مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال بیستم، شماره سوم (پیاپی ۷۸)،پاییز ۰۲، ص ص ۱۲۱-۱۰۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

ارایه مدل جدید DEA در حضور متغیرهای انعطاف‌پذیر با ارزش‌گذاری انعطاف‌پذیر مبتنی بر تئوری قطعه‌ای خطی

نسیم رودابر[۱]، سید اسماعیل نجفی[۲*]، زهره مقدس[۳]، فرزاد موحدی سبحانی[۴]

۱-دانشجوی دکتری، گروه مهندسی صنایع، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

۲-دانشیار، گروه مهندسی صنایع، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

۳-استادیار، گروه ریاضی و آمار، واحد قزوین، دانشگاه آزاد اسلامی، قزوین، ایران.

۴-استادیار، گروه مهندسی صنایع، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

رسید مقاله: ۱۵ بهمن ۱۴۰۰

پذیرش مقاله: ۲۷ خرداد ۱۴۰۱

چکیده

در مسایل واقعی ماهیت برخی از فاکتورها به طور دقیق مشخص نیست و می‌توانند هم به عنوان ورودی و هم به عنوان خروجی در نظر گرفته شوند که آنها را متغیر انعطاف‌پذیر می‌نامیم. در تمامی مدل‌های موجود جهت ارزیابی کارایی در حضور متغیرهای انعطاف‌پذیر، ارزش این متغیرها خطی در نظر گرفته‌شده درحالی‌که مسایل واقعی بسیاری از متغیرها از جمله متغیرهای انعطاف‌پذیر دارای ارزش غیرخطی می‌باشند، به این معنا که اگر متغیر انعطاف‌پذیر به عنوان ورودی در نظر گرفته شود، ارزش‌گذاری آن به صورت نزولی خواهد بود و اگر به عنوان خروجی در نظر گرفته شود، ارزش‌گذاری آن به صورت صعودی (برای خروجی مطلوب) خواهد بود. در واقع مدیران و تصمیم‌گیرندگان برای ایجاد تمایز میان واحدهای تحت ارزیابی می‌بایست در محاسبه کارایی برای مقادیر بالای ورودی‌ها ارزش کمتر و برای مقادیر بالای خروجی‌ها ارزش بیشتری در نظر گیرند تا در صورتی‌که چندین واحد کارا به‌دست آید؛ اما یکی از آن‌ها همان میزان خروجی را با مصرف ورودی کمتری تولید نماید، بتواند به عنوان الگویی مناسب جهت افزایش کارایی سایر واحدها انتخاب گردد. به همین منظور در این مقاله برای اولین بار برای ارزیابی کارایی به ارایه مدلی مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها در حضور متغیرهای انعطاف‌پذیر و با لحاظ نمودن تاثیر متفاوت متغیرهای انعطاف‌پذیر در سنجش کارایی با در نظر گرفتن وزن‌های متفاوت جهت توجیه رفتار متفاوت آن‌ها در دو حالت ورودی و خروجی با استفاده از تئوری قطعه‌ای خطی پرداخته شده است. مدل پیشنهادی برای ارزیابی کارایی کارخانه‌های تولید سیمان به کارگرفته شده است.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، متغیر انعطاف‌پذیر، ارزش‌گذاری غیرخطی، تئوری قطعه‌ای خطی.

* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: e.najafi@srbiau.ac.ir

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.3.109]

۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها[۱] (DEA) رویکردی است که برای اندازه‌گیری کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده[۲] (DMUs) همگن دارای چندین ورودی و چندین خروجی به کار می‌رود. تحلیل پوششی داده‌ها یک روش داده محور می‌باشد و در روش مرسوم معمولاً با فرض مشخص بودن ماهیت داده‌ها اعم از ورودی یا خروجی پیش می‌رود [۱]. این در حالی است که به‌دلیل کاربرد روزافزون DEA در مسایل مختلف می‌بایست فرضیات بیشتری متناسب با ماهیت متفاوت داده‌ها در نظر گرفت و در مدل‌های مرسوم اعمال نمود. در مدل‌های DEA معمولاً فرض بر این است که ماهیت داده‌ها از نظر ورودی و خروجی به طور دقیق مشخص است و این درحالی است که در مسایل واقعی بعضی از فاکتورها می‌توانند هم به عنوان ورودی و هم به عنوان خروجی در نظر گرفته شوند که آن‌ها را متغیر انعطاف‌پذیر می‌نامیم. این متغیرها اولین بار توسط کوک و ژو[۳] [۲] مطرح شد. آن‌ها مدل مضربی CCR جدیدی را برای مواجه شدن با متغیرهای انعطاف‌پذیر ارایه نمودند. طلوع[۴] [۳] نشان داد که در بعضی موارد مدل آن‌ها مقادیر کارایی را به درستی محاسبه نمی‌کند و به همین منظور مدل را اصلاح نمود. او در سال ۲۰۱۲ نیز مدل جدید عدد صحیح مختلط[۵] را برای طبقه‌بندی ورودی‌ها و خروجی‌ها در مدل DEA در فرم پوششی ارایه داد [۴]. امیرتیموری و امروزنژاد[۶] [۵] نیز با در نظر گرفتن تاثیر متغیرهای انعطاف‌پذیر بر روی تعریف مجموعه امکان تولید مدلی را با استفاده از فرم پوششی CCR برای تعیین ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر پیشنهاد کردند. امیرتیموری و همکاران [۶] مدلی مبتنی بر متغیرهای کمکی انعطاف‌پذیر[۷] را برای حداکثر نمودن کارایی در حضور متغیرهای انعطاف‌پذیر ارایه نمودند. بودا[۸] [۷] نشان داد که مدل ارایه‌شده توسط امیرتیموری و همکاران [۶] مقادیر کارایی را بیشتر از مقدار واقعی ارایه می‌دهد؛ لذا مدل جدیدی را برای رفع این مشکل پیشنهاد نمودند. توحیدی و مطرود[۹] [۸] برای تعیین ماهیت عامل انعطاف‌پذیر، مدل غیرپارامتری بدون ماهیت با فرض بازده به مقیاس متغیر در حضور داده‌های انعطاف‌پذیر ارایه نمودند. طلوع و همکاران [۹] مدل غیرشعاعی فاصله جهت‌دار[۱۰] با در نظر گرفتن کاهش ورودی و افزایش خروجی برای طبقه‌بندی متغیرهای انعطاف‌پذیر پیشنهاد کردند. کردرستمی[۱۱] و همکاران [۱۰] روش مبتنی بر متغیرهای کمکی پیشنهاد کردند که وضعیت متغیرهای انعطاف‌پذیر را در حضور داده‌های عدد صحیح مشخص می‌کند. صدیقی حسن کیاده[۱۲] و همکاران [۱۱] برای طبقه‌بندی متغیرهای انعطاف‌پذیر، دو مدل غیرخطی بر اساس مقادیر راسل[۱۳] ارایه نمودند و نشان دادند که روش پیشنهادی نسبت به روش مدل‌های خطی با مسایل واقعی سازگارتر است. ابوالقاسم[۱۴] و همکاران [۱۲] دو مدل را

