مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال بیستم، شماره چهارم (پیاپی ۷۹)،زمستان ۰۲، ص ص۱۶۷-۱۴۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱
(مروری)

ارزیابی غیرپارامتری صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت: مطالعه مروری

سهراب کردرستمی[۱]، منیره جهانی صیادنوبری[۲*]، حمیرا امیرمحمدی[۳]
۱- استاد، گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران
۲-دکتری، گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران
۳-استادیار، گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

رسید مقاله: ۱۸ آبان ۱۳۹۹
پذیرش مقاله: ۱۵ فروردین ۱۴۰۰

چکیده
صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت زمانی وجود دارد که هزینه‌های تولید توام چندین کالا و قسمت کمتر از تولید آنها به طور جداگانه باشد که این مفهوم در ارزیابی عملکرد بانک‌ها، بیمارستان‌ها، دانشگاه‌ها و .. از اهمیت به‌سزایی برخوردار است. به طور کلی صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت برای ارزیابی کارایی سازمان‌های چندمحصولی با اهمیت است. در این تحقیق پس از تعریف دقیق صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت مروری بر چندین روش غیرپارامتری حاضر برای بررسی مفهوم صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت می‌شود. در واقع روش‌های مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌های موجود به منظور مطالعه صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت ارایه می‌شود.

کلمات کلیدی: صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت، تحلیل پوششی داده‌ها، واحدهای چندمحصولی، کارایی.

۱ مقدمه
صرفه‌جویی های واحدهای چند محصولی در تئوری تولید و کسب و کار با اهمیت است. واحدهای چند محصولی، سازمان‌هایی هستند که چندین محصول را تولید می‌کنند و بنابراین باید تخصیص منابع به طور مناسب‌تر را به منظور دستیابی به سطوح تولید بالاتر رسیدگی کنند.

پانزر و ویلینگ [۱] و بامول و همکاران [۲] مفهومی از صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت را با اندازه‌گیری مزایا (برحسب کاهش هزینه) برای یک واحد به منظور تولید بیش از یک محصول پیشنهاد کردند. فار [۳،۴] روش بامول و همکاران [۲] را به منظور استفاده با تحلیل پوششی داده‌ها توسعه دادند و سپس گروسکوف و یاساورنگ [۵] به‌کارگیری تحلیل پوششی داده‌ها را برای نماینده‌های خدمات عمومی تعدیل دادند به منظور تعیین زمانی که برخی از نمایندگان مجزا با ارایه این خدمات ممکن است به طور سودمند تلفیق شوند. پریور [۶] به ارزیابی سطح کارایی فنی و صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت در بیمارستان‌ها پرداختند. کن و ین [۷] به اندازه‌گیری

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: monirehjahani@yahoo.com

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]
[DOI: 10.22034/20.4.149]

صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت برای سیستم‌های ایجاد دو نوع انرژی (گرما و برق) از یک نوع سوخت (تولید ترکیبی) در کره پرداختند. موریتا[1] [۸] با مقایسه مرزهای کارا به سنجش صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت پرداختند. هاجرگشت و همکاران [۹] یک شاخص مبتنی بر مشتق صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت با بهره‌گیری دوالیتی بین تابع هزینه سایه و تابع فاصله ورودی به دست آوردند. فار و کاراگینس[2] [۱۰] نشان دادند که شرط لازم و کافی برای صرفه‌جویی های وسعت این است که کارایی فنی فرایندتولید مشترک کمتر یا مساوی با مجموع موزون کارایی‌های فنی فعالیت‌های منحصربه فرد باشد. چاواز[3] و همکاران [۱۱] با تمرکز بر تجزیه صرفه-جویی‌های ناشی از وسعت به تحلیل اقتصادی صرفه‌جویی‌های وسعت در دانشگاه‌های امریکا پرداختند. آنها در بررسی خود از روش غیرپارامتری تحلیل پوششی داده‌ها استفاده کردند. شاو و تن[4] [۱۲] به سنجش صرفه‌جویی-هایی ناشی از مقیاس و وسعت در محیط غیررقابتی با عدم قطعیت قیمت پرداختند. دو مدل هزینه تحلیل پوششی داده‌ها با توجه به عدم تقسیم‌پذیری فرایند ناشی از فرایندهای تولیدی خاص از واحدچند محصولی یکی بر اساس مجموعه تکنولوژی مبتنی بر فاکتور و دیگری بر پایه مجموعه تکنولوژی مبتنی بر هزینه ارایه شد.

صرفه‌جویی‌هایی ناشی از مقیاس و وسعت هر دو مفاهیمی از علم اقتصاد هستند و هر دو برای کسب و کاری که می‌خواهد ترقی کند و خدمات بهتر به مشتریان ارایه دهد بسیار مفید است. صرفه‌جویی‌های ناشی از مقیاس زمانی رخ می‌دهد که یک کمپانی به یک مرحله‌ای از تولید می‌رسد که هزینه تولید دیگر افزایش نمی‌یابد بلکه کاهش می‌یابد که در تولید انبوه رخ می‌دهد. از طرف دیگر صرفه‌جویی‌هایی ناشی از وسعت زمانی رخ می‌دهد که یک کمپانی محصولات متنوعی را تولید می‌کند و با توجه به آن هزینه تولید کاهش می‌یابد. اگرچه هر دو صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت و مقیاس به کاهش هزینه تولید واحد کمک می‌کنند اما آنها اختلاف زیادی دارند.

تفاوت‌های اساسی آنها عبارت است از:

- صرفه‌جویی‌های ناشی از مقیاس در مورد افزایش واحدهای تولید است اما صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت در مورد تنوع تولید است.
- صرفه‌جویی‌های ناشی از مقیاس به یک سازمان کمک می‌کند که هزینه‌های متوسط در هر واحد را در نظر بگیرد و به تدریج مقدار را افزایش می‌دهد تا هزینه‌های متوسط در هر واحد کمینه شود. صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت در حیطه به‌کارگیری زیربنا به منظور کاهش هزینه‌های متوسط در هر واحد است.
- صرفه‌جویی‌های ناشی از مقیاس بر یک نوع محصول تمرکز دارد در حالی که صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت بر محصولات متفاوت تمرکز می‌کنند.

[1] Morita
[2] Färe and Karagiannis
[3] Chavas
[4] Sahoo, B.K. and Tone

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.149]

- صرفه‌جویی‌های ناشی از مقیاس بیشتر به ظرفیت تولید یک محصول وابسته است. صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت بیشتر روی شالوده واحد برای تولید چندین محصول تحت یک سرپرستی وابسته است.

به عنوان مثالی از صرفه‌جویی ناشی از مقیاس می‌توان به تولید حجم عظیمی از یک نوع تلفن اشاره کرد. به علاوه تولید چندین اقلام غذایی با به‌کارگیری منابع یکسان را می‌توان به عنوان نمونه‌ای از صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت برشمرد. از جمله مزایای صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت می‌توان به ۱) ترکیب منعطفی از محصولات و طراحی محصول، ۲) پاسخ سریع به تقاضای بازار، طراحی تولید و نرخ خروجی، ۳) کاهش ضایعات و اتلافات و آموزش کمتر که منتهی به کاهش هزینه می‌شود و ۴) کاهش ریسک اشاره کرد.

به‌کارگیری ظرفیت، مقیاس و وسعت در صنعت بانکداری هند توسط سنگوپتا و شاو[1] [۱۳] بررسی شده است. همچنین رویکردهایی نو بر پایه تحلیل پوششی داده‌ها برای تحلیل آنها ارایه شده‌اند. به علاوه صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت و به کارگیری ظرفیت با استفاده از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها در [۱۴] مطرح شده است. صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت در سیستم‌های تولید دومرحله‌ای توسط زینال‌زاده اهرنجانی و همکاران [۱۵] مورد بررسی قرار گرفته است. ذاکر هرفته و حسین‌زاده سلجوقی [۱۶] اثربخشی هزینه و صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت را در فرایندهای شبکه‌ای دو مرحله‌ای با منابع تقسیمی و منابع بازیابی‌شده از خروجی‌های نامطلوب مورد مطالعه قرار داده‌اند. به علاوه آنها در تحقیق دیگری [۱۷]، مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها را به منظور تخمین صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت و اثربخشی هزینه در حضور داده‌های بازه‌ای تعمیم دادند.

این مقاله با توجه به اهمیت و نقش موثر صرفه‌جویی‌ها در بازار و همچنین تخمین کارایی و ارزیابی عملکرد سازمان‌ها، مفهوم صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت را شرح می‌دهد. به علاوه چندین روش موجود مبتنی بر رویکرد غیرپارامتری تحلیل پوششی‌داده‌ها به منظور اندازه‌گیری صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت مرور می‌شود.

