادند.

رده دیگر رتبه‌بندی DEA، روش رتبه‌بندی مبتنی بر ابرکارایی است که توسط اندرسن و پیترسن [۱۶] ارائه شده است و برای رتبه‌بندی DMU های کارا به کار می‌رود. در این روش یک DMU کارا از مجموعه DMU ها

حذف می‌شود و مقدار ابرکارایی آن DMU کارا حذف شده اندازه‌گیری می‌شود که معمولاً عددی بزرگتر از یک است. در سال ۲۰۱۶ لونگ گو و همکاران [۱۷] یک مدل ترکیبی ارائه دادند که مقدار کارایی واحدهای ناکارا و مقدار ابرکارایی واحدهای کارا را به دست می‌دهد.

آخرین رده رتبه‌بندی DEA، روش رتبه‌بندی مبتنی بر Cross-influence [۲، ۱] است که این روش مشابه روش ابرکارایی است با این تفاوت که در آن یک زیرمجموعه‌ای از DMU های کارا از مجموعه DMU ها حذف می‌شوند و تاثیر حذف DMU های کارا حذف شده در تمام DMU ها اندازه‌گیری می‌شود. در طرح پیشنهادی ما، یک زیرمجموعه معینی از DMU های کارا حذف می‌شوند و سپس تاثیر حذف DMU های کارا حذف شده در تمام DMU ها اندازه‌گیری می‌شود. جدول ۱ تعدادی از مقاله‌های مربوط به این چهار رده را نشان می‌دهد.

جدول ۱. مقاله‌های متناظر در چهار رده رتبه‌بندی ذکر شده

عنوان مقاله‌ها	مقاله‌ها
Secondary goals (aggressive /benevolent formulation)	Doyle and Green (1994) [۱۸]
Secondary goal (neutral formulation)	Wang and Chin (2010a) [۱۹]
Compute ranking intervals; mixed-integer non-linear program	Alcaraz, Ramón, Ruiz, and Sirvent (2013) [۲۰]
Min convex combination of max and sum of deviations w.r.t. DEA efficiencies	Despotis (2002) [۲۱]
Max efficiency subject to efficiency of ideal/anti-ideal DMU equal to unity	Sun, Wu, and Guo (2013) [۲۲]
Min sum of distances to closest targets in common best practice frontier; compute ranking intervals	Ruiz and Sirvent (2016) [۲۳]
Ranking efficient decision making units in data envelopment analysis based on reference frontier share	Rezaeiani and Foroughi (2018) [۲۴]
Non-oriented Tecbycheff norm model	Rezai Balf, Zhiani Rezai, Jahanshahloo, and Hosseinzadeh Lofti (2012) [۲۵]
Ranking DMUs by using the upper and lower bounds of the normalized efficiency in data envelopment analysis	Liua and Wanga (2018) [۲۶]
Impact of efficient DMUs on the inefficient DMUs plus impact of efficient DMUs on the impact of the other efficient DMUs	Du, Liang, Yang, Bi, and Yu (2010) [۲۷]

یکی از روش‌های رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا، رتبه‌بندی مبتنی بر نظریه بازی‌ها است که یک روش ترکیبی از تحلیل پوششی داده‌ها و نظریه بازی‌ها است. در زمینه تلفیق دو روش نظریه بازی‌ها و تحلیل پوششی داده‌ها تحقیقات بی‌شماری انجام شده است: در سال ۲۰۰۶ ناکابایاشی و همکاران [۲۸] پژوهشی تحت عنوان "معمای یک انسان خودخواه، یک بازی" DEA ارائه دادند که دو روش تحلیل پوششی داده‌ها و نظریه بازی‌ها را ترکیب کرده و به بررسی آن پرداختند. آن‌ها اتفاق نظر بین اشخاص و سازمان‌هایی که دارای معیارهای مختلف برای ارزیابی عملکرد خود بودند را با استفاده از نظریه بازی همکارانه حل کردند.

جی و همکاران [۲۹] کارایی متقاطع واحدهای تصمیم گیرنده در تحلیل پوششی داده‌ها را با استفاده از نظریه بازی‌ها تعیین کردند. آن‌ها یک بازی ائتلافی را تعریف کردند که در آن DMUها، بازیکنان این بازی هستند و برای تمام ائتلاف‌ها مقدار توابع مشخصه را تعیین کردند. آن‌ها ارزش هسته‌ای را به عنوان راه حل در نظر گرفتند و از الگوریتم ژنتیک برای به دست آوردن ارزش هسته‌ای و وزن نهایی هر DMU استفاده کردند.

لی و همکاران [۱] یک روش جدیدی به منظور رتبه‌بندی واحدهای تصمیم گیرنده کارا ارائه دادند. آن‌ها با استفاده از نظریه بازی همکارانه، یک زیرمجموعه معینی از واحدهای تصمیم گیرنده کارا را از نمونه حذف نموده و تاثیر حذف آن را روی مقدار کارایی واحدهای کارا اندازه‌گیری کردند. لوزانو و همکاران [۲] یک بازی متفاوت همکارانه مبتنی بر مدل لی ارائه دادند که در آن تاثیر حذف یک زیرمجموعه معینی از واحدهای کارا بر کارایی واحدهای ناکارا اندازه‌گیری شد.

لی و لیانگ [۳۰] در سال ۲۰۱۰ تحقیقی را انجام دادند که به تعیین اهمیت متغیرهای ورودی و خروجی تحلیل پوششی داده‌ها با ابزار نظریه بازی همکارانه پرداختند. علی نژاد و زمانی [۳۱] یک مدل ترکیبی DEA و تئوری بازی ارائه دادند که شاخص‌های کارت امتیازی متوازن را رتبه‌بندی می‌کند.

لوزانو و همکاران [۳۲] یک مدل برنامه‌ریزی خطی در نظر گرفتند که در آن تصمیم گیرندگان با استفاده از یک بازی همکارانه، منابع خود را ادغام و به اشتراک می‌گذارند. آن‌ها با به کارگیری ارزش هسته‌ای و به دست آمدن نتایج انواع ائتلاف در یک برنامه‌ریزی خطی چندهدفه، به حداکثر تولید دست یافتند. پس از مروری بر پژوهش‌های انجام شده در رویکردهای ترکیبی تحلیل پوششی داده‌ها و نظریه بازی‌ها، مدل‌های لی و لوزانو را در نظر می‌گیریم و مدل SBM ورودی محور و ارزش هسته‌ای را به منظور رتبه‌بندی واحدهای تصمیم گیرنده کارا به کار می‌گیریم.