---

[1] Data Envelopment Analysis
2 Decision Making Units (DMUs)
[3] Cook and Zhu
[4] Toloo
[5] mixed-integer model
[6] Amirteimoori and Emrouznejad
[7] flexible slacks-based measure
[8] Bod'a
[9] Tohidi and Matroud
[10] non-radial directional distance approach
[11] Kordrostami
[12] Sedighi Hassan Kiyadeh
[13] Russell's measurement
[14] Abolghasem

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.3.109]

برای ارزیابی عملکرد به کمک ارزیابی کارایی قطعه‌ای در حضور متغیرهای انعطاف‌پذیر ارایه دادند. طلوع و همکاران [۱۳] مدل‌های جدید DEA را برای طبقه‌بندی متغیرهای انعطاف‌پذیر توسعه دادند. آنها مقدار مثبت کوچکی را به عنوان حد پایین بازه برای وزن متغیرهای انعطاف‌پذیر در نظر گرفتند تا از صفر شدن آن‌ها جلوگیری کنند. ابراهیمی و حاجی زاده [۲۲] مدل جدید DEA خطی صفر و یک را برای طبقه‌بندی اندازه‌های انعطاف‌پذیر و الگوریتم جدیدی نیز برای یافتن DMUهای کارا و رتبه‌بندی آن‌ها، توسعه دادند. علی‌زاده افروزی [۱۷] به منظور بررسی تغییرات بهره‌وری در واحدهای تحت ارزیابی به محاسبه شاخص مالمکوئیست[1] با در نظر گرفتن داده‌های انعطاف‌پذیر پرداخت. نوحی تهرانی و همکاران [۱۸] به ارزیابی کارایی جریان اطلاعات در زنجیره تامین شرکت ساپکو با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها پرداختند. آنها در بررسی خود داده‌ها را به ورودی و خروجی‌ها تقسیم‌بندی و کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده را با استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی محاسبه نمودند. مقدس و همکاران [۱۹] مطرح نمودند که در مسایل واقعی ارزش‌گذاری‌ها به صورت غیرخطی می‌باشد و این در حالی است که مدل‌های کلاسیک DEA از ارزش‌گذاری خطی در ارزیابی استفاده می‌کنند. به همین منظور آن‌ها تئوری قطعه‌ای خطی را به‌همراه DEA برای ارزیابی کارایی درآمد به کار بردند و با استفاده از داده‌های نیروگاه‌های برق به اعتبارسنجی مدل پیشنهادی پرداختند. میرزائیان و فلاح نژاد [۲۱] با این ادعا که مدل‌های کلاسیک کارایی هزینه زمانی که قیمت‌ها به صورت پلکانی باشند، قابل استفاده نخواهند بود و این مدل‌ها صرفاً زمانی به کار می‌روند که قیمت‌ها به صورت ثابت، متغیر یا نادقیق باشند؛ مدلی را برای رفع ضعف‌های مدل کلاسیک ارایه نمودند. میرزائیان و فلاح نژاد [۲۰] در مطالعه‌ای دیگر به توسعه و بسط شاخص بهره‌وری مالمکوئیست هزینه‌ای با استفاده از مدل کارایی هزینه قطعه‌ای خطی[2] و شاخص مالمکوئیست هزینه‌ای با با لحاظ نمودن قیمت‌های پلکانی و هزینه‌های قطعه‌ای خطی پرداختند. نتایج مطالعه‌ی آنها نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی قابلیت مدل‌های کلاسیک را در محاسبه‌ی شاخص بهره‌وری مالمکوئیست افزایش می‌دهد به‌طوری‌که لحاظ نمودن هزینه‌های قطعه‌ای خطی و به‌کارگیری مدل پیشنهادی موجب می‌گردد که نتایج قابل قبول‌تر و واقعی‌تری در مقایسه با مدل‌های کلاسیک به‌دست آید.

در تمامی مدل‌های ارایه‌شده برای ارزیابی کارایی DMUها که دارای متغیرهای انعطاف‌پذیر می‌باشند، هیچ‌گونه تفاوتی در ارزش‌گذاری متغیرها در نظر گرفته نشده است و این در حالی است که در مسایل واقعی بسیاری از ورودی و خروجی‌های DMUها از جمله متغیرهای انعطاف‌پذیر دارای ارزش متفاوت و غیرخطی می‌باشند، به این معنا که اگر متغیر انعطاف‌پذیر به عنوان ورودی در نظر گرفته شود، ارزش‌گذاری آن به صورت نزولی خواهد بود و اگر به عنوان خروجی در نظر گرفته شود، ارزش‌گذاری آن به صورت صعودی (برای خروجی مطلوب) خواهد بود. در واقع مدیران و تصمیم‌گیرندگان به دنبال حداکثر نمودن خروجی و حداقل نمودن ورودی‌ها هستند و برای در نظر گرفتن این موضوع در محاسبه کارایی و نیز ایجاد تمایز میان واحدهای تحت ارزیابی می‌بایست برای مقادیر بالاتر از ورودی‌ها ارزش کمتر و برای مقادیر بالاتر از خروجی‌ها ارزش

[1] Malmquist Productivity Index (MIP)
[2] stepwise linear

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.3.109]

