Journal of Operational Research in its Applications
Vol.22, NO.3, Autumn 2025
ISSN: 2251-7286
DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087

Queuing Systems with Discrete Time Series Input and Application in Asynchronous Transmission Networks

M. Shams[1*], H. Ghafoori[2]
[1]*Assistant Professor, Department of Statistics, University of Kashan, Kashan, Iran*
[2] *Master's degree in Mathematical Statistics, Department of Statistics, University of Yazd, Yazd, Iran*

Research Paper

Received: 30 March 2025
Accepted: 5 September 2025

Abstract: Discrete time series models are often used to count events at discrete times. In this paper, the stationary distribution of system size and the waiting time distribution of queuing systems whose input is a time series are calculated. In finding the steady state probabilities of queuing systems, it is recommended to use matrix analysis methods that replace the generating function and Laplace transform methods. Using this tool, hard numerical calculations are made easier and are used in practical applications. Also, the applications of these models in telecommunications and communications, especially asynchronous transmission networks, are analyzed.

Introduction: One of the popular statistical models that is useful for modeling dependent data is time series models. Time series models with integer or integer values in counting data measured in time sequence are used in numerous applications and some titles count events, objects, or people occurring at successive intervals or at successive points in time.

Materials and Methods: One of the important criteria in queuing models is the system size and waiting time distribution. When the system reaches a steady state, the stationary distribution can describe the model well. In this paper, the stationary distribution of system size and waiting time distribution of queuing systems whose input is a time series are calculated.

Results and Discussion: In finding the steady state probabilities of queuing systems, it is recommended to use matrix analysis methods that replace the generating function and Laplace transform methods. Using this tool, hard numerical calculations are made easier and are used in practical applications.

Conclusions: The applications of the discrete-time multi-service queuing system with autoregressive inputs introduced in this paper are discussed in telecommunications and communications, especially asynchronous transmission networks, which were investigated in this paper. Researchers can find other applications of the model presented in the paper.

Keywords: Time Series Models, Queuing Systems, Markov Renewal Process, Asynchronous Transmission Networks.

* *Corresponding Author: mehdishams@kashanu.ac.ir*

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087]

مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال بیست و دوم، شماره سوم (پیاپی ۸۶)، پاییز ۰۴، ص ص ۲۲-۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱
DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087

سیستم‌های صف‌بندی با ورودی اتورگرسیو گسسته و کاربرد در شبکه‌های انتقال ناهم‌زمان

مهدی شمس[1*]، هانیه غفوری[2]
۱- استادیار، گروه آمار، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
۲- فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد رشته آمار ریاضی، گروه آمار، دانشگاه یزد، یزد، ایران

رسید مقاله: ۱۰ فروردین ۱۴۰۴
پذیرش مقاله: ۱۴ شهریور ۱۴۰۴

چکیده
مدل‌های سری زمانی گسسته اغلب برای شمارش حوادث در زمان‌های گسسته مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این مقاله توزیع مانای اندازه‌ی سیستم و توزیع زمان انتظار سیستم‌های صف که ورودی آن یک سری زمانی است محاسبه می‌شوند. در پیدا کردن احتمال‌های وضعیت پایای سیستم صف‌بندی، استفاده از روش‌های تحلیل ماتریسی که جایگزین روش‌های تابع مولد و تبدیل لاپلاس هستند توصیه می‌شود. با استفاده از این ابزار، محاسبات سخت عددی، آسان‌تر شده و مورد استفاده در کاربردهای عملی قرار می‌گیرد. همچنین کاربردهای این مدل‌ها در در مخابرات و ارتباطات به‌ویژه شبکه‌های انتقال ناهم‌زمان تحلیل می‌شوند.

کلمات کلیدی: مدل‌های سری زمانی، سیستم‌های صف‌بندی، فرایند تجدید مارکف، شبکه‌های انتقال ناهم‌زمان.

۱ مقدمه
مدل‌های سری‌های زمانی با مقدارهای صحیح یا گسسته در داده‌های شمارشی اندازه‌گیری‌شده بر حسب توالی زمانی در عمل کاربردهای فراوان دارند و اغلب به عنوان شمارش حوادث، اشیاء یا افراد در فاصله‌های متوالی یا در نقطه‌های متوالی در زمان اتفاق می‌افتند. در برخی مدل‌های صف‌بندی، ورودی‌ها را می‌توان به‌عنوان مدل‌های سری زمانی گسسته در نظر گرفت. صف‌های چندسرویس‌دهی اغلب در سیستم‌های مخابراتی خصوصاً در طراحی شبکه‌ها به روش شبکه‌های انتقال ناهم‌زمان، یعنی ATM مورد استفاده قرار می‌گیرد. این صف‌ها به‌طور مستقیم در سیستم‌های حمل و نقل هوشمند، مرکزهای تماس، شبکه، مخابرات، صف سرور، ابررایانه‌های پایانه‌های مخابراتی، سیستم‌های مخابرات پیشرفته و ترافیک قابل اجرا هستند.

