مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال هجدهم، شماره اول (پیاپی ۶۸)، بهار ۰۰، ص ص ۱۰۰-۸۵
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

# تعیین بازده به مقیاس توسط ابرصفحه‌های تکیه‌کننده با نگاه مدیریتی

**صدیقه اصغری‌نیا[1*]، سعید محرابیان[2]، حامد ژیانی رضایی[3]**

۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

۲- استادیار، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

۲- استادیار، گروه ریاضی، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران

رسید مقاله: ۸ فروردین ۱۳۹۹

پذیرش مقاله: ۲۸ مهر ۱۳۹۹

## چکیده

بازده به مقیاس یکی از مفاهیم مهم در اقتصاد است، اما با توجه به تعریف حدی این مفهوم، تنها می‌توان تأثیر تغییرات اندک ورودی را مورد بررسی و قضاوت قرار داد. زارع پیشه و سلیمانی‌دامنه طی یک پژوهش، روشی برای یافتن بازده به مقیاس در بازه‌های متوالی تغییرات ورودی ارایه نمودند. آنها برای این منظور، روش سیمپلکس و مبحث تحلیل حساسیت را مورد استفاده قرار دادند. ایرادی که بر روش فوق وارد است، بهره جستن از جدول بهینه بدون توجه به احتمال وجود جداول بهینه چندگانه می‌باشد. در مقاله حاضر به بیان ایراد روش مذکور پرداخته شده و در ادامه یک روش پیشنهادی با همان رویکرد مدیریتی ولی با استفاده از ابرصفحه‌های سازای مجموعه امکان تولید ارایه گردیده است که ایرادات روش زارع پیشه و سلیمانی‌دامنه را ندارد.

**کلمات کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌ها، بازده به مقیاس، ابرصفحه سازا، روش سیمپلکس.

## ۱ مقدمه

بازده به مقیاس مفهومی است که بهره‌وری یک واحد تصمیم‌گیرنده (DMU) را نشان می‌دهد. این مفهوم می‌تواند اطلاعات مفیدی در رابطه با اندازه‌ی بهینه یک واحد در اختیار ما قرار دهد [۱]. از بازده به مقیاس در اقتصاد تحت عنوان کشسانی نام برده می‌شود[۲، ۳]. تعیین نوع و میزان کشسانی در اقتصاد و مدیریت حایز اهمیت فراوانی است، چراکه به مدیران در جهت تصمیم‌گیری به منظور تغییرات ورودی کمک شایانی می‌کند. تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) روشی ناپارامتری است که می‌تواند ما را در یافتن نوع و میزان بازده به مقیاس واحدها کمک کند. این روش که اولین‌بار توسط چارنز و همکاران [۴] ارایه گردید، صرفاً روشی برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده بود. پس از آن، این روش به‌طور گسترده‌ای توسعه‌یافته و مورد استفاده محققین قرار گرفت. مفهوم بازده به مقیاس اولین‌بار توسط بنکر و همکاران [۵] وارد DEA گردید. آنها با نپذیرفتن اصل بازده به مقیاس

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: sedighe.asghariniya@yahoo.com



[ Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.7.0 ]

[ DOI: 10.52547/jamlu.18.1.85 ]

ثابت در تعریف چارنز و همکاران [۴]، مبحث بازده به مقیاس متغیر و چگونگی محاسبه آن را مطرح کردند. در این مفهوم، چنانچه ضریب تغییرات متناسب خروجی از میزان تغییرات متناسب ورودی بیشتر باشد (کشسانی بزرگ‌تر از ۱)، بازده به مقیاس واحد تحت ارزیابی افزایشی است و چنانچه کمتر باشد (کشسانی کوچکتر از ۱)، بازده به مقیاس کاهشی است؛ در غیر این صورت بازده به مقیاس ثابت خواهد بود (کشسانی برابر ۱ است). از مفهوم بازده به مقیاس ثابت در مقالات DEA تحت عنوان بیشترین بهره‌وری نیز یاد شده است. نظر به اهمیت بالای بازده به مقیاس در مدیریت و اقتصاد، تحقیقات بسیاری در این زمینه صورت گرفته است اما علی‌رغم آن که بسیاری داده‌ها در دنیای واقعی نادقیق (مانند داده‌های فازی یا بازه‌ای) هستند تاکنون مقالات کمی مانند حاتمی-ماربینی و همکاران [۶] به بحث بازده به مقیاس واحدهای تصمیم‌گیرنده در حضور داده‌های نادقیق پرداخته‌اند. هر چند مقالات زیادی در مبحث تحلیل پوششی داده‌های نادقیق موجود است ([۷–۱۱] نمونه‌هایی از این دست می‌باشد). برای تعیین بازده به مقیاس، تغییرات حدی ورودی واحد تحت ارزیابی مدنظر می‌باشد [۱۲]؛ به عبارت دیگر، بازده به مقیاس در یک همسایگی کوچک از ورودی‌ها تعیین می‌گردد. از آنجا که بازده به مقیاس یک مفهوم مهم در تصمیم‌گیری‌های اقتصادی است بررسی نوع و میزان بازده به مقیاس در صورت تغییرات غیرحدی می‌تواند جالب و پراهمیت باشد. زارع‌پیشه و سلیمانی‌دامنه [۱۳] تعیین نوع و میزان بازده به مقیاس را برای یک واحد کارا تا رسیدن به وضعیت بازده به مقیاس ثابت، مورد تحقیق قرار دادند. آنها برای این منظور از روش سیمپلکس و تحلیل حساسیت جدول بهینه بهره جستند که دارای نقطه ضعفی است. در مقاله حاضر ما به ضعف روش مبتنی بر جدول سیمپلکس اشاره کرده و با مثالی آن را مورد بررسی قرار داده‌ایم. در ادامه، برای گریز از مشکلی که به هنگام استفاده از روش سیمپلکس محتمل است، روشی مبتنی بر ابرصفحه‌های سازای مجموعه امکان تولید (PPS)، پیشنهاد داده‌ایم. در روش پیشنهادی با توجه به نوع بازده به مقیاس واحد تحت بررسی، تغییر وضعیت آن با افزایش/کاهش بردار ورودی، بر روی ابرصفحه دربرگیرنده تا مرز تعویض ابرصفحه (تغییر میزان و یا نوع بازده به مقیاس) دنبال می‌گردد. با تعویض ابرصفحه چنانچه هنوز به مرز مشترک BCC و CCR (وضعیت بازده به مقیاس ثابت) نرسیده باشیم، فرآیند با واحد مجازی جدید که به آن رسیده‌ایم تکرار می‌شود. پیش از این شاهوردی و همکاران [۱۴] به بررسی شعاع پایداری بازده به مقیاس پرداخته‌اند؛ لیکن با رسیدن به مرز تغییر ابرصفحه متوقف گردیده و پا را فراتر ننهاده‌اند که از این جهت مقاله حاضر گامی نوین برداشته است.

سازمان‌دهی این مقاله چنین است. در بخش ۲ اشاره‌ی کوتاهی بر مجموعه امکان تولید و تعریف بازده به مقیاس خواهیم داشت. بخش ۳ مروری بر روش زارع‌پیشه و سلیمانی‌دامنه [۱۳] به همراه یک مثال خواهد بود. در بخش ۴، پس از ارایه مقدمات لازم، روش پیشنهادی و الگوریتم آن خواهد آمد. در بخش ۵، ابتدا مثالی برای تبیین روش پیشنهاد شده خواهد آمد و سپس به منظور مقایسه روش پیشنهادی با روش زارع‌پیشه و سلیمانی‌دامنه [۱۳]، مثال ارایه شده در بخش ۴ مورد استفاده قرار گرفته است. آخرین بخش نیز دربرگیرنده نتایج می‌باشد.



[ Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29 ]
[ DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.7.0 ]
[ DOI: 10.52547/jamlu.18.1.85 ]

## ۲ مجموعه امکان تولید و بازده به مقیاس

یک مجموعه‌ی داده شامل $n$ واحد تصمیم‌گیرنده $\mathrm{DMU}_j$، $j=1,\ldots,n$ را درنظر بگیرید. هر یک از این واحدها به منظور تولید یک بردار خروجی $Y_j \in \mathbb{R}^s$، یک بردار ورودی $X_j \in \mathbb{R}^m$ مصرف می‌کند. واحد نمونه‌ی $j$ام با بردار $(X_j, Y_j)$ نیز مشخص می‌گردد. اولین و اصلی‌ترین گام در روش DEA، قبل از پرداختن به بحث‌های مختلف، مشخص کردن مجموعه امکان تولید است. مجموعه امکان تولید عبارت است از تمام واحدهایی که می‌توانند براساس تکنولوژی پذیرفته شده وجود داشته باشند. پنج اصل موضوعه وجود دارد که هر تکنولوژی با پذیرش برخی از آنها یک مجموعه امکان تولید تعریف می‌کند. اولین اصل موضوع که در هر تکنولوژی پذیرفته شده است اصل شمول مشاهدات است و به موضوع تعلق کلیه واحدهای مشاهده شده به مجموعه امکان تولید اشاره دارد. سه اصل بعدی که هر یک از آنها بسته به تکنولوژی تعریف شده، می‌توانند پذیرفته شوند یا نه، عبارتند از اصول موضوعه امکان پذیری، بازده به مقیاس ثابت و تحدب. آخرین اصل موضوع نیز که در ساختن کلیه مجموعه‌های امکان تولید در نظر گرفته می‌شود، اصل موضوع کمینه برونیابی است. این اصل بیانگر آن است که PPS کوچک‌ترین مجموعه‌ای است که با پذیرش چهار اصل اول می‌تواند ساخته شود [۱۵]. بنکر و همکاران [۵]، با عدم پذیرش اصل بازده به مقیاس ثابت، مجموعه امکان تولید $T_v$ را به فرم زیر معرفی کردند.

$$T_v = \left\{(X,Y) \,|\, X \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j,\ Y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j,\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0,\ j=1,\ldots,n\right\} \qquad (1)$$

مسأله‌ی تعیین بازده به مقیاس واحدهای تصمیم‌گیرنده، موضوعی است که پس از آن در DEA مطرح گردید. بنکر [۱۶] بازده به مقیاس را برای یک واحد کارای قوی (شامل یک ورودی و یک خروجی) تعریف کرده و روشی برای تعیین آن ارایه داد. بر مبنای تعریف مذکور و با درنظرگرفتن یک واحد کارای قوی، ابتدا باید روابط حدی (۲) محاسبه گردد.

$$\gamma^- = \lim_{\beta \to 1^-} \frac{\alpha(\beta)-1}{\beta-1},\ \gamma^+ = \lim_{\beta \to 1^+} \frac{\alpha(\beta)-1}{\beta-1} \qquad (2)$$

در روابط فوق، $\beta$ ضریب انبساط و انقباض ورودی‌های واحد تحت ارزیابی (مثلاً $\mathrm{DMU}_p$) است و $\alpha(\beta)$، حداکثر میزان افزایش خروجی $\mathrm{DMU}_p$ به ازای $\beta$ برابرشدن ورودی‌ها است؛ یعنی $\alpha(\beta) = \max\{\alpha \,|\, (\beta X_p, \alpha Y_p) \in T_v\}$.

سپس، $\mathrm{DMU}_p$ دارای بازده به مقیاس افزایشی است اگر $\gamma^- > 1, \gamma^+ > 1$ و دارای بازده به مقیاس کاهشی است اگر $\gamma^- < 1, \gamma^+ < 1$، در غیر این‌صورت بازده به مقیاس ثابت دارد. از آنجا که بازده به مقیاس برای واحد کارای قوی محاسبه می‌گردد، واضح است که $\alpha(1) = 1$ و $0 \leq \gamma^+ \leq \gamma^- < \infty$ (لم ۲ و نتیجه ۲ را در [۱۲] ببینید). لذا در بیانی دیگر می‌توان گفت $\mathrm{DMU}_p$ دارای بازده به مقیاس افزایشی است، اگر $\gamma^+ > 1$ و دارای بازده به مقیاس کاهشی است اگر $\gamma^- < 1$؛ در غیر این‌صورت بازده به مقیاس آن ثابت است.



[ Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29 ]
[ DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.7.0 ]
[ DOI: 10.52547/jamlu.18.1.85 ]

از آنجا که تعریف فوق برای مجموعه‌های امکان تولید دو بعدی ارایه شده بود، بعدها بنکر و ترال [۱۷] تعریف دیگری را (براساس تعریف کشسانی در متون اقتصادی) برای مجموعه‌های امکان تولید با چند ورودی و چند خروجی ارایه دادند. آنها برای تعیین وضعیت $\mathrm{DMU}_p$، ابتدا از اشتراک مجموعه امکان تولید $T_v$ با مجموعه $\{(x,y): X = xX_p, Y = yY_p, x,y > ۰\}$ و تصویر مجموعه به‌دست آمده بر صفحه $x,y$، یک مجموعه دوبعدی یافته و نام آن را $\overline{\tau}$ نهادند. یعنی:

$$\overline{\tau} = \{(x,y) : xX_p \geq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j X_j,\ yY_p \geq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j Y_j,\ \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j = ۱,\ \lambda_j \geq ۰\}$$

سپس شیب خط مماس بر $\overline{\tau}$ در $(۱,۱)$ را ملاک تعیین بازده به مقیاس قرار دادند. چنانچه خط مماس یکتا نباشد، کم‌ترین و بیش‌ترین شیب را تحت عنوان $\rho^+$ و $\rho^-$ به‌دست آورده آنگاه $\mathrm{DMU}_p$ دارای بازده به مقیاس افزایشی است، اگر $\rho^- > ۱, \rho^+ > ۱$ و دارای بازده به مقیاس کاهشی است، اگر $\rho^- < ۱, \rho^+ < ۱$، درغیراین‌صورت بازده به مقیاس ثابت دارد. چنانچه این واحد بر ابرصفحه یکتای $\mathbf{u}Y - \mathbf{v}X + u_{\cdot} = ۰$ قرار گرفته باشد، شیب مماس مذکور به فرم $\frac{\mathbf{v}X_p}{\mathbf{u}Y_p}$ می‌باشد. پس اگر $\frac{\mathbf{v}X_p}{\mathbf{u}Y_p} > ۱$، بازده به مقیاس $\mathrm{DMU}_p$ افزایشی و اگر $\frac{\mathbf{v}X_p}{\mathbf{u}Y_p} < ۱$، بازده به مقیاس آن کاهشی است؛ در غیر این صورت بازده به مقیاس، ثابت خواهد بود.

قابل ذکر است که در هر صورت تعریف بازده به مقیاس تنها برای واحدهای کارا ارایه گردیده است. گرچه در برخی مقالات برای تعیین بازده به مقیاس واحدهای ناکارا از تصویر آنها بر روی مرز کارای قوی استفاده گردیده است، اما این کار به لحاظ تفاوت ماهیت میان مدل‌های مختلف ارزیابی، صحیح نیست. در ادامه‌ی مقاله، بر واحدهای کارای قوی متمرکز شده و $\mathrm{DMU}_p$ را به عنوان یک واحد کارای قوی درنظر خواهیم گرفت.

## ۳ روش زارع‌پیشه و سلیمانی‌دامنه

در این بخش ابتدا نگاهی به روش زارع‌پیشه و سلیمانی‌دامنه [۱۳] داشته و سپس با یک مثال، نقطه ضعف آن‌را نشان می‌دهیم. فرم پوششی مدل BCC با ماهیت خروجی برای ارزیابی $\mathrm{DMU}_p$ را درنظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \max\quad & \alpha \\ \text{s.t.}\quad & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j X_j \leq X_p \\ & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j Y_j \geq \alpha Y_p \\ & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j = ۱ \\ & \lambda_j \geq ۰,\ j = ۱,\ldots,n \end{aligned} \qquad (۳)$$

از آنجا که (۳) یک مسأله برنامه‌ریزی خطی است، روش سیمپلکس برای آن قابل استفاده است. زارع‌پیشه و سلیمانی‌دامنه [۱۳]، از این نکته بهره جسته و روش خود را مطرح کردند. روش آنها به ما کمک می‌کند با بهره‌گیری از تحلیل حساسیت، بازده به مقیاس واحد تحت ارزیابی را تا رسیدن به وضعیت بازده به مقیاس ثابت



[ Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29 ]
[ DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.7.0 ]
[ DOI: 10.52547/jamlu.18.1.85 ]