بیشتری در نظر گرفته شود به‌دلیل آن که ممکن است چندین واحد تحت ارزیابی کارا به‌دست آید اما یکی از آن‌ها برای حداکثر نمودن خروجی، نسبت به سایر واحدهای کارا، ورودی کمتری را مصرف نماید. در این مقاله به ارایه الگوریتم جدیدی جهت در نظر گرفتن تاثیر متفاوت متغیرهای انعطاف‌پذیر در سنجش کارایی با لحاظ نمودن وزن‌های متفاوت جهت توجیه رفتار متفاوت آن‌ها در دو حالت ورودی و خروجی با استفاده از تئوری قطعه ای خطی می‌پردازیم. به عبارت دیگر در حالتی متغیر انعطاف‌پذیر به عنوان ورودی در سیستم تعیین می‌گردد ارزش‌گذاری آن به صورت نزولی خواهد بود و برای مقادیر بالاتر از آن‌ها ارزش کمتری در نظر می‌گیریم و در حالتی که متغیر انعطاف‌پذیر به عنوان خروجی در سیستم تعیین می‌گردد ارزش گذاری آن به صورت صعودی خواهد بود و برای مقادیر بالاتر از آن ها ارزش بیشتری در نظر گرفته شود. مدل ارایه‌شده در این مقاله نیز نسبت به مدل‌های کلاسیک برتری دارند. مدل‌های کلاسیک، متغیری را که دارای ارزش غیرخطی است، با تابع خطی تقریب می‌زنند؛ اما در مدل پیشنهادی این مقاله، متغیری را که ارزش آن غیرخطی است با استفاده از تابع قطعه‌ای خطی تقریب‌زده می‌شود تا به مقدار غیرخطی نزدیک‌تر باشد و مدل نتایج دقیق‌تری را ارایه دهد.

در بخش ۲ به طور مختصر مدل‌های اولیه محاسبه کارایی در حضور متغیرهای انعطاف‌پذیر بیان شده است و مدل پیشنهادی DEA در حضور متغیرهای انعطاف‌پذیر با ارزش‌گذاری انعطاف‌پذیر مبتنی بر تئوری قطعه‌ای خطی در بخش ۳ ارایه می‌گردد. در بخش ۴ مدل پیشنهادی برای ۱۰ کارخانه تولید سیمان به کار گرفته شده و سپس نتیجه گیری در بخش آخر ارایه می‌گردد.

۲ پیشینه پژوهش

۲-۱مدل DEA در حضور متغیر انعطاف‌پذیر

در این بخش به طور خلاصه روش ارایه‌شده توسط کوک و ژو (۲۰۰۷) در ارتباط با متغیرهای انعطاف‌پذیر در DEA ارایه شده است [۲]. در واقع آنها به اصلاح مدل اصلی DEA که توسط چارنز و همکاران [۱۴] ارایه‌شده بود، پرداختند و مدل عدد صحیح مختلط را منطبق با متغیرهای انعطاف‌پذیر پیشنهاد کردند.

فرض کنید n تا DMU وجود دارد به طوری که DMU_j m تا ورودی $x_j = (x_{1j},...,x_{mj})$ را مصرف، s تا خروجی $y_j = (y_{1j},...,y_{sj})$ تولید می‌کند و دارای L متغیر انعطاف‌پذیر $z_j = (z_{ij},...,z_{Lj})$ می‌باشد.کوک و ژو (۲۰۰۷) مدل (۱) را برای تعیین وضعیت متغیرهای انعطاف‌پذیر برای واحد تحت ارزیابی k ($k \in \{1,...,n\}$ ، DMU_k) به صورت زیر ارایه نمودند:

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.3.109]

$$
\begin{aligned}
& e_k = Max \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} + \sum_{l=1}^{L} \delta_l z_{lk} \\
& s.t. \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} + \sum_{l=1}^{L} \gamma_l z_{lk} = 1, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + \sum_{l=1}^{L} \delta_l z_{lj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{l=1}^{L} \gamma_l z_{lj} \le 0, \qquad j = 1,...,n, \\
& \delta_l - M d_l \le 0, \qquad l = 1,..,L, \\
& \gamma_l - M(1-d_l) \le 0, \qquad l = 1,..,L, \\
& d_l \in \{0,1\}, \qquad l = 1,..,L, \\
& \delta_l, \gamma_l \ge 0, \qquad l = 1,...,L, \\
& v_i \ge 0, \qquad i = 1,..,m, \\
& u_r \ge 0, \qquad r = 1,...,s.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

به طوری‌که v_i و u_r به ترتیب وزن‌های مربوط به i^{th} ورودی و r^{th} خروجی، γ_l و δ_l نیز به ترتیب وزن‌های ورودی و خروجی مربوط به l^{th} متغیر انعطاف‌پذیر است. d_l متغیر باینری است که برای تعیین وضعیت متغیرهای انعطاف‌پذیر به کار می‌رود. همچنین M عدد مثبت بزرگ است.

محدودیت‌های $\delta_l - M d_l \le 0$ و $\gamma_l - M(1-d_l) \le 0$ که $l = 1,..,L$ و $d_l \in \{0,1\}$ منجر می‌شود که جواب‌های بهینه به‌صورت $\delta_l^* \gamma_l^* = 0$ و $\delta_l^* + \gamma_l^* \ge 0$ به‌دست آید. به عبارت دیگر سه حالت برای وزن‌های متغیرهای انعطاف‌پذیر وجود دارد: ۱) اگر $d_l^* = 0$ سپس $\delta_l^* - M d_l^* \le 0$ و درنتیجه $\delta_l^* = 0$. در این حالت $\gamma_l^* - M(1-d_l^*) \le 0$ محدودیت زاید خواهد بود؛ بنابراین l^{th} متغیر انعطاف‌پذیر به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شود. ۲) $d_l^* = 1$ سپس $\gamma_l^* = 0$ و متغیر انعطاف‌پذیر مربوطه به عنوان خروجی در نظر گرفته می‌شود [۲۲].