این پژوهش شامل چهار بخش است. در بخش اول مروری بر مقالات و کارهای تحقیقاتی در ادبیات موضوع شد. در بخش دوم مفهوم صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت بیان و تشریح می‌شود. به علاوه به طور مختصر روش تحلیل پوششی داده‌ها شرح داده می‌شود. در بخش ۳ چندین روش مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌های حاضر به منظور رسیدگی صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت مطرح می‌شود. در بخش چهارم نتیجه‌گیری و پیشنهادها بیان می‌شود.

۲ صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت و تحلیل پوششی داده‌ها

۲-۱ صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت

صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت عبارت است از شاخص‌های اقتصادی که تولید همزمان محصولات مختلف را نسبت به تولید آنها به تنهایی ارزان‌تر می‌کند. به عنوان مثال، مک دونالد می‌تواند هر دو همبرگر و سیب‌زمینی

[1] Sengupta and Sahoo

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.149]

سرخ کرده را با هزینه متوسط پایین‌تر از آنچه دو واحد جداگانه برای تولید هر یک از کالاها به طور جداگانه هزینه می‌کنند، تولید کند. دلیل این است که همبرگرهای مک دونالد و سیب زمینی سرخ کرده می‌توانند از ذخیره‌سازی مواد غذایی، امکانات آماده‌سازی و غیره در طول تولید استفاده نمایند.

دو یا چند محصول صرفه‌جویی‌های وسعت را نشان می‌دهند زمانی که هزینه‌های ترکیبی تولید و / یا فروش مقادیر معین از هر یک زمانی که تولید یا فروش آنها به طور مشترک سازمان یافته باشد کمتر از زمانی است که برای هر محصول کاملا جدا باشد. گفته می‌شود که صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت وقتی وجود دارند که هزینه تولید مقدار معینی از دو یا چند محصول متفاوت در زمانی که آنها در یک سازمان تولید می‌شوند کمتر از زمانی است که به طور جداگانه تولید می‌شوند. این مفهوم توسط پانزر و ویلینگ[1] در یک مقاله [۱۸] نامگذاری شد، که بخش مربوطه چندین سال بعد منتشر شد [۱].

کار آنها نشان می‌دهد که در شرایط رقابت کامل حضور صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت برای هزینه‌های سازمانی و تولید منجر به واحدهای چندمحصولی می‌شود. مفهوم اصولی این است که یک ورودی مشترک برای تولید محصولات، به این معنی که بعضی یا همه ورودی برای تولید محصولات دیگر بعد از تولید یک محصول باقی می‌ماند. یک نوع دیگری درباره‌ی قضیه ورودی مشترک این است که یک فرآیند تولید یک محصول جانبی ناخواسته (به عنوان مثال گرما) ایجاد می‌کند، که سپس به عنوان ورودی برای فرایند دیگری در دسترس است. یک نمونه از یک ورودی مشترک برای تولید (به طور گسترده تعریف‌شده) نیروی فروش است که می‌تواند دو محصول را به طور موثرتری در مقایسه با دو سازمان مجزا بفروشد. مثال‌های دیگر چنین ورودی‌هایی می‌تواند فاکتورهای تولید فیزیکی باشد، مانند یک ژنراتور برق با ظرفیتی بیشتر از آن که برای تولید یک محصول واحد موردنیاز باشد یا غیرعینی باشد، مانند دانش فنی تولید یا تصویر علامت تجاری شرکتی. همان‌طور که تیس[2] [۱۹] اشاره کرد، حضور صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت برای تعیین وجود یک شرکت چند محصولی کافی نیست. به طور نظری، تولید مشترک می‌تواند در دو شرکت جداگانه که خدمات ورودی (های) مشترک یا محصولات جانبی را تحت قرارداد به اشتراک می‌گذارند، سازماندهی شود. از سوی دیگر، ممکن است خدماتی از ورودی‌های مشترک توسط یک تامین‌کننده شخص ثالث اجاره شود.

ادغام عمودی شامل یک کمپانی واحد است که دارای مالکیت و کنترل دو یا چند مرحله زنجیره تامین مانند تولید و توزیع، یا قطعات (اجزا) و مونتاژ است. ادغام عمودی زمانی وجود دارد که هر دو مرحله از زنجیره تامین ورودی به انتهای کاربر تحت مالکیت مشترک و کنترل یک سازمان واحد آورده شوند. اغلب، منطق ادغام عمودی عبارت است از جبران عدم وجود یا کمبود قرارداد مبتنی بر بازار است. اقدامات مدیریتی و دستورات درون شرکت عمودی یکپارچه برای دستیابی به هماهنگی لازم به جای قراردادهای بلند مدت استفاده می‌شود.

تنوع‌بخشی عبارت است از فعالیتی از توسعه یک کسب و کار یک واحد به محصول جدید، بازارهای جغرافیایی یا عمودی. تنوع در چندین بعد، از جمله بازار محصولات، بازارهای جغرافیایی و عمودی رخ می‌دهد.

[1] Panzar and Willig
[2] Teece

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.149]

تنوع در بازار محصول زمانی اتفاق می افتد که یک شرکت تصمیم به ارایه محصولات یا خدمات جدیدی می-کند که شامل بخش‌های بازاری می‌شوند به غیر از آنهایی که در حال حاضر در آنها فعال است. فعالیت‌های جدید ممکن است ورودی‌های مشترک با فعالیت‌های موجود را به اشتراک بگذارند یا نگذارند.

حوزه سازمان عبارت است از حیطه فعالیت‌های تقبل‌شده توسط یک واحد و نه از طریق قرارداد با واحدهای مجزا که اغلب به خطوط تولید اشاره می‌شود و نه به تعمیم ادغام عمودی واحد بین یک خط تولید معین. منطق اقتصادی برای توسعه‌ای در یک حوزه شرکت توسط تیس [۱۹] ارایه شد. تیس دریافت که صرفه‌جویی‌هایی از وسعت در بیشتر موارد نمی‌توانند وجود واحدهای چندمحصولی را توضیح دهند زیرا قراردادهای عادی در میان واحدهای تخصصی به طورکلی برای دستگیری همان صرفه‌جویی‌ها به صورت یک واحد چندمحصولی کافی خواهد بود. شرایط زمانی که این برقرار نبود عبارت‌انداز: (۱) جایی که تولید دو یا چندین محصول وابسته به مبنای دانش چگونگی اختصاصی یکسان است و تبادل مجدد خوانده می‌شود، و (۲) زمانی که یک دارایی غیرقابل تقسیم تخصصی یک ورودی مشترک در تولید دو یا چندین محصول است. این تحلیل سپس توسط تیس [۲۰] دوباره بسط یافت، که به عوامل متعددی اشاره کرد که می‌تواند توسعه وسعت سازمان را بدون اشاره به صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت توجیه کند. یک عامل عبارت است از فرصتی برای استفاده از منابع کم‌مصرف برای کار. منابع مفهوم گسترده‌ای است که شامل اقلام ملموس مانند ماشین‌آلات و اقلام غیرمستقیم مانند قابلیت‌های مدیریتی است. برای مثال، خدمات منابع استفاده‌نشده ممکن است از یادگیری رخ دهد که در طول فعالیت‌های مورد نیاز برای خطوط موجود از کسب و کار اتفاق می‌افتد. چون خدمات منابع اغلب در مورد انواع کسب و کارها قابل اجرا هستند، در بعضی موارد واحد می‌تواند آن را سودآور تشخیص دهد برای ورود به بازار جدیدی که بتواند نوعی از خدمات منابع را استفاده کند که در اختیار دارد. این با یک عامل دوم ترکیب می‌شود که مساله (هزینه‌های معامله) خرید و فروش بسیاری از خدمات منابع در یک بازار است. اگر منبع به اندازه کافی تخصصی است، به طوری که تعداد بخش‌هایی که ممکن است علاقه‌مند به اجاره خدمات خود باشند بسیار کم است، و در نتیجه به‌دلیل شرایط نامطلوب در یک قرارداد، ریسک بالا است. به طور کلی بهتر است به جای تعامل با یک شرکت دیگر، واحد استفاده داخلی از خدمات اضافی (به عنوان مثال، توسعه وسعت‌اش) کند. عامل سوم مشکل انتقال دانش است. یک قرارداد برای انتقال دانش فنی اضافی یک واحد به واحدی که مایل به استفاده از آن در بازار محصولات غیررقابتی است، به طور معمول به انتقال یا حداقل قرض‌دادن پرسنلی نیازمند می‌باشد که با جنبه‌های ضمنی این دانش آشنا باشند. این به طور موثر دانش فنی را از یک کالای غیررقابتی به یک کالای رقابتی تبدیل می‌کند، یعنی یکی به دلیل استفاده در یک بخش استفاده از آن توسط سایر بخش‌ها را محدود می‌کند. اگر دانش در سازمان به منظور گسترش وسعت به‌کار گرفته شود و نه فروختن آنگاه مساله کالای رقابتی کمتر رخ می‌دهد. این تحلیل ممکن است به این معنا باشد که اگر همه مدیران حداکثرکننده سود منطقی باشند، آنگاه تمام تنوع‌پذیری محصول باید به نوعی به خطوط موجود در کسب و کار مرتبط باشد. در عمل، اما برخی از واحدها هم‌پیمان هستند، با تقسیمات محصول با عدم اشتراک رابطه عملکردی یا تکنولوژیکی صرف نظر از نظارت مالی مشترک توسط یک دفتر مرکزی. با این حال مطالعه‌ای در اواسط دهه ۱۹۹۰ [۲۱] دریافت که بیشتر