۳ شرح مدل لی و لوزانو

نظریه بازی‌ها علمی است که به مطالعه تصمیم‌گیری افراد در شرایط تعامل با دیگران می‌پردازد. نظریه بازی‌ها به دو شاخه اصلی تقسیم می‌شود بازی‌های همکارانه و بازی‌های بدون همکاری. اساس بازی بدون همکاری بر مبنای رقابت و کسب بیشترین سود در بین بازیکنان است. در بازی بدون همکاری هر بازیکن استراتژی خود را بدون مشورت با بازیکنان دیگر انتخاب می‌کند. در حالی که در بازی همکارانه، بازیکنان درخصوص تصمیم‌گیری درباره استراتژی‌ها با یکدیگر همکاری می‌کنند. به منظور امکان همکاری بین واحدهای تصمیم گیرنده به عنوان بازیکنان در تحلیل پوششی داده‌ها از بازی همکارانه استفاده می‌شود که یک تابع مشخصه قوی برای تعیین نتیجه هر ائتلاف وجود دارد [۳۱، ۳۳، ۲۶].

یک بازی همکارانه، یک زوج مرتب به فرم (N, v) است که N یک مجموعه متناهی بازیکنان است. v یک تابع مشخصه با مقدار حقیقی است که به صورت $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ و $v(\emptyset) = 0$ است. زیرمجموعه S از N را یک ائتلاف می‌نامند. مقدار $v(S)$ ارزش ائتلاف در بازی همکارانه (N, v) را نشان می‌دهد. در بازی همکارانه دو موضوع مطرح است. اول اینکه چه ائتلافی شکل بگیرد. دوم اینکه در صورت شکل‌گیری ائتلاف،

بازیکنان چگونه سود یا هزینه را تقسیم خواهند کرد [۳۱، ۳۳، ۲۶، ۱، ۲]. نمادها و متغیرهای به کار رفته در این مقاله در جدول زیر شرح داده شده است:

جدول ۲. نمادها و متغیرهای به کار رفته

M	مجموعه واحدهای تصمیم‌گیرنده مستقل
N	مجموعه واحدهای کارا
I	مجموعه ورودی‌ها
H	مجموعه خروجی‌ها
S	زیرمجموعه واحدهای کارا N (ائتلاف)
n	تعداد اعضای مجموعه N
s	تعداد اعضای مجموعه S
v	تابع مشخصه
$E_j(M)$	مقدار کارایی DMU_j زمانی که تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا در نمونه حضور دارند
$E_j(M \setminus S)$	مقدار کارایی DMU_j زمانی که واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا متعلق به S در نمونه حضور ندارند
k	واحد کارا متعلق به S
x_{ij}	ورودی i ام یک واحد تصمیم‌گیرنده DMU_j
y_{rj}	خروجی r ام یک واحد تصمیم‌گیرنده DMU_j
$v(S)$	ارزش ائتلاف S
$v(S \cup \{k\})$	ارزش ائتلاف S با در نظر گرفتن واحد کارا k

مدل لی و همکاران یک بازی همکارانه است که در آن واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا، مجموعه بازیکنان هستند و تابع مشخصه برای هر $S \subseteq N$ ، مجموع تغییرات مقدار ابرکارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا در ائتلاف S را نشان می‌دهد. لذا مدل لی یک بازی همکارانه (N, v) است که تابع مشخصه برای هر $S \subseteq N$ به صورت زیر است:

$$v(S) = \sum_{k \in S} (E_k(M \setminus S) - 1) \quad (1)$$

فرض می‌کنیم M مجموعه واحدهای تصمیم‌گیرنده مستقل باشد. برای هر $T \subseteq M$ ، فرض کنید $E_j(T)$ مقدار کارایی CCR ورودی محور یک واحد تصمیم‌گیرنده $DMU_j \in T$ با در نظر گرفتن تنها واحدهای تصمیم‌گیرنده متعلق به T در نمونه باشد.

فرض کنید m واحد تصمیم‌گیرنده مستقل $j \in M = \{1, 2, \dots, m\}$ ، دارای k ورودی $i \in I = \{1, 2, \dots, k\}$ و h خروجی $r \in H = \{1, 2, \dots, h\}$ باشند. در این صورت مقدار کارایی CCR ورودی محور یک $DMU_{j_i} \in M$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
E_j(M) &= \min \theta_j \\
\text{s.t. } \sum_{j \in M} \lambda_j x_{ij} &\leq \theta_j x_{ij}, \quad \forall i \in I \\
\sum_{j \in M} \lambda_j y_{rj} &\geq y_{rj}, \quad \forall r \in H \\
\lambda_j &\geq 0 \quad \forall j \in M \\
\theta_j &\text{ free}
\end{aligned} \tag{۲}$$

مدل لوزانو یک بازی همکارانه متفاوتی است که در آن واحدهای تصمیم گیرنده کارا مجموعه بازیکنان هستند و تابع مشخصه برای هر یک، مجموع تغییرات مقدار کارایی واحدهای تصمیم گیرنده ناکارا $j \in M \setminus N$ در ائتلاف را نشان می دهد.

$$v(S) = \sum_{j \in M \setminus N} (E_j(M \setminus S) - E_j(M)) \tag{۳}$$

همان طور که ملاحظه می کنید در مدل های لی و لوزانو یک بازی همکارانه (N, v) وجود دارد که N مجموعه بازیکنان و v یک تابع مشخصه است. در مدل لی تاثیر حذف زیرمجموعه معینی از واحدهای تصمیم گیرنده کارا بر روی واحدهای کارا اندازه گیری می شود اما در مدل لوزانو تاثیر حذف زیر مجموعه معینی از واحدهای تصمیم گیرنده کارا بر روی واحدهای ناکارا اندازه گیری می شود.