۲-۲ DEA قطعه‌ای خطی (PLDEA)

کوک و ژو [۱۵] بیان کردند که در مدل DEA استاندارد، خروجی کل (ورودی کل) تابعی خطی از هر خروجی (ورودی) است. بنابراین اگر مقدار تولیدشده از یک خروجی دو برابر شود، ارزش آن خروجی نیز طبق مدل DEA دو برابر خواهد شد. در بسیاری از موارد، ارزش‌گذاری خطی نمی‌تواند تمایز میان ارزش ایجادشده توسط یک DMU را نسبت به سایر DMUها نشان دهد. بنابراین آن‌ها این مساله را حل کردند و با بهره‌گیری از تئوری قطعه‌ای خطی مدل DEA قطعه‌ای خطی[1] (PLDEA) را ارایه نمودند. بر اساس این تئوری، مقدار یک متغیر که رفتار غیرخطی دارد به k قسمت تقسیم می‌شود به طوری که رفتار آن متغیر در هر یک از این قطعه‌ها خطی باشد. هر چه تعداد قطعه‌ها بیشتر باشد تخمین حاصل از تئوری قطعه‌ای خطی به رفتار غیرخطی متغیر نزدیک‌تر خواهد بود. برای مثال مقدار یک متغیر با ارزش حاشیه‌ای کاهشی[2] را در نظر بگیرید (ضرایب غیرافزایشی برای مقادیر بالاتر از یک متغیر را ارزش حاشیه‌ای کاهشی و ضرایب غیرکاهشی برای مقادیر بالاتر از

[1] Piecewise Linear models in DEA (PLDEA)
[2] Diminishing Marginal Value (DMV)

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]
[DOI: 10.22034/20.3.109]

یک متغیر را ارزش حاشیه‌ای افزایشی[1] می‌گویند[۱۵]) که این مقدار به k_rبازه به صورت $[0, L_1], (L_1, L_2], ..., (L_{k_r-1}, L_{k_r}]$تقسیم می‌شود و u_{r_k} ارزش تخصیص داده شده به y_{rj} در بازه‌ی k^{th} خواهد بود [۱۶]. کوک و ژو [۱۵] مدل (۲) را ارایه نمودند:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max} \quad \sum_{r\in R_1} u_r y_{ro} + \sum_{r\in R_2}\sum_{k=1}^{K_r} u_{r_k} y_{ro}^k, \\
&s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1, \\
&\sum_{r\in R_1} u_r y_{rj} + \sum_{r\in R_2}\sum_{k=1}^{K_r} u_{r_k} y_{rj}^k - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0, \qquad j = 1,..,n, \qquad (۲)\\
&u_{r_{k+1}} a_{r_k} \le u_{r_k} \le u_{r_{k+1}} b_{r_k}, \quad k = 1,...,K_r, \quad r \in R_2, \qquad (a)\\
&u_{r_1} a_{r_1 r_2} y_{r_2 j} \le \sum_{k=1}^{K_{r_2}} u_{r_2 k} y_{r_2 j}^k \le u_{r_1} b_{r_1 r_2} y_{r_2 j}, \qquad j = 1,..,n, \quad r_1 \in R_1, \quad r_2 \in R_2, \quad (b)\\
&v_i, u_r, u_{r_k} \ge 0.
\end{aligned}
$$

در مدل (۲)، R_1 و R_2به ترتیب مجموعه‌ای از خروجی‌های معمولی و خروجی‌هایی با ارزش حاشیه‌ای کاهشی هستند که $r_1 \in R_1$ و $r_2 \in R_2$. a_{r_k} و b_{r_k} مقادیر بزرگ‌تر از یک برای متغیرهای مربوطه است و $a_{r_1 r_2}$ و $b_{r_1 r_2}$ حد پایین و حد بالای نسبت‌های متغیرهای خروجی معمولی و خروجی‌هایی با ارزش حاشیه‌ای کاهشی است [۱۵]. انتخاب تعداد بازه‌ها و طول بازه‌ها توسط تحلیل‌گر صورت می‌گیرد. حسین‌زاده و همکاران [۱۶] مدل فوق را اصلاح نمودند به‌طوری‌که بازه‌ها به ترتیب پر شوند و تا زمانی که بازه‌ی پایین‌تر پر نشده است بازه‌های بعدی مقدار نگیرند.

در بخش بعدی مدل جدیدی را در حضور متغیرهای انعطاف‌پذیر با ارزش‌گذاری انعطاف‌پذیر ارایه خواهیم نمود.

۳ مدل پیشنهادی

در بسیاری از مسایل واقعی که با آن مواجه هستیم، ورودی یا خروجی‌هایی حضور دارند که دارای ارزش غیرخطی می‌باشند و می‌بایست جهت ایجاد تمایز میان ارزش‌گذاری در یک DMU نسبت به دیگری، رفتار غیرخطی متغیرها و نیز ارزش‌گذاری غیرخطی را نیز در مدلسازی در نظر گرفت.

در تمامی مدل‌های ارایه‌شده برای ارزیابی کارایی DMUها که دارای متغیرهای انعطاف‌پذیر می‌باشند، ارزش متغیرها خطی در نظر گرفته شده است و این در حالی است که در مسایل واقعی بسیاری از ورودی و خروجی‌های DMUها از جمله متغیرهای انعطاف‌پذیر ممکن است دارای ارزش غیرخطی باشند. به همین منظور و برای اصلاح مدل‌های ارایه‌شده به ارایه مدل جدیدی خواهیم پرداخت که به طور هم‌زمان نوع متغیر انعطاف‌پذیر را تشخیص داده و ارزش‌گذاری متناسب با آن را در نظر بگیرد.