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

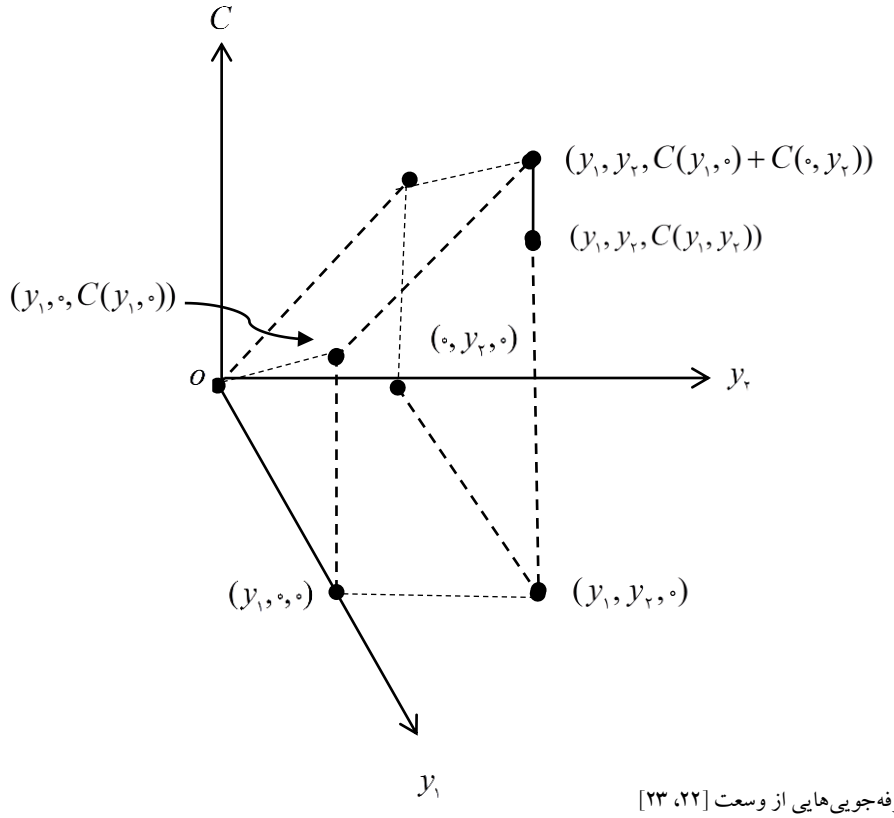
[DOI: 10.22034/20.4.149]

واحدهای چندمحصولی "تنوع‌ساز منسجم" هستند. واحدهای این دسته ترکیبی دو به دو از خطوط تولیدی را دنبال کردند که مشابه با روش واحدهای دیگر در سراسر اقتصاد بودند که همان جفت خطوط تولید را ترکیب می‌کردند که این امر نشان‌دهنده حضور عوامل تبادلی و تکنولوژیکی اصولی مشترک است.

زمانی که هزینه‌های تولید کل یک واحد برای تولید چندین خروجی کمتر از آن‌هایی باشد که توسط چند واحد تک محصولی تولید می‌شود، این تاثیر اقتصادی را صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت نامند. به طور ریاضی صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت وجود دارد اگر

$$C(y_1, y_2) < C(y_1, 0) + C(0, y_2) \qquad (1)$$

که در آن y_1 و y_2 نشان‌دهنده خروجی ۱ و ۲ هستند و C هزینه کمینه برای یک مقدار معین از تولید را نشان می‌دهد. $C(y_1, y_2)$ هزینه تولید مشترک سازمان متنوع می‌باشد و $C(y_1, 0)$ و $C(0, y_2)$ به ترتیب هزینه‌های تولید y_1 و y_2 دو واحد تخصصی می‌باشد. عبارت (۱) در شکل ۱ تشریح شده است. بر طبق (۱) در شکل ۱ اگر $(y_1, y_2, C(y_1, y_2))$ پایین $(y_1, y_2, C(y_1, 0) + C(0, y_2))$ قرار گیرد صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت وجود دارد.



شکل ۱. صرفه‌جویی‌هایی از وسعت [۲۲، ۲۳]

بنابراین درجه صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت[1] (DES) برای واحد j ام به صورت زیر تعریف می‌شود:

[1]Degree of economies of scope

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.149]

$$DES_j = \frac{C(y_1,0)+C(0,y_2)-C(y_1,y_2)}{C(y_1,y_2)} \quad (۲)$$

$DES_j > 0$ بیان‌کننده این است که واحد j ام صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت را نشان می‌دهد، $DES_j < 0$ اشاره به عدم صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت دارد. $DES_j = 0$ بدین معنی است که هزینه‌ها به طور طبیعی جمع-پذیر هستند. توجه شود که خروجی‌های غیرصفر در هر دو طرف (۱) مشابه هستند بنابراین ارزیابی به طور موضعی قابل اجرا است (در همسایگی y_1 و y_2).

۲-۲ تحلیل پوششی داده‌ها

تحلیل کارایی، تکنیکی است که برای بررسی و توضیح هزینه‌های نسبی در میان کارگزارن اقتصادی دیگر استفاده می‌شود. یک مرز یا به صورت پارامتری با استفاده از رویکرد مرزی تصادفی (SFA[1]) یا به صورت ناپارامتری با استفاده از روش تحلیل پوششی داده‌ها (DEA[2]) اندازه‌گیری می‌شود. تجزیه و تحلیل با تخمین میزان فاصله کارگزارن اقتصادی منفرد از مرزهای تخمینی انجام می‌شود. روش‌های SFA برای بررسی رفتار تابع هزینه مرزی استفاده شده است. تئوری اقتصادی مکانیسم‌هایی را برای کشف ساختار هزینه بدون توجه به این‌که مرز با روش‌های SFA یا DEA اندازه‌گیری می‌شود، فراهم می‌کند. بنابراین، آیا می‌توان از تجزیه و تحلیل DEA برای ارایه بینشی در مورد این‌که چگونه شرکت‌هایی با فناوری مشابه می‌توانند به سطوح مشابهی از کارایی هزینه و هزینه های متوسط با بررسی شکل مرز دست یابند، استفاده کرد؟ اگر چنین است، روش‌های DEA باید به شرکت‌هایی که خارج از مرز فعالیت می‌کنند اجازه دهد تا با تنظیم اندازه شرکت برای جذب اقتصادهای مقیاس، معاوضه بالقوه بهبود انتخاب‌های بسته‌بندی خروجی و ورودی را درک کنند.

رویکرد سنتی برای تخمین صرفه‌های مقیاس چند محصولی و محصول خاص و صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت شامل تعیین یک فرم عملکردی برای مرز هزینه و تخمین پارامترها با استفاده از سیستم های خطای دوطرفه یا با سیستم‌های خطای یک‌طرفه است.

رویکرد تحلیل پوششی داده‌ها، یک مرز خطی تکه تکه با استفاده از یک مساله کمینه‌سازی هزینه خطی ایجاد می‌کند. با این روش، نیازی به محدود کردن فناوری تولید با تحمیل یک فرم عملکردی نیست. مرز مطابق با تئوری اقتصادی است؛ زیرا محدودیت‌های انحنا در تابع تولید/هزینه در فرآیند تخمین با استفاده از محدودیت‌های نابرابری اعمال می‌شود. علاوه بر این، روش DEA اجازه می‌دهد تا فناوری با استفاده از داده‌های یک سال اندازه‌گیری شود و نیاز به تغییر قیمت نسبی برای اندازه‌گیری دقیق فناوری کاهش یابد. [۲۴]

در بخش بعد روش‌هایی مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها به منظور بررسی صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت مطرح می‌شود.