از ارزش شیلی به عنوان راه حل جواب بازی همکارانه (N, v) در مدل های لی و لوزانو استفاده شده است. ارزش شیلی یکی از روش ها در نظریه بازی همکارانه به منظور محاسبه تخصیص عایدی حاصل از همکاری بین بازیکنان ائتلاف است [۲۶، ۲۵، ۲۴]. در مدل های لی و لوزانو، رتبه بندی واحدهای تصمیم گیرنده کارا با کمک ارزش شیلی و مدل CCR انجام می گیرد. بنابراین اهمیت هر واحد تصمیم گیرنده کارا $k \in N$ با معیار زیر محاسبه می شود:

$$\varphi_k(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus k} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S \cup \{k\}) - v(S)) \tag{۴}$$

که n تعداد اعضای مجموعه N و s تعداد اعضای ائتلاف S است. الگوریتم زیر بیانگر حرکت گام به گام مدل های لی و لوزانو به سمت اهمیت واحدهای تصمیم گیرنده کارا است:

ابتدا یک واحد تصمیم گیرنده کارا $k \in N$ را به عنوان یک بازیکن در نظر گرفته و سپس تمام زیرمجموعه های (ائتلاف های) N بدون بازیکن k از S لیست می شوند (به عنوان نمونه در ستون اول جدول ۴، تمامی ائتلاف های ممکن بدون بازیکن A (واحد تصمیم گیرنده A) آورده شده است). مدل CCR، سه مرتبه حل شده و مقادیر کارایی $E_j(M)$ ، $E_j(M \setminus S)$ و $E_j(M \setminus (S \cup \{k\}))$ محاسبه می شوند (به عنوان مثال جدول ۴، مقادیر کارایی گام دوم را نشان می دهد).

مقادیر $v(S)$ و $v(S \cup k)$ با توجه به رابطه تابع مشخصه تعریف شده (۱) و (۳) برای مدل‌های لی و لوزانو محاسبه می‌شود (جدول ۵ را ببینید).

با استفاده از فرمول ارزش شیلی (۴)، مقدار ارزش شیلی و اهمیت بازیکن‌ها در تعیین کارایی مشخص می‌شود (جدول ۶ را ببینید).

مثال ۱. [۲] مجموعه داده‌های مربوط به شش واحد تصمیم‌گیرنده در جدول ۳ آورده شده است که $M = A, B, C, D, E, F$ است. واحدهای تصمیم‌گیرنده دارای دو ورودی و یک خروجی می‌باشند. واحدهای تصمیم‌گیرنده A, B, C, D کارا و E و F واحدهای ناکارا هستند. مجموعه بازیکنان، مجموعه واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا هستند.

جدول ۳. مجموعه داده‌های مربوط به مثال ۱

DMUs $j = 1, 2, \dots, 6$	ورودی‌ها		خروجی
	X_{1j}	X_{2j}	Y_{1j}
A	۱	۸	۱
B	۲	۴	۱
C	۴	۲	۱
D	۸	۱	۱
E	۵	۵	۱
F	۳	۱۰	۱

جدول زیر مقدار کارایی هر واحد تصمیم‌گیرنده را در تمام زیرمجموعه‌های (ائتلاف‌های) ممکن از N بدون بازیکن A را نشان می‌دهد تا اهمیت واحد تصمیم‌گیرنده A حاصل شود ($k = A$).

جدول ۴. مقادیر کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده در تمام زیرمجموعه‌های (ائتلاف‌های) ممکن از N بدون بازیکن A

DMUs		A	B	C	D	E	F
S							
{∅}	$E_j(M)$	۱	۱	۱	۱	۰/۶	۰/۵۴
	$E_j(M \setminus S)$	۱	۱	۱	۱	۰/۶	۰/۵۴
	$E_j(M \setminus (S \cup \{k\}))$	۲	۱	۱	۱	۰/۶	۰/۶۶۶۷
{B}	$E_j(M \setminus S)$	۱	۱/۲۵	۱	۱	۰/۶۶۶۷	۰/۶۲۵
	$E_j(M \setminus (S \cup \{k\}))$	۳	۱/۷	۱	۱	۰/۷۵۵۶	۱
{C}	$E_j(M \setminus S)$	۱	۱	۱/۲۵	۱	۰/۶۶۶۷	۰/۵۴۵۴
	$E_j(M \setminus (S \cup \{k\}))$	۲	۱	۱/۲۵	۱	۰/۶۶۶۷	۰/۶۶۶۷
{D}	$E_j(M \setminus S)$	۱	۱	۱	۲	۰/۶	۰/۵۴۵۴
	$E_j(M \setminus (S \cup \{k\}))$	۲	۱	۱	۲	۰/۶	۰/۶۶۶۷
{B, C}	$E_j(M \setminus S)$	۱	۱/۵	۱/۵	۱	۰/۹	۰/۶۹۲۳۴
	$E_j(M \setminus (S \cup \{k\}))$	۳	۱/۹۴	۱/۵۹	۱	۱	۱

$\{B, D\}$	$E_j(M \setminus S)$	۱	۱/۲۵	۱	۲	۰/۶۶۶۷	۰/۶۲۵
	$E_j(M \setminus (S \cup \{k\}))$	۳	۱/۷	۱	۲	۰/۷۵۵۶	۰/۱
$\{C, D\}$	$E_j(M \setminus S)$	۱	۱	۲	۴	۰/۸	۰/۵۴۵۴
	$E_j(M \setminus (S \cup \{k\}))$	۲	۱	۲	۴	۰/۸	۰/۶۶۶۷
$\{B, C, D\}$	$E_j(M \setminus S)$	۱	۱/۵۹۰۹	۲/۵	۵	۱	۰/۷۱۴۲۹۱
	$E_j(M \setminus (S \cup \{k\}))$	۳	۱/۹۴۴۴	۲/۵	۵	۱	۱

ستون‌های سوم تا ششم جدول ۴، مقادیر ابرکارایی واحدهای کارا را با توجه به مدل لی برای هر ائتلاف S و ستون‌های هفتم و هشتم جدول ۴، مقدار کارایی واحدهای ناکارا را با توجه به مدل لوزانو برای هر ائتلاف S را نشان می‌دهند. جدول زیر مقادیر تابع مشخصه $v(S)$ و $v(S \cup \{k\})$ مربوط به تابع مشخصه تعریف شده مدل لی و لوزانو را نشان می‌دهد ($k = A$).