به‌دست آوریم. واحدهایی که دارای بازده به مقیاس ثابت هستند، واحدهایی با بیشترین بهره‌وری (MPSS) شناخته شده و از این رو در علم اقتصاد و مدیریت از اهمیت به‌سزایی برخوردار هستند. این روش در دو گام دنبال می‌شود. در اولین گام، افزایش ورودی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور بردار سمت راست مدل (۳) به اندازه $\delta$ و در راستای بردار $(X_p^T, \mathbf{0}^T, 0)^T$ آشفته می‌گردد (در حقیقت بردار ورودی به‌طور متناسب افزایش یافته و در $(1+\delta)$ ضرب می‌گردد). مقدار بهینه تابع هدف مسأله آشوب که به فرم $\alpha^* = 1 + m\delta$ می‌باشد، حداکثر نسبت افزایش خروجی به افزایش ورودی را نشان می‌دهد. به عبارت دیگر، اگر ورودی را $\delta$ برابر افزایش دهیم، خروجی $m\delta$ برابر افزایش خواهد داشت. اکنون اگر $m > 1$، بازده به مقیاس افزایشی است و همین روند پس از به‌روزرسانی جدول بهینه، دنبال خواهد شد. در غیر این صورت، در گام دوم اثر کاهش متناسب ورودی مورد بررسی قرار می‌گیرد. این کار به‌طور مشابه ولی با آشفته کردن سمت راست در راستای $(-X_p^T, \mathbf{0}^T, 0)^T$ انجام می‌گیرد. (در حقیقت بردار ورودی به‌طور متناسب کاهش یافته و در $(1-\delta)$ ضرب می‌گردد). در این حالت، پس از یافتن جدول نهایی مسأله آشوب، مقدار بهینه تابع هدف برابر خواهد بود با $\alpha^* = 1 - m\delta$. آنگاه در صورت وجود $\delta > 0$ی که مسأله به ازای آن شدنی باشد، اگر $m < 1$ بازده به مقیاس کاهشی است، اما اگر $m \geq 1$ و یا به ازای هر $\delta > 0$ مسأله نشدنی باشد در این صورت بازده به مقیاس واحد نهایی ثابت است. در صورت به‌دست آمدن بازه‌ای برای $\delta$ که مسأله برای آن شدنی باشد، حدنصاب $\delta$ بر داده‌های جدول بهینه مسأله آشوب اعمال شده و فرآیند مجدداً و به منظور بررسی اثر تغییرات بیشتر ورودی در بازه‌های بعدی، تا زمان رسیدن به وضعیت بازده به مقیاس ثابت تکرار می‌گردد.

روش آنها در عین حال که جالب توجه است اما به دلیل نپرداختن به مسأله وجود پایه‌های بهینه متفاوت دچار مشکل می‌باشد. اگر واحدی دارای چندین پایه بهینه باشد (این وضعیت می‌تواند در حالت تباهیدگی جواب بهینه و یا وجود جواب‌های بهینه چندگانه اتفاق بیافتد) ممکن است پس از آشفته کردن بردار سمت راست، با برخی از این پایه‌ها، جدول بهینه نشدنی و با برخی دیگر شدنی گردد. در این صورت چنانچه پایه نهایی که در اختیار است با آشفته کردن نشدنی گردد، احتمال دارد تعداد بسیاری پایه تعویض گردد تا بتوانیم به پایه‌ای شدنی برای مسأله آشوب دست یابیم و یا به این نتیجه برسیم که با آشفته کردن سمت راست، مسأله جدید به ازای هر $\delta > 0$ نشدنی است. قابل ذکر است که با توجه به رویکرد مدیریتی آن مقاله، فرآیند مذکور چندین مرتبه تکرار می‌گردد که در هر یک از مراحل بعدی نیز ممکن است به چنین مشکلی برخورد کنیم. برای توضیح مطلب، مثال زیر را درنظر بگیرید.

**مثال:** هشت واحد تصمیم‌گیرنده با دو ورودی و یک خروجی را در نظر بگیرید. اطلاعات مربوط به این واحدها در جدول ۱ آمده و مجموعه امکان تولید مربوط به آنها در شکل ۱ به تصویر کشیده شده است. با درنظر گرفتن واحد کارای قوی $\mathrm{DMU}_4$ به منظور تعیین وضعیت بازده به مقیاس این واحد به روش ذکرشده، ابتدا باید جدول بهینه مدل زیر را به‌دست آوریم.



[ Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29 ]
[ DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.7.0 ]
[ DOI: 10.52547/jamlu.18.1.85 ]

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \alpha \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{8} \lambda_j x_{1j} + s_1^- = 6, \\
& \sum_{j=1}^{8} \lambda_j x_{2j} + s_2^- = 15, \\
& \sum_{j=1}^{8} \lambda_j y_j - 9/5\alpha - s^+ = 0 \\
& \sum_{j=1}^{8} \lambda_j = 1 \\
& \lambda_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 8
\end{aligned}
$$

پس از حل مسأله فوق به روش سیمپلکس، مشاهده می‌شود که مسأله دارای جواب بهینه چندگانه بوده و لذا دارای چندین پایه بهینه است؛ از جمله می‌توان به پایه‌های متناظر با بردارهای پایه $(\lambda_1, \lambda_5, \alpha, \lambda_4)^T$ و $(\lambda_1, \lambda_2, \alpha, \lambda_4)^T$ و $(\lambda_1, \lambda_8, \alpha, \lambda_4)^T$ اشاره کرد. روش زارع‌پیشه و سلیمانی‌دامنه [۱۳] را با درنظرگرفتن پایه $B_1$ متناظر با $(\lambda_1, \lambda_5, \alpha, \lambda_4)^T$ شروع می‌کنیم. معکوس پایه عبارت است از:

$$
B_1^{-1} = \begin{bmatrix}
1/333 & -1/000 & 0/000 & 7/000 \\
-3/333 & 2.000 & 0/000 & -10/000 \\
0/123 & 0/000 & -0/105 & 0/263 \\
2/000 & -1/000 & 0/000 & 4/000
\end{bmatrix}
$$

در این صورت با آشفته کردن بردار سمت راست مدل به اندازه $\delta(6,15,0,0)^T$، بردار $\mathbf{b}$ به صورت تغییر یافته $\mathbf{b}' = (6+6\delta, 15+15\delta, 0, 1)^T$ در آمده و خواهیم داشت:

$$
(\lambda_1, \lambda_5, \alpha, \lambda_4)^T = B_1^{-1}\mathbf{b}' = (0-7\delta, 0+10\delta, 1+0/74\delta, 1-3\delta)^T
$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، پایه بهینه $B_1$ برای مسأله آشوب به ازای هر $\delta > 0$ نشدنی است. با به‌کارگیری روش سیمپلکس دوگان و خروج $\lambda_1$ از پایه، در جدول بعد داریم:

$$
(\lambda_8, \lambda_5, \alpha, \lambda_4)^T = (0+7\delta, 0-18\delta, 1+0/74\delta, 1+11\delta)^T
$$

با خروج $\lambda_5$ از پایه، در جدول بعدی داریم:

$$
(\lambda_8, s_2^-, \alpha, \lambda_4)^T = (0-2\delta, 0+9\delta, 1+0/74\delta, 1+2\delta)^T
$$

و درنهایت با خروج $\lambda_8$ از پایه، جواب شدنی $(s_1^-, s_2^-, \alpha, \lambda_4)^T = (6-2\delta, 0+15\delta, 1, 1)^T$ حاصل می‌شود.

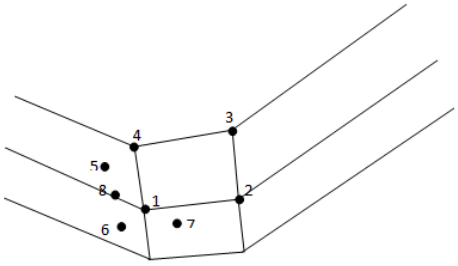
همان‌طور که ملاحظه شد، با انتخاب پایه $B_1$، نیاز به تعویض ۴ پایه بود تا به پایه بهینه شدنی دست یابیم. اما در آخرین جدول $\alpha^* = 1+0\delta$. لذا باید برای این واحد، کاهش ورودی نیز بررسی گردد که برای آن نیز امکان برخورد به چنین مشکلی، پیش‌بینی می‌شود. قابل ذکر است که این اولین بازه از تغییرات بوده و برای تعیین بازه‌های بعدی نیز، احتمال برخورد با این مشکل وجود دارد.



[ Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29 ]
[ DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.7.0 ]
[ DOI: 10.52547/jamlu.18.1.85 ]

**جدول ۱.** هشت واحد تصمیم‌گیرنده با دو ورودی و یک خروجی

| *DMU* | ورودی ۱ | ورودی ۲ | خروجی | کارایی |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۳ | ۱۰ | ۶ | ۱/۰۰۰ |
| ۲ | ۱۰ | ۳ | ۶ | ۱/۰۰۰ |
| ۳ | ۱۵ | ۶ | ۹/۵ | ۱/۰۰۰ |
| ۴ | ۶ | ۱۵ | ۹/۵ | ۱/۰۰۰ |
| ۵ | ۴/۵ | ۱۳ | ۷/۷۵ | ۱/۰۰۰ |
| ۶ | ۳ | ۱۱ | ۵ | ۱/۰۰۰ |
| ۷ | ۶/۵ | ۱۱/۵ | ۵ | ۰/۷۲۲ |
| ۸ | ۳ | ۱۲ | ۶ | ۱/۰۰۰ |




**شکل ۱.** مجموعه امکان تولید داده‌های جدول ۱

## ٤ روش پیشنهادی جدید

همان‌طور که پیش از این ذکر شد، روش زارع‌پیشه و سلیمانی‌دامنه [۱۳] به دلیل استفاده از تحلیل حساسیت جدول بهینه، در صورت وجود پایه‌های بهینه چندگانه، ممکن است دچار مشکل گردد. روش پیشنهادی در این مقاله برای مواجه نشدن با مشکل مذکور، استفاده از ابرصفحه‌های سازای فعال در $\mathrm{DMU}_p$ را پیشنهاد می‌دهد. معرفی و به‌کارگیری روش مستلزم مقدماتی است که در ادامه به آنها می‌پردازیم و سپس روش جدید معرفی می‌گردد.

### ٤-١ مقدمات

در ادامه برای راحتی کار، از نمادهای $\beta = ۱ \pm \delta$ و $\alpha_{(۱\pm\delta)}$ استفاده خواهیم کرد که در آن $\delta$ عددی مثبت است. به عبارت دیگر،

$$\alpha_{(۱+\delta)} = \max\ \ \alpha : ((۱+\delta)X_p, \alpha Y_p) \in \mathrm{PPS}$$
$$\alpha_{(۱-\delta)} = \max\ \ \alpha : ((۱-\delta)X_p, \alpha Y_p) \in \mathrm{PPS}$$

**قضیه ۱.** فرض کنید $\bar{\mathbf{u}}Y - \bar{\mathbf{v}}X + \bar{u}_{\circ} = ۰$ یک ابر صفحه سازای PPS و مار بر $(X_p, Y_p)$ باشد و $\bar{\mathbf{u}}Y_p \neq ۰$. شرط لازم و کافی برای آنکه $((۱\pm\delta)X_p, \alpha Y_p)$ به ازای $\delta \leq ۰$ بر روی این ابرصفحه واقع شود آن است که رابطه (۴) برقرار باشد. (شکل ۲ را ببینید)



[ Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29 ]
[ DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.7.0 ]
[ DOI: 10.52547/jamlu.18.1.85 ]

$$\alpha = 1 \pm \delta \frac{\overline{\mathbf{v}} X_p}{\overline{\mathbf{u}} Y_p} \qquad (۴)$$

**اثبات.** ابتدا فرض کنید $\delta \leq 0$ دلخواه بوده و $((1 \pm \delta)X_p, \alpha Y_p)$ بر روی ابرصفحه $\overline{\mathbf{u}}Y - \overline{\mathbf{v}}X + \overline{u}_0 = 0$ قرار داشته باشد. لذا $\overline{\mathbf{u}}\alpha Y_p - \overline{\mathbf{v}}(1 \pm \delta)X_p + \overline{u}_0 = 0$ یا به عبارت دیگر:

$$(\overline{\mathbf{u}}Y_p - \overline{\mathbf{v}}X_p + \overline{u}_0) + ((\alpha - 1)\overline{\mathbf{u}}Y_p \mp \delta\overline{\mathbf{v}}X_p) = 0$$

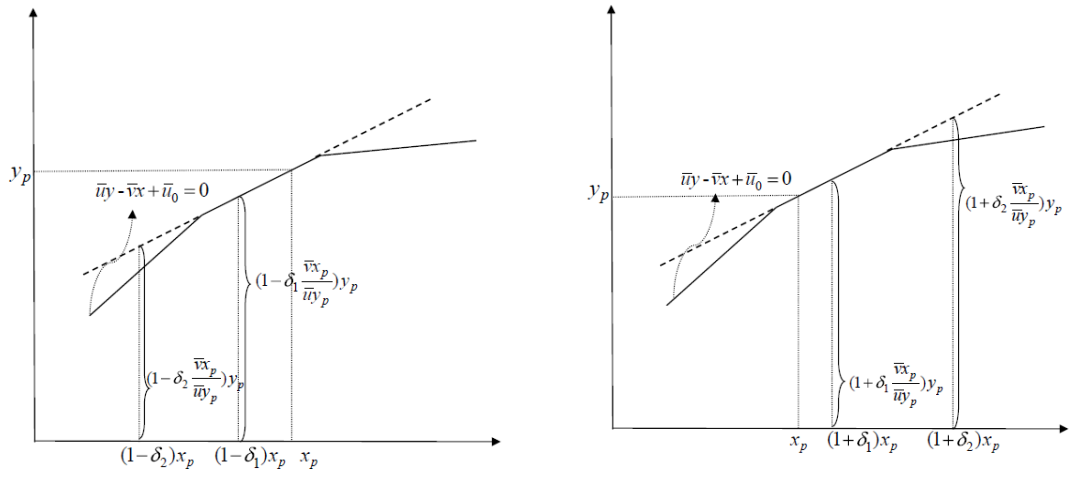
از طرفی $\overline{\mathbf{u}}Y - \overline{\mathbf{v}}X + \overline{u}_0 = 0$، پس:

$$\alpha = 1 \pm \delta \frac{\overline{\mathbf{v}} X_p}{\overline{\mathbf{u}} Y_p}$$

حال فرض کنید $\delta \leq 0$ بوده و $\alpha$ در (۴) صدق کند. در این‌صورت:

$$\overline{\mathbf{u}}\alpha Y_p - \overline{\mathbf{v}}(1 \pm \delta)X_p + \overline{u}_0 =$$
$$\overline{\mathbf{u}}\left(1 \pm \delta \frac{\overline{\mathbf{v}}X_p}{\overline{\mathbf{u}}Y_p}\right)Y_p - \overline{\mathbf{v}}(1 \pm \delta)X_p + \overline{u}_0 =$$
$$(\overline{\mathbf{u}}Y_p - \overline{\mathbf{v}}X_p + \overline{u}_0) \pm \delta\overline{\mathbf{v}}X_p \mp \delta\overline{\mathbf{v}}X_p = 0$$

و اثبات کامل است. □




(ب) (الف)

**شکل ۲.** واحدهای تغییریافته در راستای افزایش متناسب ورودی (الف) و کاهش متناسب ورودی (ب) واقع بر ابرصفحه هستند و الزامی ندارد که به PPS متعلق باشند.

**نتیجه ۱.** اگر ورودی $X_p$ به میزان متناسب $\delta X_p$ افزایش (کاهش) یابد، خروجی $Y_p$ نیز به میزان متناسب $m\delta Y_p$ افزایش (کاهش) می‌یابد.

**برهان.** کافیست در رابطه (۴) قرار دهیم $m = \frac{\overline{\mathbf{v}}X_p}{\overline{\mathbf{u}}Y_p}$. □



[ Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29 ]
[ DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.7.0 ]
[ DOI: 10.52547/jamlu.18.1.85 ]

**نکته:** در مشابهت با روش بنکر و ترال [۱۷]، این همان شیب خط حاصل از تصویر ابرصفحه $\bar{\mathbf{u}}Y - \bar{\mathbf{v}}X + \bar{u}_{\cdot} = 0$ در $\bar{\tau}$ است که در مقدمه ذکر شد.