فرض کنید n تا DMU وجود دارد به طوری که DMU_j تا m ورودی $x_j = (x_{1j}, ..., x_{mj})$ را مصرف، s تا خروجی $y_j = (y_{1j}, ..., y_{sj})$ تولید می‌کند و دارای L متغیر انعطاف‌پذیر $z_j = (z_{ij}, ..., z_{Lj})$ می‌باشد. q

[1] increasing marginal value (IMV)

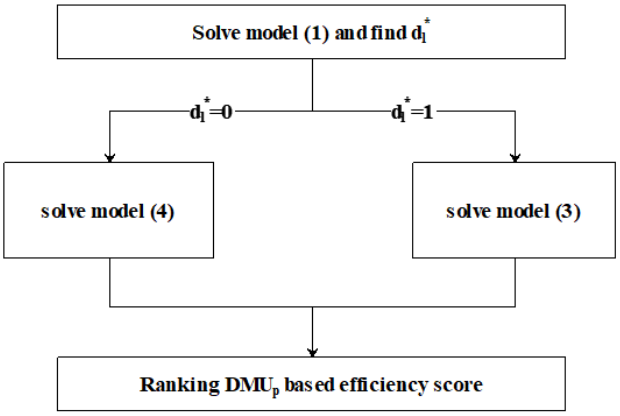
[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.3.109]

$(q=1,...,Q_l)$ تعداد بازه‌های در نظر گرفته شده برای مقدار متغیرهای دارای رفتار غیرخطی است که برای اعمال در مدلسازی آن‌ها را به صورت قطعه‌ای خطی در نظر می‌گیریم. به همین منظور پس از حل مدل (۱) به صورت زیر اقدام می‌کنیم:

- اگر $d_l^*=0$ باشد، متغیر انعطاف‌پذیر به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شود و ارزش‌گذاری آن به صورت نزولی خواهد بود.
- اگر $d_l^*=1$ باشد، متغیر انعطاف‌پذیر به عنوان خروجی در نظر گرفته می‌شود و ارزش‌گذاری آن به صورت صعودی (برای خروجی مطلوب) خواهد بود.

مراحل مدلسازی به طور خلاصه در قالب الگوریتم در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. الگوریتم روش پیشنهادی

همان‌طور که مشاهده می‌شود ابتدا مدل (۱) را حل نموده و مقدار بهینه d را به‌دست می‌آوریم اگر مقدار به‌دست آمده صفر باشد متغیر انعطاف‌پذیر مربوط به واحد تحت ارزیابی DMU_j به عنوان ورودی باید در نظر گرفته شود و برای ارزش‌گذاری نزولی آن می‌بایست از مدل (۴) استفاده و دوباره مقدار کارایی آن DMU را محاسبه نمود. همچنین اگر مقدار به‌دست آمده یک باشد متغیر انعطاف‌پذیر مربوط به واحد تحت ارزیابی DMU_j به عنوان خروجی باید در نظر گرفته شود و برای ارزش‌گذاری صعودی آن می‌بایست از مدل (۳) استفاده و دوباره مقدار کارایی آن DMU را محاسبه نمود. لازم به ذکر است این حالت برای خروجی‌های مطلوب می‌باشد و در صورتی که خروجی نامطلوب باشد می‌بایست ارزش‌گذاری آن را به صورت نزولی در نظر گرفت به دلیل آنکه باید خروجی های نامطلوب در مدلسازی به صورتی لحاظ گردد که هر چه مقادیر آن بیشتر می‌شود، ارزشی را که مدل به آن مقدار اختصاص می‌دهد کمتر باشد به عبارت دیگر می‌بایست میان ارزش‌گذاری برای خروجی‌های نامطلوب و ارزش‌گذاری برای خروجی مطلوب تفاوت قایل شد تا مقدار کارایی به‌دست آمده دقیق، قابل اعتماد و جهت اتخاذ تصمیمات استراتژیک کاربردی باشد.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.3.109]

$$
\begin{aligned}
& e_k = Max \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} + \sum_{l=1}^{L} \sum_{q=1}^{Q_l} \delta_{l_q} z_{lk}^q \\
& s.t. \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + \sum_{l=1}^{L} \sum_{q=1}^{Q_l} \delta_{l_q} z_{lj}^q - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0, \qquad j = 1,...,n, \\
& \delta_{l_{q+1}} a_{l_q} \le \delta_{l_q} \le \delta_{l_{q+1}} b_{l_q}, \quad q = 1,...,Q_l, \qquad (a) \\
& u_r a_{rl} z_{lj} \le \sum_{q=1}^{Q_l} \delta_{l_q} z_{lk}^q \le u_r b_{rl} z_{lj}, \quad j = 1,..,n, \qquad (b) \\
& v_i, u_r, \delta_{l_q} \ge 0, \\
& \delta_l \ge 0, \qquad l = 1,...,L, \\
& v_i \ge 0, \qquad i = 1,..,m, \\
& u_r \ge 0, \qquad r = 1,...,s.
\end{aligned}
\tag{۳}
$$

$$
\begin{aligned}
& e_k = Max \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} \\
& s.t. \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} + \sum_{l=1}^{L} \sum_{q=1}^{Q_l} \gamma_{l_q} z_{lj}^q = 1, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{l=1}^{L} \sum_{q=1}^{Q_l} \gamma_{l_q} z_{lj}^q \le 0, \qquad j = 1,...,n, \\
& \gamma_{l_{q+1}} a_{l_q} \le \gamma_{l_q} \le \gamma_{l_{q+1}} b_{l_q}, \quad q = 1,...,Q_l, \qquad (a) \\
& v_i a_{rl} z_{lj} \ge \sum_{q=1}^{Q_l} \gamma_{l_q} z_{lk}^q \ge v_i b_{rl} z_{lj}, \quad j = 1,..,n, \qquad (b) \\
& v_i, u_r, \gamma_{l_q} \ge 0, \\
& \gamma_l \ge 0, \qquad l = 1,...,L, \\
& v_i \ge 0, \qquad i = 1,..,m, \\
& u_r \ge 0, \qquad r = 1,...,s.
\end{aligned}
\tag{۴}
$$

$$
z_{lj}^q = \begin{cases} C_q & if\ q = 1 \\ C_q - C_{q-1} & if\ q = 2,...,q_j - 1 \\ z_{lj} - C_{q-1} & if\ q = q_j \\ 0 & if\ q > q_j \end{cases} ; \tag{۵}
$$

k : واحد تحت ارزیابی است که به‌صورت DMU_k , $k \in \{1,...,n\}$ می‌باشد.

C: طول بازه‌های در نظر گرفته شده برای مقدار متغیرهای دارای رفتار غیرخطی که به صورت قطعه‌ای خطی مدلسازی شده‌اند.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.3.109]

مدل‌های (۳) و (۴) مدل CCR قطعه‌ای خطی را برای حالتی که متغیر انعطاف‌پذیر به ترتیب به عنوان خروجی و ورودی در نظر گرفته شود ارایه می‌کند که در آن‌ها خروجی دارای ارزش حاشیه‌ای افزایشی می‌باشد محدودیت‌های (a)در این مدل‌ها به منظور ایجاد دنباله‌ی غیرصعودی از ضرایب اعمال شده‌اند و محدودیت‌ها (b) به منظور مقایسه مجموعه‌ی ضرایب خروجی از نوع ارزش حاشیه‌ای افزایشی و خروجی‌های معمولی به مدل اضافه شده‌اند. همچنین $a, b, a_{r_1 r_2}, b_{r_1 r_2}$ کران‌های محدودیت‌های وزنی استفاده شده می‌باشند.