[1] Stochastic frontier approach
[2] Data envelopment analysis

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.149]

۳ تخمین صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها

به منظور بررسی صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت در ساختار تحلیل پوششی داده‌ها چندین روش مرور می‌شود. در ابتدا روش مطرح‌شده در [۱۴] بیان می‌شود. فرض کنید n واحدتصمیم‌گیرنده متنوع باتولید هر دو محصول ۱ و ۲ وجود دارند که گروه D نامیده می‌شود. برای بنگاه متنوع j ام خروجی‌ها و ورودی (هزینه) را به ترتیب با $y_j=(y_{1j},y_{2j})$ و c_j $(j=1,...,n)$ نشان می‌دهیم. مجموعه امکان تولید بنگاه‌های متنوع تحت فرض بازده به مقیاس متغیر را به صورت

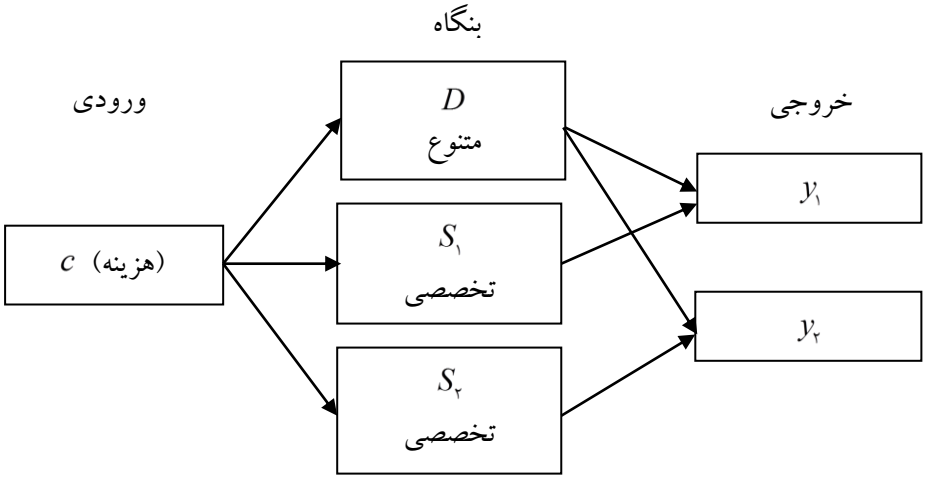
$$P_{1,2}=\{(c,\mathbf{y})\,|\,c=\sum_{j=1}^{n}c_j\lambda_j,\mathbf{y}\le\sum_{j=1}^{n}\mathbf{y}_j\lambda_j,e\boldsymbol{\lambda}=1,\boldsymbol{\lambda}\ge 0\} \qquad (۳)$$

تعریف می‌کنیم. $c_j\lambda_j$ هزینه کل بنگاه برای تولید هر دو محصول را نشان می‌دهد، $\mathbf{y}_j\lambda_j=\begin{pmatrix}y_{1j}\\y_{2j}\end{pmatrix}\lambda_j$ است و c هزینه کل بنگاه برای تولید $\mathbf{y}$ است. همچنین p بنگاه تخصصی گروه S_1 وجود دارد که فقط محصول ۱ را تولید می‌کند. این گروه خروجی z_{1j} را با به‌کارگیری ورودی (هزینه) v_{1j} به‌ازای $j=1,...,p$ تولید می‌کند. گروه تخصصی دیگر S_2 به ازای $j=1,...,q$ محصول دوم (z_{2j}) را با استفاده از هزینه (v_{2j}) تولید می‌کند که q نشان‌دهنده تعداد واحدهای گروه S_2 می‌باشد. مجموعه‌های امکان تولید آنها به ترتیب به صورت P_1 و P_2 بیان می‌شوند:

$$P_1=\{(v,z_1)\,|\,v=\sum_{j=1}^{p}v_{1j}\lambda_j,z_1\le\sum_{j=1}^{p}z_{1j}\lambda_j,e\boldsymbol{\lambda}=1,\boldsymbol{\lambda}\ge 0\} \qquad (۴)$$

$$P_2=\{(v,z_2)\,|\,v=\sum_{j=1}^{q}v_{2j}\lambda_j,z_2\le\sum_{j=1}^{q}z_{2j}\lambda_j,e\boldsymbol{\lambda}=1,\boldsymbol{\lambda}\ge 0\} \qquad (۵)$$

شکل ۲ جریان ورودی و خروجی فوق را نشان می‌دهد.



شکل۲. بنگاه‌های متنوع و تخصصی

به ازای $DMU\,(c_o,y_{1o},y_{2o})\in D$، مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را برای هر واحد به‌منظور حذف هر ناکارایی هزینه حل می‌کنیم:

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.149]

$$
\begin{aligned}
& C(y_{1o}, y_{2o}) = c_o^* = \underset{\theta,\boldsymbol{\lambda}}{Min}\ c_o\theta \\
& s.t. \qquad c_o\theta = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \ldots + c_n\lambda_n \\
& \qquad\quad y_{io} \le y_{i1}\lambda_1 + y_{i2}\lambda_2 + \ldots + y_{in}\lambda_n \ \ (i = 1,2) \\
& \qquad\quad 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \\
& \qquad\quad \boldsymbol{\lambda} \ge 0
\end{aligned} \qquad (۶)
$$

فرض کنید جواب بهینه c_o^* باشد. آنگاه (c_o^*, y_{1o}, y_{2o}) حداقل (y_{1o}, y_{2o}) را در هزینه کمینه $c_o^* = C(y_{1o}, y_{2o})$ تولید می‌کند.

حال صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت برای این کارای هزینه (c_o^*, y_o) به صورت زیر است.

ابتدا به منظور مقایسه بنگاه متنوع و تخصصی، یک مجموعه از بنگاه‌های متنوع مجازی V با ترکیب دو بنگاه از گروه‌های S_1 و S_2 ایجاد می‌کنیم. برای این منظور دو بنگاه با هزینه و خروجی‌های $(v_{1k}, z_{1k}) \in S_1$ و $(v_{2k}, z_{2k}) \in S_2$ را به طور دلخواه انتخاب می‌کنیم. یک بنگاه متنوع مجازی تشکیل می‌دهیم که فرض می‌شود که هر دو محصول ۱ (z_{1k}) و ۲ (z_{2h}) را با هزینه $v = v_{1k} + v_{2h}$ تولید می‌کنند. مجموعه V از این واحدهای مجازی شامل تمام ترکیبات بنگاه‌ها در S_1 و S_2 با فرض $r\ (= p \times q)$ واحد می‌باشد. V را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

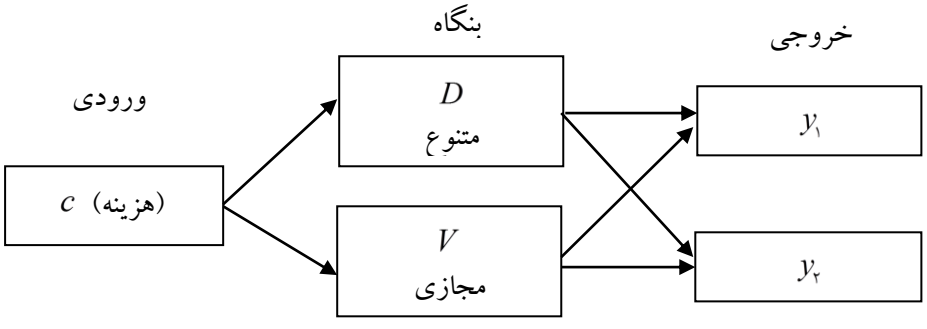
$$V = \{(v_j, z_{1j}, z_{2j})\}\, j = 1, \ldots, r(= p \times q)\}. \qquad (۷)$$

مجموعه امکان تولید متناظر با V به ازای بنگاه‌های متنوع مجازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_V = \{(c, y_1, y_2) \mid c = \sum_{j=1}^{r} v_j\lambda_j, \mathbf{y} \le \sum_{j=1}^{r} z_j\lambda_j, \mathbf{e}\boldsymbol{\lambda} = 1, \boldsymbol{\lambda} \ge 0\} \qquad (۸)$$

که v_j مقدار $v_{1j} + v_{2j}$ است در حالی که z_j و $\mathbf{y}$ بردارهایی هستند که $z_j = \begin{pmatrix} z_{1j} \\ z_{2j} \end{pmatrix}$ خروجی j ام بنگاه متنوع مجازی را و $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ خروجی‌ها یعنی محصولات ۱ و ۲ را نشان می‌دهند.

بنابراین دو مجموعه از بنگاه‌های متنوع به صورت شکل ۳ نمایش داده می‌شوند.



شکل۳. بنگاه‌های متنوع D و بنگاه‌های متنوع مجازی V

کارایی هزینه (c_o^*, y_{1o}, y_{2o}) نسبت به مجموعه‌های بنگاه‌های متنوع مجازی در V به صورت زیر است:

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.149]

$$\begin{aligned} &\underset{\theta,\boldsymbol{\lambda}}{Min}\ c_o^*\theta \\ &s.t.\ \ \theta c_o^* = v_1\lambda_1 + v_2\lambda_2 + \ldots + v_r\lambda_r \\ &\quad y_{1o} \le z_{11}\lambda_1 + \ldots + z_{1r}\lambda_r \\ &\quad y_{2o} \le z_{21}\lambda_1 + \ldots + z_{2r}\lambda_r \\ &\quad 1 = \lambda_1 + \ldots + \lambda_r \\ &\quad \boldsymbol{\lambda} \ge 0, \end{aligned} \qquad (9)$$

که c_o^* از (۶) به‌دست آمده است.