**قضیه ۲.** اگر $(X_p, Y_p)$ در معادله ابرصفحه $\bar{\mathbf{u}}Y - \bar{\mathbf{v}}X + \bar{u}_{\cdot} = 0$ صدق کند که برای آن $\bar{u}_{\cdot} = 0$، در این صورت دارای بازده به مقیاس ثابت خواهد بود.

**اثبات.** طبق فرض قضیه، ابرصفحه مذکور به فرم $\bar{\mathbf{u}}Y - \bar{\mathbf{v}}X = 0$ می‌باشد، لذا $\mathrm{DMU}_p$ بر مرز مشترک CCR و BCC قرار دارد و در نتیجه دارای بازده به مقیاس ثابت است. □

**قضیه ۳.** فرض کنید $\bar{\mathbf{u}}Y - \bar{\mathbf{v}}X + \bar{u}_{\cdot} = 0$ یک ابر صفحه سازای PPS و دربرگیرنده $(X_p, Y_p)$ باشد که برای آن $\bar{u}_{\cdot} \neq 0$ و $\bar{\mathbf{u}}Y_p = 0$. در این صورت امکان کاهش و یا افزایش متناسب ورودی $X_p$ بر این ابرصفحه وجود ندارد. (در بیان خاص‌تر، با کاهش متناسب ورودی از PPS خارج می‌شویم)

**اثبات.** به برهان خلف فرض کنید $\delta > 0$ی وجود داشته باشد که برای آن واحد مجازی $((1+\delta)X_p, \alpha Y_p)$ (یا $((1-\delta)X_p, \alpha Y_p)$) بر ابرصفحه مذکور واقع باشد. در این صورت باید داشته باشیم:

$$\bar{\mathbf{u}}\alpha Y_p - \bar{\mathbf{v}}(1 \pm \delta)X_p + \bar{u}_{\cdot} = -\bar{\mathbf{v}}(1 \pm \delta)X_p + \bar{u}_{\cdot} = -\bar{\mathbf{v}}(\pm\delta)X_p = 0 \rightarrow -\bar{\mathbf{v}}X_p = 0$$

اما این غیرممکن است، زیرا دراین‌صورت از $\bar{\mathbf{u}}Y - \bar{\mathbf{v}}X + \bar{u}_{\cdot} = 0$ نتیجه می‌شود $\bar{u}_{\cdot} = 0$ که تناقض است. □

**نتیجه ۲.** اگر برای برخی ابرصفحه‌های مار بر $(X_p, Y_p)$ داشته باشیم $\mathbf{u}Y_p = 0$، در این صورت امکان کاهش متناسب ورودی $X_p$ درون PPS وجود ندارد.

**برهان.** فرض کنید ابرصفحه سازای $A_\ell : \mathbf{u}_\ell Y - \mathbf{v}_\ell X + u_{\cdot\ell} = 0$ در $(X_p, Y_p)$ فعال باشد و $\mathbf{u}_\ell Y_p = 0$ و در نتیجه $-\mathbf{v}_\ell X_p + u_{\cdot\ell} = 0$. به خلف فرض کنید $\alpha \geq 0$ و $\delta > 0$ی وجود دارد که برای آن، $((1-\delta)X_p, \alpha Y_p) \in \mathrm{PPS}$. پس با درنظر گرفتن شرط تعلق واحدها به PPS باید داشته باشیم $\mathbf{u}_\ell \alpha Y_p - \mathbf{v}_\ell(1-\delta)X_p + u_{\cdot\ell} \leq 0$. اما $\mathbf{u}_\ell Y_p = 0$ و نیز $-\mathbf{v}_\ell X_p + u_{\cdot\ell} = 0$ نتیجه می‌دهد $\mathbf{v}_\ell \delta X_p \leq 0$. اکنون با توجه به اینکه $\mathbf{v}_\ell X_p > 0$، باید $\delta \leq 0$ که خلاف فرض خلف است و اثبات کامل است. □

**قضیه ٤.** ابرصفحه سازای $\bar{\mathbf{u}}Y - \bar{\mathbf{v}}X + \bar{u}_{\cdot} = 0$ مار بر $(X_p, Y_p)$ را در نظر بگیرید که برای آن $\bar{\mathbf{u}}Y_p \neq 0$. مدل (۵) بزرگ‌ترین $\delta \geq 0$یی را می‌دهد که واحد $((1 \pm \delta)X_p, (1 \pm \delta \frac{\bar{\mathbf{v}}X_p}{\bar{\mathbf{u}}Y_p})Y_p)$ متعلق به PPS بوده و بر این ابرصفحه قرار بگیرد.

$$\begin{aligned} \max \quad & \delta \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \leq (1 \pm \delta)X_p \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \geq (1 \pm \delta \frac{\bar{\mathbf{v}}X_p}{\bar{\mathbf{u}}Y_p})Y_p \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n \end{aligned} \qquad (۵)$$



[ Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29 ]
[ DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.7.0 ]
[ DOI: 10.52547/jamlu.18.1.85 ]

**برهان.** مدل (۵) شدنی است زیرا $(\delta = ۰, \lambda_p = ۱, \lambda_j = ۰; j \neq p)$ یک جواب شدنی برای آن است. طبق قضیه ۱، واحد مجازی $((۱\pm\delta)X_p, (۱\pm\delta\frac{\bar{\mathbf{v}}X_p}{\bar{\mathbf{u}}Y_p})Y_p)$ بر ابرصفحه $\bar{\mathbf{u}}Y - \bar{\mathbf{v}}X + \bar{u}_{\cdot} = ۰$ قرار دارد؛ از طرف دیگر، محدودیت‌های مدل (۵) تعلق این واحد به مجموعه امکان تولید را تضمین می‌کند و اثبات تمام است. □

**قضیه ۵.** فرض کنید $k$ ابرصفحه سازا به شکل $A_i : \mathbf{u}_i Y - \mathbf{v}_i X + u_{\cdot i} = ۰$ که $i \in \{۱,\ldots,k\}$، در $(X_p, Y_p)$ فعال باشند و نیز $((۱+\delta)X_p, (۱+m^i\delta)Y_p)$ بیانگر واحد مجازی واقع بر ابرصفحه نوعی $A_i$ باشد. در این صورت برای هر $\delta > 0$، صرفاً واحدهای مجازی $((۱+\delta)X_p, (۱+m^\ell\delta)Y_p)$ و $((۱-\delta)X_p, (۱-m^h\delta)Y_p)$ می‌توانند متعلق به PPS باشند که در آن $m^\ell = \min\{m^i : i = ۱,\ldots,k\}$ و $m^h = \max\{m^i : i = ۱,\ldots,k\}$.

**اثبات.** فرض کنید $m^\ell = \min\{m^i : i = ۱,\ldots,k\}$ و برای واحد $\mathbf{i}$ داشته باشیم $m^i > m^\ell$. نشان می‌دهیم به‌ازای هر $\delta > ۰$، $((۱+\delta)X_p, (۱+m^i\delta)Y_p) \notin \text{PPS}$. قرار داده $m^i = m^\ell + t$ $(t > ۰)$ و ابرصفحه $A_\ell$ را درنظر می‌گیریم. به فرض خلف اگر $((۱+\delta)X_p, (۱+m^i\delta)Y_p) \in \text{PPS}$، باید داشته باشیم:

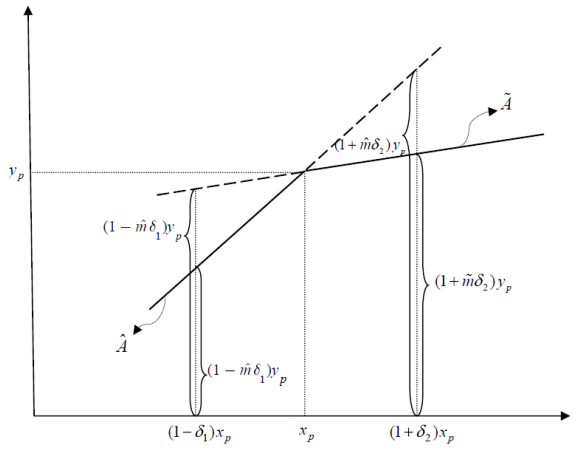
$$\mathbf{u}_\ell(۱+m^i\delta)Y_p - \mathbf{v}_\ell(۱+\delta)X_p + u_{\cdot\ell} \leq ۰$$