جدول ۵. تابع مشخصه برای هر ائتلاف S مدل لی و لوزانو

S	روش لی			روش لوزانو		
	$v(S)$	$v(S \cup \{k\})$	$v(S \cup \{k\}) - v(S)$	$v(S)$	$v(S \cup \{k\})$	$v(S \cup \{k\}) - v(S)$
$\emptyset$	۰	۱	۱	۰	۰/۱۲۱۲۱۲	۰/۱۲۱۲۱۲
$\{B\}$	۲/۵	۲/۷	۲/۴۵	۰/۱۴۶۲۱	۰/۶۱۰۱	۰/۴۶۳۸۹
$\{C\}$	۰/۲۵	۱/۲۵	۱	۰/۰۶۶۶	۰/۱۸۸۸۷	۰/۱۲۱۷۷
$\{D\}$	۱	۲	۱	۰	۰/۱۲۱۲۱۲	۰/۱۲۱۲۱۲
$\{B, C\}$	۱	۳/۵۳	۲/۵۳	۰/۴۴۶۸۴	۰/۸۵۴۵۴۵	۰/۴۰۷۷
$\{B, D\}$	۱/۲۵	۳/۷	۲/۴۵	۰/۱۴۶۲۱	۰/۶۱۰۱	۰/۴۶۳۸۹
$\{C, D\}$	۴	۵	۰	۰/۲	۰/۳۲۱۲۱	۰/۱۲۱۲۱۲
$\{B, C, D\}$	۶/۰۹	۸/۴۴۴۴	۲/۳۵۴	۰/۵۶۸۸	۰/۸۵۴۵۵	۰/۱۲۱۲۱۲

پس از اجرای الگوریتم ذکر شده بالا برای هر واحد تصمیم گیرنده کارای DMU_k ، ارزش شیلی و رتبه‌بندی هر بازیکن k با توجه به تعریف مدل‌های لی و لوزانو به شرح جدول زیر آمده است.

جدول ۶. ارزش شیلی و رتبه‌بندی هر DMU کارا

واحدهای کارا	روش لی		روش لوزانو	
	ارزش شیلی	رتبه‌بندی	ارزش شیلی	رتبه‌بندی
A	۱/۶۲۴۶	۴	۰/۲۴۳۳۲۰	۲
B	۱/۹۰۴۹	۳	۰/۳۸۱۵۲۶	۱
C	۲/۲۲۱۶۳۳	۲	۰/۱۹۷۳۰۹	۳
D	۲/۲۹۳۱۸۱۸۲	۱	۰/۰۳۲۳۸۸	۴

۴ تحقیق پیشنهادی

ارزش‌ها در نظریه بازی همکارانه، تخصیص عایدی حاصل از همکاری بین بازیکنان گروه را محاسبه می‌کند. یکی از روش‌های محاسبه تخصیص عایدی در یک بازی همکارانه، ارزش هسته‌ای است که برای به‌دست آوردن جواب یکتای معادلات در ناحیه مرکز به کار می‌رود [۲۹، ۲۸]. ناحیه مرکز به صورت زیر است:

$$C = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ and } \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \text{ for } \forall S \subset N\} \quad (5)$$

$v(N)$ ارزش ائتلاف N را نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم بردار $x = (x_1, \dots, x_n)$ سهم اختصاص یافته به هر بازیکن باشد که در آن n تعداد بازیکنان است. قید اول، یک قید عقلانیت گروهی است که تقسیم عایدی حاصل از بازی همکارانه میان اعضای ائتلاف N است. قید دوم ناحیه مرکز، یک قید عقلانیت فردی است که براساس آن پیامد حاصل از پیوستن فرد به ائتلاف نباید کمتر از پیامد حاصل از فعالیت فردی باشد. ارزش هسته‌ای بر اختلاف بین $v(S)$ و $\sum_{i \in S} x_i$ متمرکز است و هدف آن کاهش نارضایتی از مشارکت در هر ائتلاف تا حد امکان است. ارزش هسته‌ای، یک مساله برنامه‌ریزی خطی است که به حداقل سازی نارضایتی‌ها می‌پردازد [۲۹، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴ و ۳۵]:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \varepsilon \\ \text{s.t.} \quad & v(S) - \sum_{i \in S} x_i \leq \varepsilon \text{ for } \forall S \subset N, S \neq \emptyset \\ & \sum_{i \in N} x_i = v(N) \\ & \varepsilon \in \mathbb{R}, x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in N \end{aligned} \quad (6)$$

برای محاسبه ارزش شیلی و هسته‌ای باید مقادیر تابع مشخصه v را داشته باشیم. لذا در یک مساله بازی همکارانه N - نفره نیاز به محاسبه 2^{N-1} تابع مشخصه $v(S)$ به عنوان ورودی‌های مساله ارزش شیلی و هسته‌ای داریم. ارزش هسته‌ای یک روندی از مرتبه $O(N^2)$ و ارزش شیلی یک روندی از مرتبه $O(N)$ است [۷]. یعنی در ارزش هسته‌ای با N برابر شدن تعداد واحدهای کارا، میزان کار لازم N^2 برابر و در ارزش شیلی با N برابر شدن تعداد واحدهای کارا، میزان کار لازم N برابر می‌شود. بنابراین محاسبه ارزش شیلی خیلی ساده‌تر از ارزش هسته‌ای است. از طرفی ارزش هسته‌ای یک مدل برنامه‌ریزی خطی است که بر اختلاف بین $v(S)$ و $\sum_{i \in S} x_i$ متمرکز است و تا حد امکان نارضایتی از مشارکت در هر ائتلاف را مینیمم می‌کند. لذا جواب بهتری نسبت به ارزش شیلی ارائه می‌دهد.

در این مقاله از پیچیدگی محاسباتی این دو ارزش شیلی و هسته‌ای صرف نظر می‌کنیم و تنها روی رتبه‌بندی به‌دست آمده از طرح پیشنهادی و روش‌های لی و لوزانو تمرکز می‌کنیم. در تحقیق پیشنهادی، در هر یک از

مدل‌های لی و لوزانو از مدل SBM ورودی محور به جای مدل CCR ورودی محور از ارزش هسته‌ای به جای ارزش شیلی به عنوان راه حل بازی همکارانه استفاده می‌کنیم. ایده اصلی این است که تاثیر حذف یک زیرمجموعه از واحدهای کارا روی واحدهای کارا و ناکارا را با کمک ارزش هسته‌ای و مدل غیرشعاعی SBM ورودی محور بررسی کنیم.