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: mehdishams@kashanu.ac.ir

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]
[DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087]

شبکه‌ی ATM یک پروتکل سوییچینگ بسته‌ای است که داده‌ها را در سلول‌هایی با اندازه‌ی کوچک ثابت رمزگذاری می‌کند و هدف این تکنولوژی طراحی راهبرد شبکه‌ها است که می‌تواند زمان واقعی صدا و تصویر در همایش‌ها را به خوبی فایل‌های عکس و متن و ایمیل انتقال دهد. فرایندهای ورودی مارکف (MAP)[1] از توزیع نمایی (مثل فرایند پوآسون مارکف تعدیل‌یافته (MMPPs)[2]) ساخته شده‌اند که در قضیه‌ی ترافیک از راه دور کلاسیک که ترافیک خودهمبستگی بالایی را نشان می‌دهد، مورد استفاده قرار می‌گیرند. با توجه به ویژگی فقدان حافظه‌ی توزیع نمایی، تجزیه و تحلیل مدل‌های ترافیک از راه دور معمولاً قابل انجام هستند. هم‌چنین شناسایی و برآورد مدل یک امر اساسی برای این مدل‌ها است. معمولاً به منظور کاهش تعداد پارامترها، دو حالت MMPPs یا فرایند برنولی مارکف تعدیل‌یافته (MMBPs)[3] استفاده می‌شوند، زیرا این توزیع‌ها فقط ۴ پارامتر یا کمتر برای برآورد شدن دارند و خودهمبستگی‌های آن‌ها نمایی یا هندسی بریده شده هستند که یکی از ویژگی‌های برجسته‌ی ترافیکی در شبکه‌های مخابراتی مانند ATM[4] است.

مدل‌های سری زمانی با تعداد نسبتاً کمتری از پارامترها برای مدل‌سازی دقیق و معنی‌داری از منابع ترافیکی مختلف در برنامه‌های کاربردی با سرعت بالا مناسب هستند. از میان سری‌های زمانی، $DAR(1)$[5] یک فرایند مارکف با تابع خودهمبستگی به‌طور هندسی بریده شده است که می‌تواند هر توزیع کلی را نمایش دهد. گذشته از این $M/M/\infty$ بسیار ساده‌تر از فرایند ورودی مارکف دسته‌ای (BMAP)[6] است که هم‌چنین می‌تواند با هر توزیع کلی تطبیق داده شود. بنابراین $DAR(1)$ می‌تواند به عنوان یک داوطلب خوب در مدل ترافیک ورودی در شبکه‌های مخابرات مانند شبکه‌ی ATM مورد بررسی قرار گیرد.

معمولاً روش‌های تابع مولد و تبدیل لاپلاس در پیدا کردن احتمال‌های وضعیت پایای سیستم‌های صف‌بندی مانند $M/M/1$، $M/M/\infty$ و $G/G/1$ و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرند. اما راحتی سر و کار داشتن با این سیستم‌های صف‌بندی از طریق این روش‌ها، از لحاظ عددی وقتی که توزیع زمان بین دو ورود یا سرویس نمایی نیست پیچیده می‌شوند. روش‌های تحلیل ماتریسی [۱] در حل مسایل صف، باعث می‌شود که محاسبات سخت عددی کاهش‌یافته و به‌کارگیری مدل‌های صف برای تحلیل موقعیت‌های کاربردی، با اختیار کردن توزیع زمان بین دو ورود و سرویس غیر نمایی، که در کاربردهای عملی مناسب‌تر هستند افزایش یابند.

سیستم‌هایی با مدل زنجیرهای مارکف $G/M/1$ و $M/G/1$، در سیستم‌های ارتباطی مدل‌سازی پیشرفته گسترش پیدا می‌کند. هر کدام از این صف‌ها ویژگی‌هایی را نشان می‌دهند که نیاز به یک حل ماتریسی دارد. صف $G/M/1$ یک ویژگی هندسی را که توانایی استفاده از روش‌های ماتریسی را دارد نشان می‌دهد، در حالی‌که تحلیل ماتریسی سیستم‌های $M/G/1$ دشوارتر هستند.