حال با جایگزینی $m^i = m^\ell + t$، داریم:

$$[\mathbf{u}_\ell(۱+m^\ell\delta)Y_p - \mathbf{v}_\ell(۱+\delta)X_p + u_{\cdot\ell}] + \mathbf{u}_\ell(t\delta)Y_p \leq ۰$$

اما واقع بودن $((۱+\delta)X_p, (۱+m^\ell\delta)Y_p)$ بر $A_\ell$ صفربودن جمله اول را نتیجه داده و آنگاه با توجه به مثبت بودن $t$ و $\delta$ نتیجه خواهد شد $\mathbf{u}_\ell Y_p \leq ۰$. از دیگر سو، با در نظر گرفتن قضیه ۲ می‌توان نتیجه گرفت که $\mathbf{u}_\ell Y_p \neq ۰$ پس باید $\mathbf{u}_\ell Y_p < ۰$ که تناقض است (زیرا $\mathbf{u}_\ell \geq ۰$ و $Y_p \geq ۰$). برای قسمت دیگر نیز به‌طور مشابه حکم ثابت می‌گردد. □

در واقع قضیه ۵ بیان می‌کند که تنها واحدهای تغییریافته که بر ابرصفحه‌هایی با کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین $m^i$ واقع هستند، امکان تعلق به PPS را دارند. (شکل ۳ را ببینید)




**شکل ۳.** نشان دهنده دو ابرصفحه فعال در $(X_p, Y_p)$ که $\hat{m} > \tilde{m}$



[ Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29 ]
[ DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.7.0 ]
[ DOI: 10.52547/jamlu.18.1.85 ]

## ٤-۲ الگوریتم روش جدید

در این قسمت با درنظرگرفتن مطالب بخش قبل، الگوریتمی برای تعیین نوع و میزان بازده به مقیاس $\mathrm{DMU}_p$ ارایه می‌دهیم. الگوریتم را با نقطه شروع $\mathrm{DMU}_p$ آغاز می‌کنیم.

برای این منظور، قرار می‌دهیم $n=1$ و $(X^{(n)},Y^{(n)})=(X_p,Y_p)$. سپس ابرصفحه‌های سازای PPS را که $(X^{(n)},Y^{(n)})$ برروی آنها قرار دارد، به‌دست می‌آوریم (رجوع کنید به جهانشاهلو [۱۸] و داوطلب[۱۹،۲۰]). فرض کنید $k$ ابرصفحه سازا به شکل $A_i:\ \mathbf{u}_iY-\mathbf{v}_iX+u_{.i}=0$ در $(X^{(n)},Y^{(n)})$ فعال باشند. طبق قضیه ۲، اگر $i\in\{1,\ldots,k\}$ موجود باشد که برای آن $u_{.i}=0$، آنگاه بازده به مقیاس ثابت است؛ در غیر این‌صورت برای هر ابرصفحه $A_i$ که $\mathbf{u}_iY^{(n)}\neq 0$، قرار می‌دهیم $m^i=\frac{\mathbf{v}_iX^{(n)}}{\mathbf{u}_iY^{(n)}}$. سپس بیش‌ترین و کم‌ترین $m^i$ را به‌دست می‌آوریم. $m^i$ها ملاکی برای تعیین نوع و میزان بازده به مقیاس $(X^{(n)},Y^{(n)})$ هستند.

- اگر $m^\ell=\min\{m^i: i=1,\ldots,k\}>1$ آن‌گاه بازده به مقیاس $\mathrm{DMU}_p$ افزایشی بوده و مقدار کشسانی برابر $m^\ell$ است. برای دستیابی به بیشترین میزان ممکن افزایش ورودی که برای آن، این رابطه برقرار است مدل (۶) را حل کرده و بیشترین $\delta$یی را می‌یابیم که $((1+\delta)X^{(n)},(1+m^\ell\delta)Y^{(n)})\in \mathrm{PPS}$ (قضیه ۴ را ببینید).

$$
\begin{aligned}
\delta^* = \max\quad & \delta \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{n}\lambda_jX_j\le(1+\delta)X^{(n)} \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_jY_j\ge(1+m^\ell\delta)Y^{(n)} \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1 \\
& \lambda_j\ge 0,\ j=1,\ldots,n
\end{aligned}
\qquad (۶)
$$

در حقیقت مدل (۶) حداکثر افزایش متناسب ورودی قبل از تغییر میزان کشسانی را می‌دهد. اگر $\delta^*$ مقدار بهینه تابع هدف مدل (۶) باشد، واحد مجازی $((1+\delta^*)X^{(n)},(1+m^\ell\delta^*)Y^{(n)})$ بیانگر واحد مجازی است که با اعمال بیش‌ترین افزایش ممکن ورودی دارای میزان کشسانی $m^\ell$ بوده و پس از آن میزان کشسانی تغییر خواهد کرد (دقت شود که این واحد کارای قوی است). برای بررسی تغییرات متناسب ورودی به میزان بیش‌تر از $\delta^*$، قرار می‌دهیم $(X^{(n+1)},Y^{(n+1)})=((1+\delta^*)X^{(n)},(1+m^\ell\delta^*)Y^{(n)})$ و $n=n+1$ و فرآیند را تا زمانی که $m^\ell\le 1$ (یعنی رسیدن به وضعیت بازده به مقیاس ثابت) تکرار می‌کنیم.

در غیر این صورت:

- درصورتی که برای حداقل یک $i$، $\mathbf{u}_iY^{(n)}=0$، امکان کاهش ورودی $X^{(n)}$ وجود ندارد و بازده به مقیاس واحد $(X^{(n)},Y^{(n)})$ ثابت است. همچنین اگر $m^h=\max\{m^i: i=1,\ldots,k\}\ge 1$، بازده به مقیاس ثابت است. در غیراین‌صورت با حل مدل (۷) بیشترین میزان کاهش بردار ورودی را به‌دست می‌آوریم (رجوع شود به قضیه ۴).



[ Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29 ]
[ DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.7.0 ]
[ DOI: 10.52547/jamlu.18.1.85 ]

$$
\begin{aligned}
\delta^* = \max \quad & \delta \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \le (1-\delta) X^{(n)} \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \ge (1-m^h\delta) Y^{(n)} \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
& \lambda_j \ge 0, \ j = 1,\dots,n
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

در حقیقت مدل (۷) حداکثر کاهش متناسب ورودی قبل از تغییر ابرصفحه را می‌دهد. پس از حل مدل (۷)، اگر $\delta^* = 0$ امکان کاهش متناسب ورودی‌ها وجود ندارد و بازده به مقیاس ثابت خواهد بود، درغیراین‌صورت در بازه تغییرات $[0,\delta^*]$، $(X^{(n)},Y^{(n)})$دارای بازده به مقیاس کاهشی با میزان کشسانی $m^h$ می‌باشد.

در صورت تشخیص بازده به مقیاس کاهشی، در اقدامی مشابه با حالت قبل، قرار می‌دهیم $(X^{(n+1)},Y^{(n+1)}) = ((1-\delta^*)X^{(n)},(1-m^h\delta^*)Y^{(n)})$ و $n = n+1$ و فرآیند را تا زمان رسیدن به بازده به مقیاس ثابت تکرار می‌کنیم.

**نکته.** قابل ذکر است که در تکرار فرآیند، باید ابرصفحه مشترک میان $(X^{(n)},Y^{(n)})$ و $(X^{(n-1)},Y^{(n-1)})$ را از میان ابرصفحه‌های به‌دست آمده در $(X^{(n)},Y^{(n)})$ حذف کنیم چراکه با تغییرات متناسب ورودی $(X^{(n-1)},Y^{(n-1)})$ و با حرکت بر روی این ابرصفحه، به واحد $(X^{(n)},Y^{(n)})$ رسیده‌ایم و امکان تغییر بیشتر در این راستا و بر روی این ابرصفحه وجود ندارد.

## خلاصه الگوریتم

**گام ۱**- قرار دهید $n=1$ و $(X^{(n)},Y^{(n)}) = (X_p,Y_p)$ و $\delta^{(n)} = 0$.

**گام ۲**- ابرصفحه‌های سازای PPS که در $(X^{(n)},Y^{(n)})$ فعال هستند را بیابید. آن‌ها را به‌صورت $A_i : \mathbf{u}_i Y^{(n)} - \mathbf{v}_i X^{(n)} + u_{i} = 0 \quad (i = 1,\dots,k)$ نشان دهید. برای $n>1$، ابرصفحه‌ای را که در $(X^{(n-1)},Y^{(n-1)})$ فعال بود از میان آنها حذف کنید.