فرض کنید m واحد تصمیم گیرنده مستقل $j \in M = \{1, 2, \dots, m\}$ دارای k ورودی $i \in I = \{1, 2, \dots, k\}$ و h خروجی $r \in H = \{1, 2, \dots, h\}$ باشند. در این صورت مقدار کارایی SBM ورودی محور یک $DMU_j \in M$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 E_j(M) = \min \quad & 1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{S_i^-}{x_{ij}} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in M} \lambda_j x_{ij} + S_i^- = x_{ij}, \quad \forall i \in I \\
 & \sum_{j \in M} \lambda_j y_{rj} \geq y_{rj}, \quad \forall r \in H \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad \forall j \in M \\
 & S_i^- \geq 0, \quad \forall i \in I
 \end{aligned} \tag{V}$$

فرض می‌کنیم M مجموعه واحدهای تصمیم گیرنده مستقل باشد. برای هر $T \subseteq M$ ، فرض کنید $E_j(T)$ مقدار کارایی SBM ورودی محور یک واحد تصمیم گیرنده $DMU_j \in T$ با در نظر گرفتن تنها واحدهای تصمیم گیرنده متعلق به T در نمونه باشد.

الگوریتم زیر بیان گر حرکت گام به گام تحقیق پیشنهادی ما به سمت اهمیت واحدهای تصمیم گیرنده کارا است: تمام زیرمجموعه‌های (ائتلاف‌های) ممکن از مجموعه بازیکنان N لیست می‌شوند (به مثال یک بر می‌گردیم، در جدول ۷ تمامی ائتلاف‌های ممکن از مجموعه بازیکنان آورده شده است).

مدل ورودی محور SBM ، دو مرتبه حل شده و مقادیر کارایی $E_j(M)$ و $E_j(M \setminus S)$ محاسبه می‌شود (به عنوان مثال در جدول ۷، مقادیر کارایی گام دوم برای هر ائتلاف ممکن از مجموعه بازیکنان را نشان می‌دهد).

مقادیر $v(S)$ با توجه به تعریف تابع مشخصه مربوط به مدل لی و لوزانو محاسبه می‌شوند (جدول ۸ را ببینید). با استفاده از مدل برنامه‌ریزی خطی (۶) ارزش هسته‌ای و اهمیت بازیکن‌ها در تعیین کارایی مشخص می‌شود (جدول ۹ را ببینید)

جدول ۷. مقادیر کارایی گام دوم برای هر ائتلاف ممکن از مجموعه بازیکنان

S	DMU_j	A	B	C	D	E	F
$\emptyset$	$E_j(M)$	۱	۱	۱	۱	۰/۶	۰/۵۳۳۳۳
	$E_j(M \setminus S)$	۱	۱	۱	۱	۰/۶	۰/۵۳۳۳۳
$\{A\}$	$E_j(M \setminus S)$	۱/۵	۱	۱	۱	۰/۶	۰/۵۳۳۳۳
$\{B\}$	$E_j(M \setminus S)$	۱	۱/۲۵	۱	۱	۰/۶	۰/۵۶۶۶۶
$\{C\}$	$E_j(M \setminus S)$	۱	۱	۱/۲۵	۱	۰/۶	۰/۵۳۳۳۳
$\{D\}$	$E_j(M \setminus S)$	۱	۱	۱	۱/۲۵	۰/۶	۰/۵۳۳۳۳
$\{A, B\}$	$E_j(M \setminus S)$	۲/۱۲۴۹	۱/۴۳۷۵	۱	۱	۰/۶	۱
$\{A, C\}$	$E_j(M \setminus S)$	۱/۵	۱	۱/۲۵	۱	۰/۶	۱
$\{A, D\}$	$E_j(M \setminus S)$	۱/۵	۱	۱	۱/۵	۰/۶	۰/۵۳۳۳۳
$\{B, C\}$	$E_j(M \setminus S)$	۱	۱/۳۷۵	۱/۳۷۵	۱	۰/۹	۰/۵۶۶۶۶
$\{B, D\}$	$E_j(M \setminus S)$	۱	۱/۲۵	۱	۱/۵	۰/۶	۰/۵۶۶۶۶
$\{C, D\}$	$E_j(M \setminus S)$	۱	۱	۱/۵	۲/۵	۰/۶	۰/۵۳۳۳۳
$\{A, B, C\}$	$E_j(M \setminus S)$	۲/۱۲۵	۱/۸۷۵	۱/۴۰۶۲۵	۱	۱	۱
$\{A, B, D\}$	$E_j(M \setminus S)$	۲/۱۲۴۹	۱/۴۳۷۵	۱	۱/۵	۰/۶	۱
$\{A, C, D\}$	$E_j(M \setminus S)$	۱/۵	۱	۱/۵	۲/۵	۰/۶	۰/۵۳۳۳۳
$\{B, C, D\}$	$E_j(M \setminus S)$	۱	۱/۴۰۶۳	۱/۸۷۵	۳	۱	۰/۵۶۶۶۶
$\{A, B, C, D\}$	$E_j(M \setminus S)$	۲/۱۲۵	۱/۸۷۵	۱/۸۷۵	۳	۱	۱

ستون‌های سوم تا ششم جدول ۷، مقادیر ابرکارایی واحدهای کارا را با توجه به مدل لی برای هر ائتلاف S و ستون‌های هفتم و هشتم جدول ۷، مقدار کارایی واحدهای ناکارا را با توجه به مدل لوزانو برای هر ائتلاف S نشان می‌دهند. جدول زیر، مقادیر تابع مشخصه $v(S)$ مربوط به مدل‌های لی و لوزانو برای هر ائتلاف S را نشان می‌دهد.

جدول ۸. تابع مشخصه $v(S)$ مربوط به مدل‌های لی و لوزانو برای هر ائتلاف S

S	روش لی	روش لوزانو
$\emptyset$	۰	۰
$\{A\}$	۰/۵	۰
$\{B\}$	۰/۲۵	۰/۳۳۳۳
$\{C\}$	۰/۲۵	۰
$\{D\}$	۰/۵	۰
$\{A, B\}$	۱/۵۶۲۴۹۹	۰/۴۶۶۶۶۷
$\{A, C\}$	۰/۷۵	۰
$\{A, D\}$	۱	۰
$\{B, C\}$	۰/۷۵	۰/۳۳۳۳