با توجه به تئوری برنامه‌ریزی قطعه‌ای خطی وقتی متغیری رفتار غیرخطی دارد می‌توان بازه‌ی تغییرات آن متغیر را به Q بخش تقسیم نمود و رفتار متغیر را در هر بخش به صورت خطی در نظر گرفت. با استفاده از این منطق می‌توان بازه تغییرات خروجی مدنظر را به Q_lبخش به صورت $[0, C_1], [C_1, C_2], ..., (C_{q_l-1}, C_{q_l}]$ تقسیم کرد. انتخاب تعداد بازه‌ها و طول بازه‌ها بر اساس نظرات خبرگان صورت می‌گیرد. در مدل (۵) نیز δ_{l_q} ارزش تخصیص داده شد به قسمتی از z_{lj} است که در بازه ی qام می باشد. اگر $z_{lj} \in (C_{q_j-1}, C_{q_j}]$ آنگاه مجموعه پارامترهای z_{lj}^q به صورت مدل (۵) تعریف می‌شود. سپس سهم مولفه‌ی lام از خروجی مدنظر در مجموع وزن‌دار شده‌ی خروجی‌ها به جای $\delta_l z_{lk}$ به صورت $\sum_{q=1}^{Q_l} \delta_{l_q} z_{lk}^q$ تعریف می شود.

در مدل‌های مختلف DEA اعمال محدودیت روی ضرایب u و v و δ ضروری است. محدودیت‌هایی که بر روی $\{\delta_{l_q}\}_{q=1}^{Q}$ اعمال می‌شوند، برای متغیر l که نشان‌دهنده متغیری از نوع ارزش حاشیه‌ای کاهشی می‌باشد، باید ضرایب به صورت یک دنباله‌ی غیرصعودی در نظر گرفته شود. بنابراین محدودیت‌ها به صورت $\delta_{l_{q+1}} a_{l_q} \le \delta_{l_q} \le \delta_{l_{q+1}} b_{l_q}$اعمال می‌شود. لازم به ذکر است در این حالت $a_{l_q} < 1$ و $b_{l_q} > 1$ مقادیر اختیار می‌کنند و در حالت ارزش حاشیه‌ای افزایشی هر دو مقادیر بزرگ‌تر از یک خواهند داشت.

٤ مطالعه موردی

در این بخش برای سنجش مدل پیشنهادی، داده های مربوط به ۱۰ کارخانه سیمان را به صورت جدول ۱ در نظر می‌گیریم.

از آنجایی‌که می‌توان میزان درآمدهای تحقق‌یافته را با استفاده از منابع موجود مانند دارایی‌ها یا موجودی‌ها سنجید به عبارت دیگر استفاده کمتر از منابعی مانند دارایی ها و موجودی‌ها می‌تواند میزان درآمدهای تحقق‌یافته را افزایش دهد؛ بنابراین در چنین حالتی می‌توان متغیر مجموع دارایی‌ها را به عنوان ورودی در نظر گرفت. همچنین ایجاد درآمد بیشتر می‌تواند منجر به افزایش دارایی‌ها گردد؛ بنابراین در این حالت می‌توان آن را به‌عنوان متغیر خروجی نیز در نظر گرفت. لذا با توجه به تعریف متغیرهای انعطاف‌پذیر، می‌توان متغیر مجموع دارایی‌ها را به عنوان یک متغیر انعطاف‌پذیر تلقی نمود.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.3.109]

جدول۱. متغیرهای ورودی، خروجی و انعطاف‌پذیر

نام متغیر	شاخص ها	نوع متغیرها
x_1	مجموع سرمایه گذاری اولیه	
x_2	مجموع هزینه خرید مواد معدنی، شیمیایی و لوازم مصرفی دیگر	ورودی‌ها
x_3	مجموع هزینه حقوق و دستمزد پرداختی	
z_1	مجموع دارایی ها	متغیر انعطاف‌پذیر
y_1	نرخ رشد سالیانه بر اساس عملکرد	
y_2	مجموع درآمد حاصل از فروش	خروجی‌ها
y_3	مجموع سود حاصل‌شده	

با استفاده از مدل پیشنهادی مطابق با الگوریتم ارایه‌شده در بخش قبلی که مبتنی برDEA در حضور متغیرهای انعطاف‌پذیر می‌باشد که رفتار متفاوت آن متغیر در دو حالت ورودی و خروجی به ترتیب با لحاظ نمودن ارزش‌گذاری نزولی و خروجی در مدل نمایش داده خواهد شد، و نیز بر اساس داده‌های مربوط به شاخص‌های ارایه شده در جدول ۱ و با استفاده از نرم‌افزار GAMS به ارزیابی کارایی کارخانه‌ها می‌پردازیم. به همین منظور ابتدا مدل (۱) را برای داده‌های مربوط به ۱۰ واحد تحت ارزیابی اجرا نموده و مقدار بهینه ی d را به‌دست می‌آوریم. ستون دوم و چهارم جدول ۲ ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر را با استفاده از مدل (۱) برای هر یک از DMUها نشان می‌دهد. مطابق با نتایج موجود در جدول ۲، مقدار بهینه d^* برای DMU های ۳، ۴، ۶، ۷ و ۹ صفر به‌دست آمده است و این بدان معناست که متغیر انعطاف‌پذیر (z_1) برای محاسبه ی مقدار کارایی این DMUها می‌بایست به عنوان ورودی در نظر گرفته شود و برای ارزش‌گذاری نزولی آن باید از مدل (۴) استفاده و دوباره مقدار کارایی کلی آن‌ها را محاسبه نمود. همچنین با توجه به اینکه مقدار بهینه d^* حاصل از اجرای مدل (۱)، برای DMUهای ۱، ۲، ۵، ۸ و ۱۰ یک به‌دست آمده است، بنابراین متغیر انعطاف‌پذیر مجموع دارایی‌ها برای این DMUها می‌بایست به عنوان خروجی در نظر گرفته شود و ارزش‌گذاری صعودی این متغیر با استفاده از مدل (۳) در محاسبه‌ی کارایی کلی مربوط به آن ها لحاظ گردد.