فرض کنید مقدار بهینه θ با θ^* نشان داده شود. با استفاده از این مقدار بهینه θ^* (۱۰) را تعریف می‌کنیم:

$$C(y_{1o},0) + C(0,y_{2o}) = c_o^*\theta^* \qquad (10)$$

چهار حالت زیر را داریم:

- $\theta^* < 1$. (c_o^*, y_{1o}, y_{2o}) با P_V احاطه می‌شود و بنابراین نسبت به گروه متنوع مجازی V ناکارا است.
- $\theta^* = 1$. (c_o^*, y_{1o}, y_{2o}) به طور شعاعی روی مرز کارای P_V است.
- $\theta^* > 1$. (c_o^*, y_{1o}, y_{2o}) با P_V احاطه نمی‌شود و بنابراین ابرکارا نسبت به V است.
- برنامه‌ریزی خطی فوق جواب شدنی ندارد یعنی $y_{1o} > \max_{j=1}^{r}\{z_{1j}\}$ یا $y_{2o} > \max_{j=1}^{r}\{z_{2j}\}$ به طوری که $\mathbf{e\lambda} = 1$ برآورد نمی‌شود. در این حالت فرض می‌کنیم $\theta^* = 1$ و بنابراین

$$C(y_{1o},0) + C(0,y_{2o}) = c_{1o}^* = C(y_{1o},y_{2o}).$$

با استفاده از $C(y_{1o},y_{2o})$ و $C(y_{1o},0)+C(0,y_{2o})$ می‌توان صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت موضعی در DMU_o را با استفاده از شرایط زیر بررسی کرد:

(۱۱) صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت وجود دارد $C(y_{1o},y_{2o}) < C(y_{1o},0) + C(0,y_{2o})$

(۱۲) بدون گرایش (بی‌تفاوت) $C(y_{1o},y_{2o}) = C(y_{1o},0) + C(0,y_{2o})$

(۱۳) عدم صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت وجود دارد $C(y_{1o},y_{2o}) > C(y_{1o},0) + C(0,y_{2o})$

با عدم قابلیت حل گنجانده‌شده در تفسیر (۱۲).

در هر حالت، DES با استفاده از (۲) به طریق زیر محاسبه می‌شود:

$$DES_j = \theta^* - 1. \qquad (14)$$

دقت نمایید که به صورتی که پیش این توصیف شد نیاز به ایجاد تمام ترکیبات بنگاه‌های تخصصی در S_1 و S_2 نیست و فقط یک زیرمجموعه از آنها برای تعریف P_V کافی است که به صورت زیر اثبات می‌شود. چون P_1 با تعداد متناهی از واحدهای کارای BCC [1] در P_1 تعیین می‌شود یک واحد ناکارای $(v_{1\alpha}, z_{1\alpha})$ در P_1 به صورت یک ترکیب محدب واحدهای کارای BCC با حداقل یک متغیر کمکی غیرصفر در ورودی یا خروجی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$v_{1\alpha} = \sum_{j\in E_1} v_{1j}\lambda_j + s_\alpha^- \qquad (15)$$

[1] Banker, Charnes and Cooper (BCC)

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.149]

$$z_{1\alpha} = \sum_{j\in E_1} z_{1j}\lambda_j - s_\alpha^+ \quad (16)$$

$$1 = \sum_{j\in E_1} \lambda_j, \lambda_j \geq 0 \ (\forall j) \quad (17)$$

$$(s_\alpha^-, s_\alpha^+) \neq (0,0), s_\alpha^- \geq 0, s_\alpha^+ \geq 0, \quad (18)$$

که E_1 مجموعه واحدهای کارای BCC در S_1 است. اگر این واحد ناکارا با $(v_{1\alpha}, z_{1\alpha})$ در P_1 را با یک واحد $(v_{2\beta}, z_{2\beta})$ در P_2 ترکیب کنیم، یک واحد مجازی به صورت زیر داریم:

$$(v_{1\alpha} + v_{2\beta}, z_{1\alpha}, z_{2\beta}) = \sum_{j\in E_1} (v_{1j} + v_{2\beta}, z_{1j}, z_{2\beta})\lambda_j + (s_\alpha^-, -s_\alpha^+, 0) .$$

چون $(v_{1j} + v_{2\beta}, z_{1j}, z_{2\beta})$ ترکیبی از (v_{1j}, z_{1j}) با $(v_{2\beta}, z_{2\beta})$ است در نتیجه متعلق به P_V است و از این رو ترکیب محدب‌اش یعنی اولین عبارت در سمت راست نیز در P_V قرار می‌گیرد. با فرض $(s_\alpha^-, s_\alpha^+) \neq (0,0)$، $(v_{1\alpha} + v_{2\beta}, z_{1\alpha}, z_{2\beta})$ واحد مجازی دارای کمکی غیرصفر در واحد ترکیبی محدب دارد و بنابراین نسبت به P_V کارا نیست. بدین گونه نیاز به ترکیب یک واحد ناکارا در S_1 با واحدهای در S_2 نیست.

به طور مشابه واحدهای ناکارا در S_2 به منظور تشکیل P_V مشارکت ندارند.

تذکر. مجموعه امکان تولید مجازی P_V همان‌طور که در (۸) تعریف شد می‌تواند از ترکیب فقط واحدهای کارای BCC در S_1 و S_2 تشکیل شود. [۱۴، ۲۵]

این می‌تواند به طور قابل ملاحظه‌ای تعداد بنگاه‌های مجازی که باید تولید شوند و در نتیجه میزان محاسبات به منظور تصمیم‌گیری در مورد حضور صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت را کاهش دهد. امکان دارد که مرزهای کارای بنگاه‌های متنوع مجازی تولیدشده به دلیل نقاط دورافتاده در بنگاه‌های تخصصی به شدت نوسان کنند. بنابراین تصمیم روی صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت موضعی ناپایدار است. گروسکوف و یاساورنگ [۵] دیدگاهی در پاسخ به این انتقاد ارایه دادند. خوانندگان برای مطالعه بیشتر می‌توانند به [۵، ۱۴] مراجعه نمایند.

روش فوق را می‌توان به منظور بررسی سودآوری ادغام نیز به‌کار برد. فرض کنید می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا بنگاه تخصصی محصول ۱ (v_{1k}, z_{1k}) را با بنگاه تخصصی محصول ۲ (v_{2h}, z_{2h}) ادغام نماییم یا خیر.

به منظور یافتن مقادیر کارای هزینه $(v_{1k}^*, z_{1k}) \in P_1$ و $(v_{2h}^*, z_{2h}) \in P_2$، ابتدا ناکارایی هزینه را از دو بنگاه به ازای این مساله تک ورودی (هزینه) و تک خروجی با به‌کارگیری مدل BCC ماهیت ورودی حذف می‌نماییم. فرض کنید $C(z_1, 0)$ $(C(0, z_2))$ هزینه کمینه برای تولید z_{1k} (z_{2k}) در P_1 (P_2) باشد.

سپس واحدی مجازی شامل یک ورودی (هزینه) $(v = v_{1k}^* + v_{2h}^*)$ و دو خروجی $(z_1 = z_{1k}, z_2 = z_{2h})$ را تشکیل می‌دهیم. صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت این بنگاه مجازی در مجموعه $P_{1,2}$ با حل مدل هزینه زیر بررسی می‌شود:

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.149]

$$
\begin{aligned}
& C(z_1, z_2) = \underset{\theta,\lambda}{Min}\ v\theta \\
& s.t. \qquad v\theta = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \ldots + c_n\lambda_n, \\
& \qquad z_1 \le y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \ldots + y_{1n}\lambda_n, \\
& \qquad z_2 \le y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \ldots + y_{2n}\lambda_n, \\
& \qquad 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n, \\
& \qquad \boldsymbol{\lambda} \ge 0 .
\end{aligned} \tag{۱۹}
$$

در حالت نشدنی، قرار می‌دهیم: $C(z_1, 0) + C(0, z_2) = C(z_1, z_2)$.

با استفاده از $C(z_1, z_2)$، $C(z_1, 0)$ و $C(0, z_2)$، مطلوبیت ادغام با شرایط زیر بررسی می‌شود:

(۲۰) ادغام نامطلوب است $C(z_1, z_2) > C(z_1, 0) + C(0, z_2)$

(۲۱) بدون گرایش (بی‌تفاوت) $C(z_1, z_2) = C(z_1, 0) + C(0, z_2)$

(۲۲) ادغام مطلوب است $C(z_1, z_2) < C(z_1, 0) + C(0, z_2)$

در هر حالت DES با استفاده از (۲) محاسبه می‌شود.