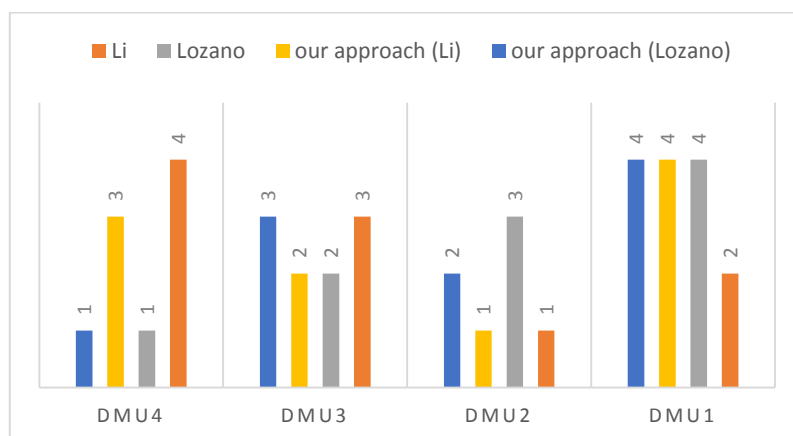
{B, D}	۰/۷۵	۰/۳۳۳۳
{C, D}	۲	۰
{A, B, C}	۲/۴۰۶۲۵	۰/۸۶۶۶۶
{A, B, D}	۲/۰۶۲۴۹	۰/۴۶۶۶۶
{A, C, D}	۲/۵	۰
{B, C, D}	۳/۲۸۱۲۴۹	۰/۴۳۳۳۳
{A, B, C, D}	۴/۸۷۵	۰/۸۶۶۶۶

پس از به کارگیری مدل برنامه ریزی خطی (۶)، ارزش هسته‌ای و رتبه‌بندی هر بازیکن باتوجه به مدل لی و لوزانو به شرح زیر آمده است:

جدول ۹. ارزش هسته‌ای و رتبه‌بندی هر DMU کارا

واحدهای کارا	روش لی		روش لوزانو	
	ارزش هسته‌ای	رتبه‌بندی	ارزش هسته‌ای	رتبه‌بندی
A	۰/۵	۴	۰	۴
B	۱/۰۶۲۴۹	۲	۰/۴۶۶۶۶	۱
C	۰/۸۴۷۳	۳	۰/۴	۲
D	۲/۴۶۸۷	۱	۰	۳

نمودار زیر رتبه (اهمیت) هر DMU کارا در روش‌های لی، لوزانو و طرح پیشنهادی ما را نشان می‌دهد.



شکل ۱. رتبه هر DMU در روش‌های لی، لوزانو و طرح پیشنهادی ما

۵ نتایج عددی

در این بخش، تحقیق پیشنهادی خود را با استفاده از یک مجموعه داده مربوط به بیست شرکت ژاپنی [۲] در سال ۱۹۹۹ بررسی می‌کنیم. این شرکت‌ها دارای سه ورودی و یک خروجی هستند. در ارزیابی این شرکت‌ها، ۵ شرکت دارای مقدار کارایی یک هستند بنابراین ۵ واحد ۱، ۲، ۶، ۸ و ۱۸ کارا هستند. رتبه‌بندی طرح پیشنهادی خود را با رتبه‌بندی به‌دست آمده از مدل‌های لی و لوزانو و روش چن مقایسه می‌کنیم. چن مدلی به منظور حل نشدنی بودن مساله ابرکارایی ارایه داد که مقادیر کارایی در آن به کمک مدل BCC به‌دست می‌آید. لازم به ذکر است نرم افزار استفاده شده در این مقاله MATLAB 2017 می‌باشد.

جدول ۱۰. یک مجموعه داده مربوط به بیست شرکت ژاپنی

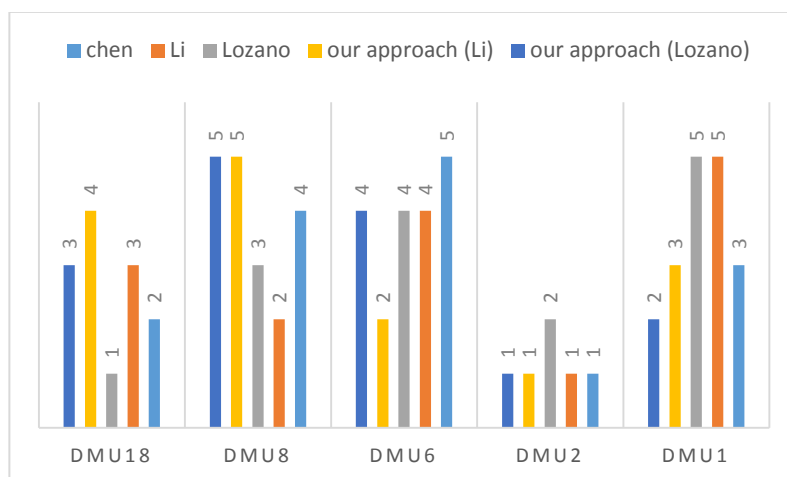
واحد‌های تصمیم‌گیرنده DMU _j	ورودی‌ها			خروجی
	X_{1j}	X_{2j}	X_{3j}	Y_{1j}
۱	۵۰۹۰۵/۳	۵۱۳۷/۹	۴۰۰۰	۱۰۶۷۹۳/۲
۲	۵۱۴۳۲/۵	۲۳۳۳/۸	۵۷۷۵	۱۰۶۱۸۴/۱
۳	۶۷۵۵۳/۲	۷۲۵۳/۲	۳۶۰۰	۱۰۴۶۵۶/۳
۴	۱۱۲۶۹۸/۱	۴۷۱۷۷	۱۸۳۸۷۹	۹۷۳۸۷/۶
۵	۴۹۷۴۲/۹	۲۷۰۴/۳	۵۸۴۴	۹۱۳۶۱/۷
۶	۴۱۱۶۸/۴	۴۳۵۱/۵	۳۰۷۰	۸۶۹۲۱
۷	۱۳۳۰۰۸/۸	۴۷۴۶۷/۱	۱۳۸۱۵۰	۷۴۳۲۳/۴
۸	۳۵۵۸۱/۹	۱۲۷۴/۴	۱۹۴۶۱	۶۶۱۴۴
۹	۷۳۹۱۷	۲۱۹۱۴/۲	۳۲۸۳۵۱	۶۰۹۳۷/۹
۱۰	۶۰۶۳۹	۲۶۹۸۸/۴	۲۸۲۱۵۳	۵۸۳۶۱/۶
۱۱	۴۸۱۱۷/۴	۱۳۹۳۰/۷	۱۷۷۰۰۰	۵۱۹۰۳
۱۲	۵۲۸۴۲/۱	۹۵۸۳/۶	۳۹۴۶۷	۵۰۲۶۳/۵
۱۳	۳۸۴۵۵/۸	۱۳۴۷۳/۸	۱۱۲۲۰۰	۴۷۵۹۷/۹
۱۴	۴۶۰۱۳	۸۰۲۳/۳	۱۹۸۰۰	۴۰۴۹۲/۷
۱۵	۳۹۰۵۲/۲	۹۵۸۳/۶	۱۸۸۰۰۰	۴۰۰۵۰/۳
۱۶	۱۱۰۰۵۵/۸	۱۲۱۵۷/۷	۵۰۵۵۸	۳۸۸۶۹/۵
۱۷	۳۸۰۱۵	۶۵۱۷/۴	۱۵۷۷۷۳	۳۶۳۵۶/۴
۱۸	۱۶۶۹۶	۶۷۶/۱	۳۶۵۴	۳۰۲۰۵/۳
۱۹	۱۷۰۲۳/۶	۱۰۸۱۶/۶	۳۱۰۰۰	۲۹۶۱۲/۲
۲۰	۳۱۹۹۷	۴۱۲۹/۶	۱۱۶۴۷۹	۲۸۹۸۲/۲