جدول۲. نتایج حاصل از حل مدل (۱) برای کارخانه های سیمان مورد مطالعه

DMUs	d^*	DMUs	d^*
۱	۱	۶	۰
۲	۱	۷	۰
۳	۰	۸	۱
۴	۰	۹	۰
۵	۱	۱۰	۱

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.3.109]

جدول ۳ مقدار کارایی هر یک از DMUها را با استفاده از مدل‌های کلاسیک و مدل پیشنهادی در این مقاله نشان می‌دهد. به عبارت دیگر برای مقایسه مدل پیشنهادی با سایر مدل‌های موجود در مطالعات پیشین در حوزه محاسبه کارایی بدون لحاظ نمودن ارزش‌گذاری غیرخطی متغیرها؛ بعد از مشخص نمودن وضعیت متغیر انعطاف‌پذیر برای هر یک از DMUهای مورد نظر، مقدار کارایی کلی آن‌ها را یک بار بدون در نظر گرفتن ارزش‌گذاری غیرخطی محاسبه نمودیم که نتایج آن در ستون دوم و پنجم جدول ۳ قابل مشاهده می‌باشد. سپس مجدداً با استفاده از مدل‌های پیشنهادی (۳) و (۴) متناسب با این‌که متغیر انعطاف‌پذیر ورودی به‌دست آمده یا خروجی، مقدار کارایی کلی محاسبه و در ستون سوم و ششم در جدول ۳ نوشته شده است.

جدول۳. نتایج حاصل از حل مدل پیشنهادی و مقایسه با مدل های کلاسیک برای کارخانه های سیمان مورد مطالعه

مقدار کارایی با مدل پیشنهادی	مقدار کارایی با مدل کلاسیک	DMUs	مقدار کارایی با مدل پیشنهادی	مقدار کارایی با مدل کلاسیک	DMUs
۰/۷۵۲	۰/۹۷۶	٦	۱	۱	۱
۰/۹۸۳	۱	۷	۱	۱	۲
۱	۱	۸	۰/۹۶۱	۱	۳
۰/۸۶۱	۱	۹	۰/۹۹۵	۱	٤
۱	۱	۱۰	۱	۱	٥

مطابق با نتایج ذکرشده در جدول ۳، مقدار کارایی حاصل از مدل‌های کلاسیک برای همه DMUها به استثناء DMU6 برابر با یک می‌باشد و نشان می‌دهد که واحدهای تحت ارزیابی مذکور همگی بجز DMU6 کارا می‌باشند و این در حالی است که مقدار کارایی کلی به‌دست آمده از مدل‌های پیشنهادی (۳) و (۴) برای DMUهای ۱، ۲، ۵، ۸ و ۱۰ برابر با یک و برای DMU های ۳، ۴، ۶، ۷ و ۹ ، کمتر از یک به‌دست آمده است. این بدان معناست که واحدهای تحت ارزیابی ۱، ۲، ۵، ۸ و ۱۰ کارا و واحدهای تحت ارزیابی ۳، ۴، ۶، ۷ و ۹ ، ناکارا می‌باشند. با توجه به این‌که کارایی DMUهای ۳، ۴، ۷ و ۹ با استفاده از مدل‌های کلاسیک DEA و بدون لحاظ نمودن ارزش‌گذاری غیرخطی برای متغیر انعطاف‌پذیرمجموع دارایی‌ها، کارا به‌دست آمده بود، بنابراین ناکارا به‌دست آمدن آن‌ها با استفاده از مدل پیشنهادی، نشان‌دهنده‌ی حساسیت بیشتر مدل و قابلیت بالای آن در ارزیابی دقیق‌تر و ایجاد تمایز میان واحدهای کارا خواهد بود.

نتایج نشان می‌دهد که در نظر گرفتن ارزش‌گذاری غیرخطی متناسب با وضعیت متغیر انعطاف‌پذیر (ورودی یا خروجی)، دقت و برتری مدل را نسبت به سایر مدل‌هایی که رفتار و ارزش‌گذاری همه متغیرها را خطی در نظر می‌گیرند، افزایش خواهد داد.

۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مقاله مدل توسعه‌یافته DEA در حضور متغیرهای انعطاف‌پذیر با ارزش‌گذاری انعطاف‌پذیر ارایه شد. در این مدل با توجه به این‌که در مسایل واقعی بسیاری از ورودی و خروجی‌های DMUها از جمله متغیرهای

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.3.109]

انعطاف‌پذیر با ارزش متفاوت و غیرخطی در دو حالت ورودی و خروجی مواجه می‌باشند، از تئوری قطعه‌ای خطی برای اعمال تئیر رفتار غیرخطی آن متغیرها در محاسبه مقدار کارایی استفاده گردید. هدف اصلی از به کارگیری تابع قطعه‌ای خطی در این مقاله این است که ارزش‌گذاری هر متغیر را متناسب با مقدار آن تعیین نمود تا بتوان به نتایج دقیق ، قابل اعتماد و نیز کاربردی جهت اتخاذ تصمیمات استراتژیک دست یافت. در واقع مدیران و تصمیم‌گیرندگان به دنبال حداکثر نمودن خروجی و حداقل نمودن ورودی‌ها هستند و برای آنکه بتوانند میان واحدهای تحت ارزیابی با مقدار کارایی برابر اما مقدار ورودی‌های مصرفی و خروجی‌های تولید شده‌ی متفاوت، تمایز قایل شوند می‌بایست برای مقادیر بالاتر از ورودی‌ها ارزش کمتر و برای مقادیر بالاتر از خروجی‌ها ارزش بیشتری در نظر گیرند. به همین منظور در این مقاله برای اولین بار برای ارزیابی کارایی به ارایه مدلی مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها در حضور متغیرهای انعطاف‌پذیر و با لحاظ نمودن تاثیر متفاوت متغیرهای انعطاف‌پذیر در سنجش کارایی با در نظر گرفتن وزن‌های متفاوت جهت توجیه رفتار متفاوت آن‌ها در دو حالت ورودی و خروجی با استفاده از تئوری قطعه‌ای خطی پرداخته شده است. برای اعتبارسنجی مدل پیشنهادی، داده‌های ۱۰ کارخانه تولیدکننده سیمان جمع‌آوری و مقدار کارایی آن ها محاسبه گردید. با لحاظ نمودن انعطاف‌پذیری متغیر مجموع دارایی‌ها در ارزیابی کارایی واحدها و نیز در نظر گرفتن ارزش‌گذاری غیر خطی متناسب با وضعیت متغیر انعطاف‌پذیر (ورودی یا خروجی)، مقدار کارایی به‌دست آمده برای برخی از DMUها با مقدار کارایی آن‌ها با استفاده از سایر مدل‌هایی که رفتار و ارزش‌گذاری همه متغیرها را خطی در نظر می‌گیرند ، متفاوت می‌باشد که این نشان‌دهنده‌ی حساسیت بیشتر مدل و قابلیت بالای آن در ارزیابی دقیق‌تر و ایجاد تمایز میان مقادیر کارایی خواهد بود.