سنگوپتا و شاو [۱۳] روش محاسباتی به منظور تخمین صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت را به صورت زیر تشریح کردند. با در نظر گرفتن بردار قیمت ورودی واحد $w_o \in R^m$ برای ورودی x_o از بنگاه متنوع o، کارایی هزینه (CE_o) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$
CE_o = w_o x_o^* / w_o x_o = \sum_{i=1}^{m} w_{io} x_i^* / \sum_{i=1}^{m} w_{io} x_i , \tag{۲۳}
$$

که x_o^* جواب بهینه‌ای از مساله برنامه‌ریزی خطی زیر است:

$$
\begin{aligned}
& C(y_o, w_o) = Min \sum_{i=1}^{m} w_{io} x_i \\
& s.t. \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le x_i \ \ \forall i, \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{ro} \ \ \forall r, \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \ \lambda_j \ge 0, \forall j.
\end{aligned} \tag{۲۴}
$$

اکنون نیاز به مقایسه هزینه کمینه این n بنگاه متنوع با خروجی‌های مشاهده‌شده با مرزی شامل بنگاه‌های جمعی با برآورد شرط $DES = 0$ بر دامنه تغییرات مناسب خروجی‌ها است. این بنگاه‌های جمعی فرضی هستند که توسط بنگاه‌های تخصصی ایجاد شده‌اند. فرض کنید n_1 بنگاه با تولید تنها خروجی y_1 و n_2 بنگاه با تولید تنها خروجی y_2 وجود دارد. تمام جایگشت‌های ممکن خروجی‌ها و هزینه‌های این دو مجموعه از بنگاه‌های تخصصی دو به دو برای تشکیل مجموعه‌ای از بنگاه‌های جمعی فرضی ترکیب می‌شوند. فرض کنید تعداد بنگاه‌های جمعی k باشد که خروجی و هزینه این بنگاه‌ها با بالانویس «+» متناظر می‌شود. سنگوپتا و شاو [۱۳] روش ایونز و هکمن[1] [۲۶] را دنبال کردند برای تعیین ناحیه قابل قبولی که بایستی بنگاه‌های جمعی فرضی بنگاه-های متنوع را پوشش دهند. به عبارت دیگر هر بنگاه متنوع باید در و پنجره تولید کند نه بیشتر از تولید بیشینه و نه

[1] Evans and Heckman

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.149]

کمتر از تولید کمینه در و پنجره‌های بنگاه‌های فرضی. بنابراین به منظور محاسبه صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت برای بنگاه متنوع o مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & C^{+}(y_o, w_o) = Min \sum_{i=1}^{m} w_{io} x_i \\ & s.t. \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^{+} \le x_i \ \forall i, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^{+} \ge y_{ro} \ \forall r, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \ \lambda_j \ge 0, \forall j. \end{aligned} \tag{۲۵}$$

$C^{+}(y_o, w_o)$ هزینه کمینه تولید بردار خروجی y_o در مجموعه تکنولوژی جمعی را نشان می‌دهد که w_o بردار قیمت ورودی بنگاه o است. درجه صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$DES_o = \frac{C^{+}(y_o, w_o)}{C(y_o, w_o)} - 1. \tag{۲۶}$$

به دلیل برخی از مشکلات مدل کارایی هزینه (۲۴) که سبب انحراف نتایج DES می‌شود، سنگوپتا و شاو [۱۴] روش زیر را معرفی کردند. مدل (۲۷) از یک بنگاه متنوع با کمینه‌سازی هزینه o بابه‌کارگیری یک ساختار تکنولوژی با دربرگیری هزینه کل $c_o \ (= \sum_{i=1}^{m} w_{io} x_{io})$ به صورت ورودی و بردار خروجی $y_o = (y_{1o}, y_{2o}, ..., y_{so})$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & Min \ \theta \\ & s.t. \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j c_j \le \theta c_o \ \forall i, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{ro} \ \forall r, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \ \lambda_j \ge 0, \forall j. \end{aligned} \tag{۲۷}$$

مقدار تابع هدف بهینه مدل (۲۷) با θ^{*} نشان داده می‌شود. هزینه کمینه بنگاه متنوع o برای تولید بردار خروجی y_o را با $c_o^{*} (= \theta^{*} c_o)$ نشان می‌دهیم. به طور مشابه برای محاسبه DES برای بنگاه o، مساله برنامه‌ریزی خطی زیر حل می‌شود:

$$\begin{aligned} & Min \ \theta^{+} \\ & s.t. \ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j c_j^{+} \le \theta^{+} c_o^{*} \ \forall i, \\ & \sum_{j=1}^{k} \lambda_j y_{rj}^{+} \ge y_{ro} \ \forall r, \\ & \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \ \lambda_j \ge 0, \forall j. \end{aligned} \tag{۲۸}$$

درجه صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت (DES_o) به صورت θ^{+*} منهای یک تعریف می‌شود یعنی

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.149]

$$DES_o = \theta^{+*} - ۱. \qquad (۲۹)$$

به دلیل عدم وجود قیمت ورودی و ارایه دشوار داده‌های هزینه برای یافتن مرز هزینه و عدم وجود داده‌های بنگاه‌های تخصصی که سبب می‌شود نتوان مرز هزینه جمعی را با داده‌های بنگاه‌های تخصصی ایجاد کرد، مجموعه بنگاه‌های متنوع به دو زیرمجموعه تقسیم می‌شوند. یکی مجموعه‌ای است که شامل بنگاه‌هایی است که بیشترین اولین خروجی و کمترین دومین خروجی را تولید می‌کنند و دیگری مجموعه‌ای است که شامل بنگاه‌هایی است که بیشترین دومین خروجی و کمترین اولین خروجی را تولید می‌کنند. فرض کنید اولین زیرمجموعه $N_۱ = \{۱, ۲, ..., k\}$ و دومین زیرمجموعه $N_۲ = \{k+۱, k+۲, ..., n\}$ باشد که $N = N_۱ + N_۲ = \{۱, ۲, ..., k, k+۱, ..., n\}$. به منظور ارزیابی صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت ابتدا دو مدل تحلیل پوششی داده‌های ماهیت خروجی زیر محاسبه می‌شوند. که در واقع کارایی‌های فنی خروجی بنگاه‌های متعلق به زیرمجموعه‌های $N_۱$ و $N_۲$ می‌باشند.

$$\begin{aligned} E_{۱o} &= Min\ (\frac{۱}{\theta_o}) \\ s.t.\ &\sum_{j \in N_۱} \lambda_j x_{ij} \le x_{io}\ \ \forall i, \\ &\sum_{j \in N_۱} \lambda_j y_{rj} \ge (\frac{۱}{\theta_o}) y_{ro}\ \ \forall r, \\ &\sum_{j \in N_۱} \lambda_j = ۱,\ \lambda_j \ge ۰, \forall j. \end{aligned} \qquad (۳۰)$$

$$\begin{aligned} E_{۲o} &= Min\ (\frac{۱}{\theta_o}) \\ s.t.\ &\sum_{j \in N_۲} \lambda_j x_{ij} \le x_{io}\ \ \forall i, \\ &\sum_{j \in N_۲} \lambda_j y_{rj} \ge (\frac{۱}{\theta_o}) y_{ro}\ \ \forall r, \\ &\sum_{j \in N_۲} \lambda_j = ۱,\ \lambda_j \ge ۰, \forall j. \end{aligned} \qquad (۳۱)$$

$E_{۱o}$ و $E_{۲o}$ نشان‌دهنده خروجی بیشینه قابل دستیابی با به‌کارگیری این دو مجموعه از بنگاه‌ها زمانی است که جدا سنجیده می‌شوند. حال این دو مرز تخصصی نیاز به مقایسه با یک مرز بزرگ شامل تمام بنگاه‌های متعلق به هر دو زیرمجموعه $N_۱$ و $N_۲$ دارند که به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} E_{۱۲o} &= Min\ (\frac{۱}{\theta_o}) \\ s.t.\ &\sum_{j \in N} \lambda_j x_{ij} \le x_{io}\ \ \forall i, \\ &\sum_{j \in N} \lambda_j y_{rj} \ge (\frac{۱}{\theta_o}) y_{ro}\ \ \forall r, \\ &\sum_{j \in N} \lambda_j = ۱,\ \lambda_j \ge ۰, \forall j. \end{aligned} \qquad (۳۲)$$

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.149]

حضور یا غیبت صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت هر بنگاه o به این وابسته است که آیا بهبود بیشتری در کارایی امکان‌پذیر است که با مقایسه مرز تخصصی و بزرگ به آسانی صورت می‌گیرد. $(E_{1o} / E_{12o}) > 1$ حضور صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت را برای بنگاه oام نشان می‌دهد در حالی که $(E_{1o} / E_{12o}) = 1$ بیان‌کننده غیبت آن است.