**گام ۳**- اگر برای حداقل یک $i \in \{1,\dots,k\}$، $u_{i} = 0$، به گام ۷ بروید.

**گام ٤**- برای هر $i \in \{1,\dots,k\}$ که $\mathbf{u}_i Y^{(n)} \neq 0$ قرار دهید $m^i = \frac{\mathbf{v}_i X^{(n)}}{\mathbf{u}_i Y^{(n)}}$.

**گام ٥**- اگر $m^\ell = \min\{m^i : i = 1,\dots,k\} > 1$ بازده به مقیاس واحد $(X^{(n)},Y^{(n)})$ افزایشی است. مدل (۶) را حل کنید. بازه $n$ام $\delta$ عبارت است از $[\delta^{(n)},\delta^{(n)}+\delta^*]$ و برای آن حداکثر افزایش خروجی به افزایش ورودی برابر است با $m^\ell$. قرار دهید $(x^{n+1},y^{n+1}) = ((1+\delta^*)x^n,(1+m^\ell\delta^*)y^n)$ و $n = n+1$ و به گام ۲ بروید.

**گام ٦**- اگر به ازای $i$ی، $\mathbf{u}_i Y^{(n)} \neq 0$، به گام۷ بروید؛ اگر $m^h = \min\{m^i : i = 1,\dots,k\} < 1$، مدل (۷) را حل کنید و در غیر این صورت به گام ۷ بروید. اگر $\delta^* = 0$ به گام۷ بروید، در غیر این صورت بازه $n$ام $\delta$



[ Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29 ]
[ DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.7.0 ]
[ DOI: 10.52547/jamlu.18.1.85 ]

عبارت است از $[\delta^{(n)}, \delta^{(n)} + \delta^*]$ و برای آن حداکثر کاهش خروجی به کاهش ورودی برابر است با $m^h$. قرار دهید $(X^{(n+1)}, Y^{(n+1)}) = ((1-\delta^*)X^{(n)}, (1-m^h\delta^*)Y^{(n)})$ و $n = n+1$ و به گام ۲ بروید.

**گام ۷**- بازده به مقیاس ثابت است؛ توقف کنید.

## ۵ مثال‌ها

در این بخش ابتدا مثالی برای تبیین روش ارایه‌شده، آورده و سپس به منظور مقایسه روش پیشنهادی با روش زارع‌پیشه و سلیمانی‌دامنه [۱۳]، مثالی می‌آوریم.

### ۵-۱ مثالی برای تبیین روش پیشنهادی

هفت واحد تصمیم‌گیرنده هر یک شامل یک ورودی و یک خروجی در نظر بگیرید. مقادیر ورودی وخروجی واحدها به همراه کارایی آنها در جدول ۲ آمده است و مجموعه امکان تولید BCC مرتبط با این واحدها درشکل ۴ ترسیم شده است.

**جدول ۲.** اطلاعات مربوط به واحدهای تصمیم‌گیرنده با یک ورودی و یک خروجی

| DMU | ورودی | خروجی | کارایی |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۳ | ۱/۵ | ۱/۰۰۰۰ |
| ۲ | ۴ | ۳/۵ | ۱/۰۰۰۰ |
| ۳ | ۶ | ۷ | ۱/۰۰۰۰ |
| ۴ | ۹ | ۹ | ۱/۰۰۰۰ |
| ۵ | ۱۰ | ۵ | ۰/۴۸۵۷ |
| ۶ | ۸ | ۲ | ۰/۴۰۶۲ |
| ۷ | ۱۱ | ۹ | ۰/۸۱۸۲ |

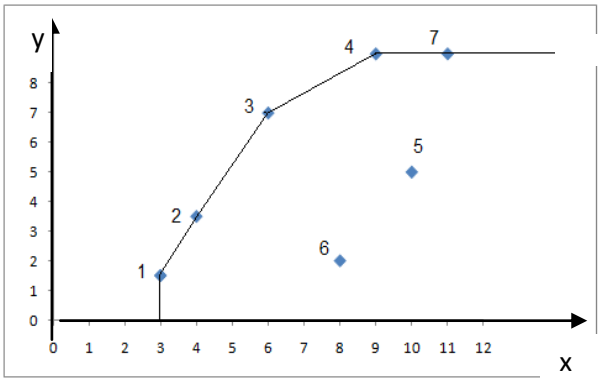
وضعیت $DMU_1$ را به عنوان یک واحد کارای قوی در بازه‌های متوالی تغییرات ورودی، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قرار می‌دهیم $(X^{(1)}, Y^{(1)}) = (3,1/5)$. معادلات ابرصفحه‌های فعال در این واحد عبارتند از:

$A_1: \quad -x + 3 = 0$

$A_2: \ y - 2x + 4/5 = 0$

[ Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29 ]
[ DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.7.0 ]
[ DOI: 10.52547/jamlu.18.1.85 ]




**شکل ٤.** مجموعه امکان تولید داده‌های جدول ۲

$\mathbf{u}Y$ برای ابرصفحه اول صفر است پس تنها محاسبه $m^{۲}$ کافیست. داریم: $m^{۲}=\frac{۲\times۳}{۱\times۱/۵}=۴$ و $m^{\ell}=\min\{۴\}>۱$ پس بازده به مقیاس $(X^{(۱)},Y^{(۱)})$ افزایشی است. با حل مدل (۶) کران بالای اولین بازه $\delta$ را به‌دست آورده و داریم $\delta^{*}=\frac{۱}{۳}$. یعنی برای تغییرات متناسب ورودی در بازه $[۰,\frac{۱}{۳}]$ نسبت افزایش خروجی به افزایش ورودی برابر است با ۴. اکنون قرار می‌دهیم $n=۲$ و $(X^{(۲)},Y^{(۲)})=((۱+\frac{۱}{۳})X^{(۱)},(۱+۴\times\frac{۱}{۳})Y^{(۱)})=(۴,۳/۵)$ و ابرصفحه‌های سازای فعال در آن را به‌دست می‌آوریم. این ابرصفحه‌ها، عبارتند از:

$A_{۲}:\ \ y-۲x+۴/۵=۰$
$A_{۳}:\ ۲y-۳/۵x+۷=۰$

ابرصفحه $(X^{(۱)},Y^{(۱)})$ نیز فعال بود، و لذا نیازی به بررسی آن نیست. با محاسبه $m^{۳}=\frac{۳/۵\times۴}{۲\times۳/۵}=۲$، داریم $m^{\ell}=\min\{۲\}>۱$ و لذا همچنان بازده به مقیاس افزایشی است و با حل مدل (۶) کران بالای دومین بازه $\delta$ را یافته و داریم $\delta^{*}=\frac{۱}{۲}$. یعنی برای $\delta\in[\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}]=[\frac{۱}{۳},\frac{۵}{۶}]$ نسبت افزایش خروجی به افزایش ورودی برابر ۲ است. مجدد برای یافتن بازه بعدی قرار می‌دهیم $n=۳$ و $(X^{(۳)},Y^{(۳)})=((۱+\frac{۱}{۲})\times۴,(۱+m\times\frac{۱}{۲})\times۳/۵)=(۶,۷)$. ابرصفحه سازای فعال در این واحد عبارتند از:

$A_{۳}:\ ۲y-۳/۵x+۷=۰$
$A_{۴}:\ \ ۳y-۲x-۹=۰$

مجدداً نیازی به بررسی $A_{۳}$ نبوده و داریم $m^{۴}=\frac{۲\times۶}{۲\times۷}=\frac{۱۲}{۲۱}$. با توجه به اینکه $m^{۴}<۱$، افزایش بیشتر ورودی به صرفه نبوده و متوقف می‌شویم. در حقیقت می‌توان گفت که آخرین واحد به‌دست آمده، یعنی $(X^{(۳)},Y^{(۳)})=(۶,۷)$ دارای بیشترین بهره‌وری است.