از آنجایی که ساختار در نظر گرفته‌شده برای این مطالعه به‌صورت ساده و اصطلاحاً جعبه سیاه [1] و بدون حضور متغیرهای نامطلوب در مدل می‌باشد، لذا پیشنهاد می‌گردد که در مطالعات آتی مدل ارایه‌شده در این مقاله جهت ارزیابی کارایی ساختار شبکه‌ای و با چندین مرحله[2] و نیز با لحاظ نمودن متغیرهای نامطلوب (ورودی، تولیدات میانی، خروجی) تعمیم داده شود. همچنین می‌توان از داده‌های نادقیق همچون داده‌های فازی نیز در مدل‌های پیشنهادی استفاده نمود.

منابع

[1] Motroud, F., and Tawhidi, Q. (2016). Provide cost-benefit models in the presence of flexible variables. New Research in Mathematics, 2 (7), 43-49. (In Persian)

[2] Cook, W. D., & Zhu, J. (2007). Classifying inputs and outputs in data envelopment analysis. European Journal of Operational Research, 180(2), 692-699.

[3] Toloo, M. (2009). On classifying inputs and outputs in DEA: a revised model. European Journal of Operational Research, 198(1), 358-360.

[4] Toloo, M. (2012). Alternative solutions for classifying inputs and outputs in data envelopment analysis. Computers & Mathematics with Applications, 63(6), 1104-1110.

[1] Black box
[2] Stage

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.3.109]

[5] Amirteimoori, A., & Emrouznejad, A. (2011). Flexible measures in production process: a DEA-based approach. RAIRO-Operations Research, 45(1), 63-74.
[6] Amirteimoori, A., Emrouznejad, A., & Khoshandam, L. (2013). Classifying flexible measures in data envelopment analysis: A slack-based measure. Measurement, 46(10), 4100-4107.
[7] Boďa, M. (2020). Classifying flexible measures in data envelopment analysis: A slacks-based measure–A comment. Measurement, 150, 107045.
[8] Tohidi, G., & Matroud, F. (2017). A new non-oriented model for classifying flexible measures in DEA. Journal of the Operational Research Society, 68(9), 1019-1029.
[9] Toloo, M., Allahyar, M., & Hančlová, J. (2018). A non-radial directional distance method on classifying inputs and outputs in DEA: Application to banking industry. Expert Systems with Applications, 92, 495-506.
[10] Kordrostami, S., Amirteimoori, A., & Noveiri, M. J. S. (2019). Inputs and outputs classification in integer-valued data envelopment analysis. Measurement, 139, 317-325.
[11] Kiyadeh, M. S. H., Saati, S., & Kordrostami, S. (2019). Improvement of models for determination of flexible factor type in data envelopment analysis. Measurement, 137, 49-57.
[12] Abolghasem, S., Toloo, M., & Amézquita, S. (2019). Cross-efficiency evaluation in the presence of flexible measures with an application to healthcare systems. Health care management science, 22(3), 512-533.
[13] Toloo, M., Ebrahimi, B., & Amin, G. R. (2021). New data envelopment analysis models for classifying flexible measures: The role of non-Archimedean epsilon. European Journal of Operational Research, 292(3), 1037-1050.
[14] Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European journal of operational research, 2(6), 429-444.
[15] Cook, W. D., & Zhu, J. (2009). Piecewise linear output measures in DEA (third revision). European Journal of Operational Research, 197(1), 312-319.
[16] Lotfi, F. H., Rostamy-Malkhalifeh, M., & Moghaddas, Z. (2010). Modified piecewise linear DEA model. European journal of operational research, 205(3), 729-733.
[17] Alizadeh Afrouzi M. (2020). The Malmquist Productivity Index with the Flexible Variables. Journal of Operational Research and Its Applications, 17 (4), 89-98. (In Persian)
[18] Noohi Tehrani T, Hosseinzadeh Lotfi F, Shoar M, Saati Mohtadi S. (2021). Providing a Model for Evaluating the Efficiency of Information Flow in the Supply Chain Using Data Envelopment Analysis. Journal of Operational Research and Its Applications, 18 (2), 125-142. (In Persian)
[19] Moghaddas, Z., Vaez-Ghasemi, M., Hosseinzadeh Lotfi, F., & Farzipoor Saen, R. (2020). Stepwise pricing in evaluating revenue efficiency in Data Envelopment Analysis: A case study in power plants. Scientia Iranica.
[20] Mirzaeian, F., & Fallahnejad, R. (2021). Cost Malmquist Productivity Index Based on Piecewise Linear Cost Function in Data Envelopment Analysis. Industrial Management Journal, 13(2), 300-328.
[21] Mirzaeian, F., & Fallahnejad, R. (2021). Estimation of cost efficiency with piecewise linear cost function in integer-valued data envelopment analysis. Mathematical Sciences, 1-11.
[22] Ebrahimi, B., & Hajizadeh, E. (2021). A novel DEA model for solving performance measurement problems with flexible measures: An application to Tehran Stock Exchange. Measurement, 179, 109444.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.3.109]