شاو و تن [۱۲] نیز دو مدل هزینه تحلیل پوششی داده‌های رقیب را به منظور ارزیابی مرز هزینه با افشای رفتار صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت بنگاه‌های چندمحصولی توصیف کردند. روش اول آنها مشابه مدل‌های (۲۳)-(۲۶) می‌باشد و روش دوم آنها مشابه (۲۷)-(۲۹) می‌باشد تنها به جای مدل (۲۸) مدل زیر ارایه شده است:

$$\begin{aligned} & Min \ \ \theta^{+} \\ & s.t. \ \ \sum_{j=1, j\neq o}^{k} \lambda_j c_j^{+} \le \theta^{+} c_o^{*} \ \ \forall i, \\ & \qquad \sum_{j=1, j\neq o}^{k} \lambda_j y_{rj}^{+} \ge y_{ro} \ \ \forall r, \\ & \qquad \sum_{j=1, j\neq o}^{k} \lambda_j = 1, \ \lambda_j \ge 0, \forall j. \end{aligned} \qquad (۳۳)$$

آنها استدلال آورند که در حضور نقص بازار مدل هزینه دوم به طور نسبی منعطف‌تر و به طور تجربی با خواستار بیشتر در آشکارسازی رفتارهای کارایی هزینه و صرفه‌جویی‌های ناشی ازوسعت دقیق بنگاه‌های متنوع است. قابلیت‌های انعطاف نسبی برحسب عدم نیازمندی صریح فرض‌های غیرواقع است که ورودی‌ها همگن هستند، قیمت‌های ورودی همواره موجود هستند و با اطمینان اندازه‌گیری می‌شوند و بازار کاملا رقابتی است که در روش یک موجود می‌باشند. اما زمانی که ورودی‌ها در سراسر بنگاه‌ها همگن هستند و قیمت‌های ورودی برون‌زا هستند روش یک موفق‌تر است حتی با محدودیتی که شاخص کارایی هزینه‌اش تنها کارایی‌های فنی و تخصیصی را اما نه کارایی‌های قیمت را منعکس می‌کند.

به عنوان توضیح بیشتر مدل کارایی هزینه به‌کار رفته در روش دوم هیچ یک از فرض‌های برون‌زایی قیمت، تحدب در تکنولوژی مبتنی بر شاخص و دسترسی داده‌های قیمت بازار واحد را فرض نمی‌کند که در روش یک موجود است. زمانی که بنگاه‌ها در بازار رقابتی با قیمت‌های واحد مشترک برای خرید ورودی‌هایشان مواجه می‌شوند عبارات (۲۶) و (۲۹) با هم مساوی هستند و هرگاه به‌دلیل ساختار بازار ورودی ناقص این فرض نقض شود این دو روش منتهی به مجموعه‌های متفاوت از تخمین‌های صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت می‌شود.

زینال‌زاده اهرنجانی و همکاران [۱۵] با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت را در سیستم‌های تولید دومرحله‌ای مورد بررسی قرار دادند. در این قسمت روش مطرح‌شده توسط آنها تشریح می‌شود. به ازای واحدهای تولید دومرحله‌ای به منظور ارزیابی صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت واحدهای ادغام‌شده به طور مجازی، آنها یک مجموعه از بنگاه‌های متنوع مجازی (M) با ترکیب p بنگاه تخصصی از گروه S_1 با q بنگاه تخصصی از گروه S_2 ایجاد کردند. در هر دو گروه ساختار به صورت دومرحله‌ای است که ورودی‌های آنها یکسان (هر دو از نوع هزینه می‌باشد) است در حالی که خروجی‌های نهایی و محصولات میانی

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

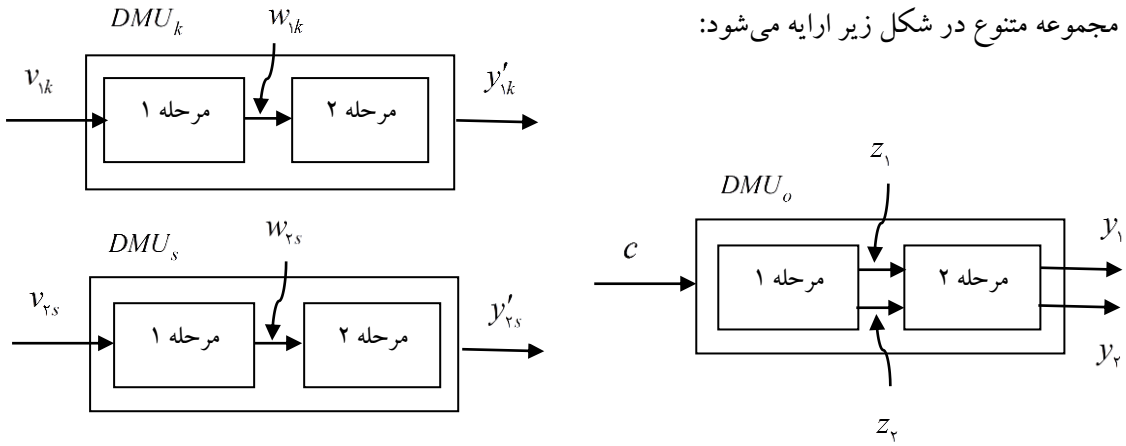
[DOI: 10.22034/20.4.149]

آنها متفاوت هستند. تعریف برای ترکیب هر دو بنگاه برای ایجاد بنگاه‌های ادغام‌شده مجازی به صورت $v_{ks}=v_k^*+v_s^*$ است. اما این بنگاه ادغام‌شده شامل دو خروجی نهایی $y'_{ks}=\begin{pmatrix}y'_k\\ y'_s\end{pmatrix}$ و دو محصول میانی $w_{ks}=\begin{pmatrix}w_k\\ w_s\end{pmatrix}$ است. واحدهای مجازی از یک ورودی $v=v_{1k}^*+v_{2s}^*$ و دو خروجی $\begin{pmatrix}y'_1=y_{1k}\\ y'_2=y_{2s}\end{pmatrix}$ تشکیل شده‌اند که v_{1k}^* و v_{2s}^* هزینه بهینه گروه ۱ و ۲ است. بنابراین آنها M و مجموعه امکان تولید آن را به صورت زیر تعریف کردند:

$$M=\{(v_j,y'_{1j},y'_{2j})\mid j=1,...,pq\}$$

$$P_M=\{(v_j,y'_1,y'_2)\mid v\geq\sum_{j=1}^{n}c_j\lambda_j,\ y'\leq\sum_{j=1}^{n}y_j\lambda_j,\ \lambda_j\geq 0,\forall j\}$$

که $v_j=v_{1j}^*+v_{2j}^*$ می‌باشد و y نشان‌دهنده خروجی‌ها (محصول ۱ و ۲) است. واحدها در گروه‌ها و مجموعه متنوع در شکل زیر ارایه می‌شود:



شکل ٤. واحدهای گروه ۱، ۲ و واحدهای متنوع

زینال‌زاده اهرنجانی و همکاران [۱۵] به منظور بررسی صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت سیستم‌های دومرحله‌ای مجازی در مجموعه امکان تولید بنگاه‌های متنوع تحت فرض بازده به مقیاس ثابت مدل زیر را ارایه دادند:

$$\begin{aligned}&Min\ \ \theta\\ &s.t.\ \ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j c_j\leq\theta v_k\ ,\\ &\qquad\sum_{j=1}^{n}\mu_j y_{rj}\geq y'_{rk}\ \ r=1,2,\\ &0\leq\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j-\mu_j)z_{dj},d=1,2,\ \lambda_j,\mu_j\geq 0,\forall j.\end{aligned}\qquad(۳۴)$$

که λ_j و μ_j متغیرهای وزنی به ازای هر مرحله می‌باشند و v_k و y'_k به ترتیب ورودی‌ها و خروجی‌های سیستم دو مرحله‌ای مجازی ادغام‌شده را نشان می‌دهند. سمت راست هر محدودیت در مدل (۳۴) ورودی‌ها، خروجی‌ها و محصولات میانی بنگاه‌های متنوع را نشان می‌دهد. به‌علاوه v_{1k}^* و v_{2s}^* هزینه‌های بهینه حاصل ازمدل

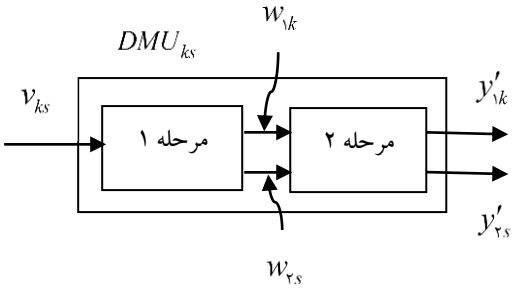
[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.149]

(۳۵) برای هر واحد (واحد تحت ارزیابی با o نشان داده شده است) در گروه‌های S_1 و S_2 هستند (یعنی $DMU_k \in S_1$ و $v_{1k}^* = \theta_k^* x_k$؛ $DMU_s \in S_2$ و $v_{2s}^* = \theta_s^* x_s$). y_1' و y_2' خروجی‌های S_1 و S_2 هستند.

$$
\begin{aligned}
&Min\ \theta \\
&s.t.\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \theta x_{io}\ ,\ i = 1,...,m, \\
&\sum_{j=1}^{n} \mu_j y_{rj} \ge y_{ro}\ \ r = 1,...,s, \\
&\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \mu_j) z_{dj} \ge 0, d = 1,...,D, \\
&\lambda_j, \mu_j \ge 0, \forall j.
\end{aligned}
\qquad (۳۵)
$$

هر بنگاه ادغام‌شده در مدل (۳۴) ترکیبی از دو بنگاه تخصصی در دو گروه متنوع است که محصولات میانی و خروجی نهایی بنگاه‌های تخصصی متفاوت اما ورودی‌های آنها مشابه است. در نتیجه بنگاه ادغام‌شده ایجادشده شامل دو خروجی، دو محصول میانی و یک ورودی مشابه با بنگاه متنوع شکل ۵ می‌باشد. به‌علاوه $(\mathbf{c, z, y})$ نشان‌دهنده ورودی، محصول میانی و خروجی‌های بنگاه‌های متنوع می‌باشد. توجه نمایید $(v_{ks}, w_{ks}, y'_{ks})$ ورودی، محصول میانی و خروجی DMU_{ks} ادغام‌شده مجازی می‌باشد که $v_{ks} = v_k^* + v_s^*$، $w_{ks} = \begin{pmatrix} w_{1k} \\ w_{2k} \end{pmatrix}$ و $y'_{ks} = \begin{pmatrix} y'_{1k} \\ y'_{2s} \end{pmatrix}$ می‌باشد.