## ۵-۲ مثالی برای مقایسه دو روش پیشنهادی و زارع‌پیشه و سلیمانی‌دامنه

هشت واحد تصمیم‌گیرنده مثال بخش ۳ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم وضعیت بازده به مقیاس واحد تصمیم‌گیرنده ۴ را به این روش محاسبه کنیم. کار را با این واحد شروع کرده و قرار می‌دهیم $(X^{(۱)},Y^{(۱)})=(۶,۱۵,۹/۵)$. معادلات ابرصفحه‌های فعال در این واحد عبارتند از:



[ Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29 ]
[ DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.7.0 ]
[ DOI: 10.52547/jamlu.18.1.85 ]

$$A_1: \quad y \qquad -۹/۵ = ۰$$
$$A_2: \ ۶y - ۷x_1 \qquad -۱۵ = ۰$$
$$A_3: ۱۶y - ۷x_1 - ۷x_2 - ۵ = ۰$$

برای این ابرصفحه‌ها $m^i$ها را به‌دست آورده و داریم:

$$m^1 = ۰, m^2 = \frac{۱۴}{۱۹}, m^3 = \frac{۱۴۷}{۱۵۲}$$

$m^h = \max\{۰, \frac{۱۴}{۱۹}, \frac{۱۴۷}{۱۵۲}\} = \frac{۱۴۷}{۱۵۲} < ۱$، لذا مدل (۷) را حل کرده و داریم $\delta^* = ۰/۳۸۱$ پس بازده به مقیاس کاهشی بوده و اولین بازه برای $\delta$ عبارت است از $[۰, ۰/۳۸۱]$. برای به‌دست آوردن بازه بعدی قرار می‌دهیم $n = ۲$ و $(X^{(۲)}, Y^{(۲)}) = ((۱ - ۰/۳۸۱)X^{(۱)}, (۱ - \frac{۱۴۷}{۱۵۲} \times ۰/۳۸۱)Y^{(۱)}) = (۳/۷۱۵, ۹/۲۸۵, ۶/۰۰۴)$.

ابرصفحه‌های سازای فعال در آن عبارتند از:

$$A_3: ۱۶y - ۷x_1 - ۷x_2 - ۵ = ۰$$
$$A_4: \qquad -x_1 - x_2 + ۱۳ = ۰$$

ابرصفحه $A_3$، ابرصفحه مشترک میان $DMU_4$ و واحد جدید است و نیازی به بررسی آن نیست. از ابرصفحه $A_4$ نیز داریم $\delta = ۰$. درنتیجه امکان کاهش بیشتر ورودی‌ها وجود ندارد و لذا واحد $(X^{(۲)}, Y^{(۲)})$ دارای بازده به مقیاس ثابت است. بنابراین تنها تغییرات متناسب ورودی می‌تواند به اندازه $\delta \in [۰, ۰/۳۸۱]$ باشد و برای آن داریم: $\gamma^- = \frac{۱۴۲}{۱۵۲}$.

## ٦ نتیجه‌گیری

این مقاله با یک رویکرد مدیریتی، چگونگی تعیین نوع و میزان بازده به مقیاس را برای یک واحد کارا در بازه‌های متوالی تغییرات، مورد تحقیق قرار داده است. در این مقاله ابتدا روش زارع‌پیشه و سلیمانی‌دامنه [۱۳] و نقص آن مورد توجه قرار گرفته و سپس روشی بر مبنای استفاده از ابرصفحه‌های سازای ارایه گردیده است. در روش ارایه‌شده، چنانچه واحد تحت ارزیابی دارای بازده به مقیاس ثابت نباشد، وضعیت بازده به مقیاس آن نسبت به تغییرات متوالی ورودی تا هنگام رسیدن به وضعیت بازده به مقیاس ثابت مورد بررسی قرار گرفته است. در روش حاضر از ابرصفحه‌های سازا استفاده گردیده که نسبت به روش زارع پیشه و سلیمانی‌دامنه [۱۳] سریع‌تر و دقیق‌تر است. نظر به اهمیت داده‌های غیرقطعی در دنیای واقعی و با توجه به اینکه پژوهش‌های اندکی در زمینه بازده به مقیاس در حضور داده‌های نادقیق صورت گرفته، پیاده‌سازی روش حاضر بر مجموعه‌های امکان تولید با داده‌های غیرقطعی به عنوان پژوهشی جدید پیشنهاد می‌گردد. همچنین تلفیق روش حاضر و روش‌های یافتن شعاع پایداری می‌تواند موضوع جالبی برای تحقیق آتی باشد.

## منابع

[1] Førsund, F.R., (1996). On the calculation of scale elasticities in DEA models. Journal of Productivity Analysis, 7, 283-302.
[2] Panzar, J.C., Willig, R.D., (1997). Economics of scale in multi-output production. Quarterly Journal of Economics, XLI, 481-493.
[3] Starrett, D.A., (1977). Measuring retuns to scale in aggregate, and the scale effect of public goods. Econometrica, 45, 1439-1455.



[ Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29 ]
[ DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.7.0 ]
[ DOI: 10.52547/jamlu.18.1.85 ]

[4] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 2, 429-444.
[5] Banker R.D., Charnes A., Cooper W. W., (1984), Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. Management Sience; 30, 1078-92.
[6] Hatami-Marbini, A., Ghlej Beigi, Z., Leth Hougaard, J., Gholami, K., (2017). Measurement of Returns-to-Scale using Interval Data Envelopment Analysis
Models. Computer and industrial engineering, 117, 94-107.
[7] Salahi, M., Torabi, N., Jamalian, A., (2014). Robustization the constant returns to scale model in data envelopment analysis. Journal of Operational Research in its Applications, 11(3),1-11.
[8] Barzgarinejad, A., Hosseinzadeh Lotfi, F., Rostamy-Malkhalifeh, M., (2016). A non-radial DEA model for evaluating of performance decision making units using fuzzy data. Journal of Operational Research in its Applications, 13(3),111-120.
[9] Seyed Esmaeili, F., Rostamy-Malkhalifeh, M., Hosseinzadeh Lotfi, F. (2019). Proposing a robust model of interval data envelopment analysis to performance measurement under double uncertainty situations. Journal of Operational Research and Its Applications, 16(2), 59-75.
[10] Peykani, P., Mohammadi, E., Farzipoor Saen, R., Sadjadi, S. J., Rostamy-Malkhalifeh, M., (2020). Data envelopment analysis and robust optimization: A review. Expert Systems, e12534.
[11] Peykani, P., Mohammadi, E, Pishvaee, M. S., Rostamy-Malkhalifeh, M., Jabbarzadeh, A., (2018). A novel fuzzy data envelopment analysis based on robust possibilistic programming: possibility, necessity and redibility-based approaches. 52, 1445-1463.
[12] Hadjicostas, P., Soteriou, A.C., (2006). One-sideed elasticities and technical efficiency in multi-output production: A theorical framework. Eropean Journal of Operational Research 168, 425-449.
[13] Zarepisheh, M., Soleimani-damaneh, M., (2008). Global variation of outputs eith respevt to the variation of inputs in performance analysis; generalized RTS. European Journal of Operational Research, 186, 786-800.
[14] Shahverdi, R., Rezaee Balf, F., Ebrahim Nejad, A., Nasiri, S., (2011). Determining the stability radius for a decision making unit in right and left returns to scale. Journal of Operational Research in its Applications, 8(2), 1-10.
[15] Cooper W.W., Seiford L.M. and Tone K. (2006). Introduction to data envelopment analysis and its uses: with DEA-solver software and references. Springer Science & Business Media.
[16] Banker, R.D.,(1984). Estimating most productivity scale size using data envelopment analysis. European Journal of Operational Research, 17, 35-44.
[17] Banker, R. D., Thrall, R. M., (1992). Estimation of return to scale using Data Envelopment Analysis: Theory and Methodology. European Journal of Operational Research, 62, 74-84.
[18] Jahanshahloo, G. R., Hosseinzadeh Lotfi, F., Zhiani Rezai, H., Rezai Balf, F., (2007). Finding strong defining hyperplanes of Production Possibility Set. European Journal of Operational Research, 177, 42-54.
[19] Davtalab Olyaie, M., Roshdi, I., Jahanshahloo, G. R., Asgharian, M., (2014). Characterizing and finding full dimensional efficient facets in DEA: a variable returns to scale specification. Journal of the Operational Research Society, 65(9), 1453-1464.
[20] Davtalab Olyaie, M., Roshdi, I., Partovi Nia, V., Asgharian, M., (2015). On characterizing full dimensional weak facets in DEA with variable returns to scale technology. Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research, 64(11), 2455-2476.

[ Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29 ]
[ DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.7.0 ]
[ DOI: 10.52547/jamlu.18.1.85 ]