جدول زیر رتبه‌بندی روش‌های لی، لوزانو، چن و روش مطرح شده را نشان می‌دهد. همچنین مقدار ارزش هسته‌ای طرح پیشنهادی را نشان می‌دهد.

جدول ۱۱. رتبه‌بندی روش مطرح شده و روش‌های لی، لوزانو و چن

واحد‌های کارا	رتبه‌بندی روش چن	رتبه‌بندی روش لی	رتبه‌بندی روش لوزانو	طرح پیشنهادی روش لوزانو	روش لی	طرح پیشنهادی روش لوزانو	رتبه‌بندی طرح پیشنهادی
DMU _۱	۳	۵	۵	۰/۸۵۴۳۲۵	۱/۵۴۸۳۹۷	۳	۲
DMU _۲	۱	۱	۲	۰/۸۵۴۳۲۵	۱/۸۵۴۲۸۱	۱	۱
DMU _۶	۵	۴	۴	۰/۸۳۲۶۴۷	۰/۹۸۴۵۶۲۱	۲	۴
DMU _۸	۴	۲	۳	۰/۲۱۵۴۳۸	۰/۸۷۵۴۶۱۲	۵	۵
DMU _{۱۸}	۲	۳	۱	۰/۵۵۴۷۶۳	۱/۱۵۷۹۳۵۱	۴	۳

شکل زیر نمودار رتبه هر DMU کارا در هر یک از روش‌های لی، لوزانو، چن و طرح پیشنهادی را نشان می‌دهد.



شکل ۲. رتبه هر DMU در روش‌های لی، لوزانو، چن و طرح پیشنهادی ما

با توجه به نتایج به‌دست آمده از مثال‌های مطرح شده در این مقاله و برتری مدل SBM و ارزش هسته‌ای نسبت به مدل CCR و ارزش شیلی، طرح پیشنهادی می‌تواند یک رتبه‌بندی قابل قبولی از واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا را بدهد.

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش جدید مبنی بر نظریه بازی همکارانه مدل لی و لوزانو [۲، ۱] به منظور رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا ارائه شده است. در این روش از مدل غیرشعاعی ورودی محور SBM به منظور محاسبه مقادیر کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده و از ارزش هسته‌ای به منظور رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا استفاده شده است.

مدل لی و لوزانو یک مدل ترکیبی از تحلیل پوششی داده‌ها و نظریه بازی‌ها است. مجموعه بازیکنان، در هر دو مدل لی و لوزانو مجموعه واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا هستند. تابع مشخصه در مدل لی، تغییرات مقدار

کارایی واحدهای کارا را پس از حذف یک زیرمجموعه‌ای از واحدهای کارا اندازه‌گیری می‌کند. تابع مشخصه در مدل لوزانو، تغییرات مقدار کارایی واحدهای ناکارا را پس از حذف یک زیرمجموعه‌ای از واحدهای کارا اندازه‌گیری می‌کند. در هر دو مدل لی و لوزانو از مدل ورودی محور CCR و ارزش شیلی برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا استفاده شده است.

در یک بازی همکارانه N -نفره، پیچیدگی محاسباتی ارزش شیلی از مرتبه $O(N)$ و ارزش هسته‌ای از مرتبه $O(N^2)$ است که محاسبه ارزش شیلی خیلی ساده‌تر از ارزش هسته‌ای است. از طرفی ارزش هسته‌ای یک مدل برنامه‌ریزی خطی است که تا حد امکان نارضایتی از مشارکت در هر ائتلاف را مینیمم می‌کند. لذا جواب بهتری نسبت به ارزش شیلی ارائه می‌دهد. در این مقاله از پیچیدگی محاسباتی دو ارزش شیلی و هسته‌ای چشم‌پوشی و تنها روی ترتیب رتبه‌بندی واحدهای کارا به‌دست آمده تمرکز کردیم.

این تحقیق برای دو مجموعه داده‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفت و نتایج به‌دست آمده از این روش با نتایج به‌دست آمده از روش لی و همکاران و روش لوزانو و همکاران مقایسه شد. مدل‌های CCR و SBM نسبت به تغییر واحد پایدار هستند اما این مدل‌ها نسبت به انتقال پایدار نیستند و مدل SBM نسبت به مدل CCR در ارائه معیارهای مناسب‌تر کارایی به ویژه برای واحدهای کارای ضعیف برتری دارد. از طرفی مدل ارزش هسته‌ای همواره شدنی و دارای جواب منحصر به فرد است. بنابراین روش پیشنهادی مطرح شده در این مقاله می‌تواند یک رتبه‌بندی قابل قبولی از واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا را نتیجه دهد. باتوجه به نتایج و یافته‌های این تحقیق و مواردی که مورد بررسی قرار گرفت، می‌توان استفاده از روش‌های بازی همکارانه غیرائتلافی مانند چانه‌زنی را به عنوان پیشنهادی برای پژوهش‌های آتی مدنظر قرار داد.