شکل۵. DMU_{ks} متنوع

فرض کنید θ بهینه در مدل (۳۴) با θ^* نشان داده شود. هزینه بهینه تولید دو محصول توسط بنگاه ادغام شده مجازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c(y_1, y_2) = \theta^* (v_{1k}^* + v_{2s}^*)$$

چون $v_{1k}^* = c(y_1, 0)$ و $v_{2s}^* = c(0, y_2)$ بنابراین

$$c(y_1, y_2) = \theta^* (c(y_1, 0) + c(0, y_2)) \qquad (۳۶)$$

با در نظر گرفتن روابط اخیر، مطلوبیت ادغام به صورت زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد:

$\theta^* > 1$: ادغام نامطلوب است،

$\theta^* = 1$: بدون گرایش (بی‌تفاوت)،

$\theta^* < 1$: ادغام مطلوب است.

همچنین درجه صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت با به‌کارگیری (۲) و(۳۶) به صورت ذیل است:

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.149]

$$DES = \frac{۱}{\theta^*} - ۱$$

به‌منظور مطالعه وجود صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت در سیستم‌های دومرحله‌ای که چندین ورودی را برای تولید چندین خروجی استفاده می‌کنند با فرض دستیابی به قیمت‌های ورودی، کافی است که چنین سیستمی به حالت یک ورودی تبدیل شود و $\overline{c}_j = c_۱x_{۱j} + c_۲x_{۲j} + ... + c_tx_{tj}$ را استفاده نماییم که $C = (c_۱, c_۲, ..., c_t)$ بردار قیمت‌های ورودی می‌باشد.

برای ارزیابی صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت با استفاده از DEA، اولین گام این است که شاخص‌های عملکرد را برای هر واحد تعریف کنیم. در واقع با توجه به واحدها و ساختار واحدها مدل‌های مربوطه را می‌توان استفاده نمود. با به‌کارگیری تحلیل پوششی داده‌ها برای تخمین صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت، واحدها می‌توانند تصمیمات آگاهانه‌ای در مورد استراتژی‌های تولید خود بگیرند و فرصت‌هایی را برای صرفه‌جویی در هزینه‌ها شناسایی کنند. این تحلیل می‌تواند به هدایت تخصیص منابع، تنوع محصول و برنامه‌ریزی استراتژیک کمک کند.

٤ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

با توجه به اهمیت بررسی صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت در سیستم‌های چند محصولی و سازمان‌های چندبخشی در این بررسی پس ازمعرفی مفهوم صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت، چندین روش غیرپارامتری موجود در ادبیات مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در واقع برخی از مدل‌های مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها به منظور رسیدگی حضور صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت یا عدم حضور آن بیان شدند. بررسی نشان می‌دهد توجه به ساختار و شاخص‌ها در تخمین صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت مهم و اساسی می‌باشد. به علاوه مساله صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت در سیستم‌های دومرحله‌ای نیز مورد مطالعه قرار گرفته است.

به نظر می‌رسد ارایه مدل‌های مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌های موجود به منظور بررسی صرفه‌جویی‌های ناشی از مقیاس موضوع جالبی برای تحقیقات آتی باشد. به علاوه تحقیق در مورد صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت، مقیاس و استفاده از ظرفیت در حضور داده‌های نادقیق از جمله موضوعاتی هستند که می‌توانند مورد توجه قرار گیرند.

منابع

[1]. Panzar, J.C. and Willig, R.D., (1981), Economies of Scope. American Economic Review, 71 (2), 268-72.
[2]. Baumol, W. J. Panzar, J. C. and Willig, R. D., (1982). Contestable Markets and the Theory of Industry Structure. Harcourt Brace Jovanovich, Inc., NewYork.
[3]. Färe, R., (1988). Efficiency Gains from Addition of Technologies: A Nonparametric Approach, Physica-Verlag HD, Heidelberg, 171-176.
[4]. Fare, R., (1986). Addition and efficiency. The Quarterly Journal of Economics, 101 (4), 861-866.
[5]. Grosskopf, S. and Yaisawarng, S., (1990). Economies of scope in the provision of local public services. National Tax Journal, 43, 61-74.
[6]. Prior, D., (1996). Technical efficiency and scope economies in hospitals. Applied economics, 28 (10), 1295-1301.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]
[DOI: 10.22034/20.4.149]

[7]. Kwon, O.S. and Yun, W.-C., (2003). Measuring economies of scope for cogeneration systems in Korea: a nonparametric approach. Energy Economics, 25 (4), 331-338.
[8]. Morita, H., (2003). Analysis of economies of scope by data envelopment analysis: comparison of efficient frontiers. International Transactions in Operational Research, 10 (4), 393-402.
[9]. Hajargasht, G. Coelli, T. and Rao, D. S. P., (2008). A dual measure of economies of scope. Economics Letters, 100 (2), 185-188.
[10]. Färe, R. and Karagiannis, G., (2018). Inferring scope economies from the input distance function. Economics Letters, 172, 40-42.
[11]. Chavas, J.-P. Barham, B. and Foltz, J. Kim, K., (2012). Analysis and decomposition of scope economies: R&D at US research universities. Applied Economics, 44 (11), 1387-1404.
[12]. Sahoo, B.K. and Tone, K., (2013). Non-parametric measurement of economies of scale and scope in non-competitive environment with price uncertainty. Omega, 41 (1), 97-111.
[13]. Sengupta, J. and Sahoo, B., (2006) .Scale, Scope, and Capacity Utilization in the Indian Banking Industry. In Efficiency Models in Data Envelopment Analysis, 143-171, Springer.
[14]. Cooper, W.W. Seiford, L. M. and Tone, K., (2007). Economies of Scope and Capacity Utilization. Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software, 381-404.
[15]. Zeinalzadeh Ahranjani, L., Matin, R. K. and Saen, R. F., (2018). Economies of scope in two-stage production systems: A data envelopment analysis approach. RAIRO-Oper. Res. 52 (2), 335-349.
[16]. Zaker Harofte, E., and Hosseinzadeh Saljooghi, F. (2021). Cost-effectiveness and economies of scope on network processes with shared resources and resources recovered from undesirable output. Journal of Modeling in Engineering 19 (67), 135-150.
[17]. Zaker Harofteh, E., and Hosseinzadeh Saljooghi, F., (2023). Investigating the economies of scope and cost effectiveness in manufacturing companies with interval data. International Journal of Computational Intelligence Systems 16 (1),166.
[18]. Panzar, J.C. and Willig, R.D., (1975). Economies of scale and economies of scope in multi-output production. Bell Laboratories economic discussion paper 33.
[19]. Teece, D.J., (1980). Economies of scope and the scope of the enterprise. Journal of Economic Behavior & Organization 1 (3), 223-247.
[20]. Teece, D.J., (1982). Towards an economic theory of the multiproduct firm. Journal of Economic Behavior & Organization 3 (1), 39-63.
[21]. Teece, D.J. Rumelt, R., Dosi, G. and Winter, S., (1994). Understanding corporate coherence: Theory and evidence. Journal of Economic Behavior & Organization, 23 (1), 1-30.
[22]. Kasuya, M., (1986). Economies of scope: Theory and application to banking. BOJ Monetary and Economic Studies, 4, 59-104.
[23]. Grosskopf, S Hayes, K. and Yaisawarng, S., (1992). Measuring economies of diversification: a frontier approach. Journal of business & economic statistics, 10 (4), 453-459.
[24]. Parman, Bryon J., Allen M. Featherstone, and Brian K. Coffey, (2017). Estimating product-specific and multiproduct economies of scale with data envelopment analysis. Agricultural Economics, 48 (4), 523-533.
[25]. Tone, K., (2005). A price-based capacity utilization analysis using DEA. The 2005 fall national conference of operational research society of Japan.
[26]. Evans, D.S. and Heckman, J.J., (1984). A Test for Subadditivity of the Cost Function with an Application to the Bell System. The American Economic Review, 74 (4), 615-623.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.149]