منابع

- [۳۱] علی نژاد، علیرضا، زمانی، سیدرضا، (۱۳۹۵). ارائه رویکردی ترکیبی از تحلیل پوششی داده‌ها و نظریه بازی‌ها به منظور رتبه‌بندی میزان تاثیرگذاری شاخص‌های کارت امتیازی متوازن در سنجش کارایی سازمان. فصلنامه علمی - پژوهشی مطالعات مدیریت صنعتی، ۱۴ (۴۱)، ۲۱۵-۱۸۹.
- [۶] ظرافت انگیز لنگرودی، مجید، داودی، سید محمود، (۱۳۹۱). رتبه‌بندی ورودی‌ها در تحلیل پوششی داده‌ها با استفاده از رأی‌گیری ترجیحی. مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن، ۹ (۲)، ۱۲۰-۱۰۱.
- [۳۳] عبدلی، ق، ۱۳۹۰، نظریه بازی‌ها و کاربردهای آن، انتشارات جهاد دانشگاهی تهران، تهران.
- [1] Li, Y., Xie, J., Wang, M., & Liang, L., (2016). Super-efficiency evaluation using a common platform on a cooperative game. *European Journal of Operational Research*, 884-892.
- [2] Hinojosa, M.A., Lozano, S., Borrero, D.V., Mármol, A.M., (2017). Ranking efficient DMUs using cooperative game theory. *Expert Systems With Applications*, 80 (2017) 273-283.
- [3] Farrell, M. j., (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society Series A* 120(3), 253-290.
- [4] Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E., (1978). Measuring the efficiency of the decision making units, *European Journal of Operational Research* 2 (6), 429-444.
- [5] Adler, N. Friedman, L. Sinuanny-Stren, Z. (2002). Review of ranking methods in the envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 140, 249-265.
- [7] Megiddo, N., (1978). Computational complexity of the Game Theory approach to cost allocation for a tree. *Mathematics of Operations Research*, 3, 3.

- [8] Cooper, W. W., Seiford, L. M., and Tone, K. (2000). Data envelopment analysis: a comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver Software. 2nd ed. New York: Springer.
- [9] Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Tone, K. (2006). Introduction to data envelopment analysis and its uses: with DEA-solver software and references. Springer Science & Business Media.
- [10] Kumar, S., & Gulati, R. (2014). Deregulation and efficiency of Indian banks. New Delhi: Springer India.
- [11] Färe, R., & Knox Lovell, C. A. (1978). Measuring the technical efficiency of production. *Journal of Economic Theory*, 19, 150-162.
- [12] Lovell, C. A. K., & Pastor, J. T. (1995). Units invariant and translation invariant DEA models. *Operations Research Letters*, 18, 147-151.
- [13] Sexton, T.R., Silkman, R.H., Hogan, A.J., 1986. Data envelopment analysis: Critique and extensions. In: Silkman, R.H. (Ed.), *Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis*. Jossey-Bass, San Francisco, CA, pp. 73-105.
- [14] Feng, L., Qingyuan, Z., & Liang, L., (2018). Allocating a fixed cost based on a DEA-game cross efficiency approach. *Expert Systems With Applications* 96, 196-207.
- [15] Razavi Hajiagha, S.H., Amoozad Mahdiraji, H., Tavanac, M., Hashemie, S. S, (2018). A novel common set of weights method for multi-period efficiency measurement using mean-variance criteria. *Measurement* 129, 569-581.
- [16] Andersen, P., Petersen, N.C., 1993. A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management Science* 39 (10), 1261-1294.
- [17] Guo, L., Lee, H.S., Lee, L., (2016). An integrated model for slack-based measure of super-efficiency in additive DEA. *Omega*, 305-483.
- [18] Doyle, J. , & Green, R. (1994). Efficiency and cross-efficiency in DEA: Derivations, meanings and uses. *Journal of the Operational Research Society*, 45 , 567-578.
- [19] Wang, Y. M. , & Chin, K. S. (2010a). A neutral DEA model for cross-efficiency evaluation and its extension. *Expert Systems with Applications*, 37, 3666-3675.
- [20] Alcaraz, J. , Ramón, N. , Ruiz, J. L. , & Sirvent, I. (2013). Ranking ranges in cross-efficiency evaluations. *European Journal of Operational Research*, 226, 516-521.
- [21] Despotis, D. K. (2002). Improving the discriminating power of DEA: Focus on globally efficient units. *Journal of the Operational Research Society*, 53 , 314-323.
- [22] Sun, J., Wu, J., & Guo, D. (2013). Performance ranking of units considering ideal and anti-ideal DMU with common weights. *Applied Mathematical Modelling*, 37, 6301-6310 .
- [23] Ruiz, J. L., & Sirvent, I. (2016). Common benchmarking and ranking of units with DEA. *Omega*, 65, 1-9.
- [24] Rezaeiani, M. J., Foroughi, A.A., (2018). Ranking efficient decision making units in data envelopment analysis based on reference frontier share. *European Journal of Operational Research* 264, 665-674
- [25] Rezai Balf, F., Zhiani Rezai, H., Jahanshahloo, G. R. , & Hosseinzadeh Lofti, F. (2012). Ranking efficient DMUs using the tcbebycheffnorm. *Applied Mathematical Modelling*, 36 , 46-56.
- [26] Liua, W., Wang, Y.M, (2018). Ranking DMUs by using the upper and lower bounds of the normalized efficiency in data envelopment analysis. *Computers & Industrial Engineering* 125, 135-143.
- [27] Du, J., Liang, L., Yang, F., Bi, G. B. , & Yu, X. B. (2010). A new DEA-based method for fully ranking all decision-making units. *Expert Systems*, 27 (5), 363-373.
- [28] Nakabayashi, K., Tone, K., (2006). Egoist's dilemma: a DEA game, *Omega* 34, 135-148.
- [29] Jie, W., Liang, L., Ying, Z., (2008). Determination of the weights of ultimate cross efficiency based on the solution of nucleolus in cooperative game, *systems engineering - Theory & Practice* 28(5), 92-97.
- [30] Li, Y., Liang, L., (2010). A Shapley value index on the importance of variables in DEA models, *Expert systems with Applications*, 37, 6287-6292.
- [32] Lozano, S., Hinojosa, M., Mármol, A., (2015). Set-valued DEA production games, *Omega*, 52, 92-100.
- [34] Rouse, P., Putterill, M., Ryan, D., (2002). Integrated performance measurement design: insights from an application in aircraft maintenance, *Management Accounting Research* 13, 229-248.
- [35] Harison, G. W. and J. A. List (2004). Field Experiments, *Journal of Economic Literature*, 42(4).