[1] Markovian Arrival Processes
[2] Markov Modulated Poisson Process
[3] Markov Modulated Bernoulli Process
[4] Asynchronous Transfer Mode
[5] Discrete AutoRegressive process of the order p
[6] Batch Markovian Arrival Process

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]
[DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087]

در [۲، ۳] یک روش ساده برای یافتن دنباله‌ی مانا از متغیرهای تصادفی وابسته با یک توزیع حاشیه‌ای مشخص معرفی شده است. سری‌های زمانی گسسته از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند که به عنوان نمونه می‌توان به مراجع [۶-۴] اشاره کرد. مدل $DAR(1)$ (فرایند اتورگرسیو گسسته از مرتبه ۱) در [۷] مورد بررسی قرار گرفته است. در [۸] چگونگی بهبود عملکرد شبکه‌های مخابراتی تحت محدودیت پایداری مورد تحلیل قرار می‌گیرد. سیستم‌های صف در مخابرات و ارتباطات کاربرد فراوان دارند که مطالعه مرجع [۹] برای این منظور می‌تواند مفید باشد. فرایند $DAR(1)$ به یک مدل خوب برای ترافیک همایش از راه دور کدگذاری شده‌ی نرخ بیت متغیر (VBR)[1]، شناخته شده است [۱۰، ۱۱]. توزیع زمان انتظار از صف تک‌سرویس‌دهی زمان پیوسته با ورودی $DAR(1)$ و هم‌چنین جمله با فرم بسته برای تابع مولد احتمال مانای اندازه‌ی سیستم از صف تک‌سرویس‌دهی زمان پیوسته با ورودی $DAR(1)$، در [۱۲، ۱۳] مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. در [۱۴]، میانگین اندازه‌ی صف در یک صف با ورودی‌های $DAR(p)$ بررسی شده است. تقریب‌های تحلیلی از صف‌ها با زمان‌های سرویس اتورگرسیو با همبستگی کم و زیاد، در [۱۵] مورد بحث قرار گرفته است. ماتریس احتمال انتقال یک مرحله‌ای از این فرایند مارکف از نوع $M/G/1$ در [۱] ارایه شده است. در [۱۶]، سیستم‌های صف‌بندی با توزیع گسسته میتاگ-لفلر بررسی شدند.

دراین مقاله سیستم‌های صف چندسرویس‌دهی زمان گسسته‌ی مختلف با ورودی $DAR(1)$، که با توزیع حاشیه‌ای شبه‌دوجمله‌ای منفی نوع دو داده شده مطالعه می‌شوند. توزیع دوجمله‌ای منفی، توزیع پوآسون تعمیم‌یافته، توزیع بورل-تنر و توزیع پوآسون تعمیم‌یافته‌ی بریده‌شده در صفر به عنوان حالت‌های خاص توزیع شبه‌دوجمله‌ای منفی نوع دو بررسی می‌شوند. همچنین با کمک روش‌های تحلیل ماتریسی و قضیه‌ی احیاکننده‌ی نوپیدایشی مارکف، توزیع مانای اندازه‌ی سیستم و توزیع زمان انتظار بسته‌ی دلخواه محاسبه می‌شود.

۲ پیش‌نیازها

در سیستم‌های صف گسسته که در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرند، زمان یک عدد صحیح نظر گرفته می‌شود و از این‌رو زمان را به شکاف‌هایی با اندازه‌ی مساوی تقسیم کرده و یک شکاف برای به‌کارگیری یک بسته توسط سرویس‌دهنده مورد نیاز است. فرض می‌کنیم که ورود بسته در ابتدا و انتهای شکاف رخ می‌دهد. اگر $X(t)$ تعداد بسته‌های ورودی در شروع t-امین شکاف را نشان دهد، فرایند تصادفی $\{X(t): t = ۰,۱,...\}$ نشان‌دهنده‌ی بسته‌های ورودی است. فرایند تصادفی $\{N(t): t = ۰,۱,...\}$ یا اندازه‌ی سیستم، تعداد بسته‌های درون سیستم را نشان می‌دهد که بلافاصله قبل از ورود در شروع t-امین شکاف رخ می‌دهند. برای این سیستم‌های صف‌بندی، توزیع مانای اندازه‌ی سیستم و توزیع زمان انتظار بسته‌ی دلخواه با کمک روش‌های تحلیل ماتریسی و قضیه‌ی احیاکننده‌ی نوپیدایشی مارکف حاصل می‌شود. در احتمال کاربردی، یک فرآیند نوپیدایشی، دسته‌ای از فرآیندهای تصادفی با این ویژگی است که بخش‌های خاصی از فرآیند را می‌توان از نظر آماری

[1] Variable Bit Rate

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087]

مستقل از یکدیگر در نظر گرفت [۱۷]. در حقیقت در یک فرآیند نوپیدایشی، نقطه‌های زمانی وجود دارند که از دیدگاه احتمال‌هایی، فرآیند خود را مجدداً آغاز می‌کند.

صف‌هایی با ورودی‌های منفی به عنوان یک سازوکار کنترل در بسیاری از شبکه‌های کامپیوتری و مخابراتی، شبکه‌های عصبی، سیستم‌های صنعتی و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرند. در [۱۸] از الگوریتم شبکه‌های عصبی و شبکه ژنتیک در جهت پیش‌بینی قیمت و روند تغییر قیمت سهام برای انتخاب سبد بهینه استفاده شده است. سرویس‌گیرنده‌های منفی می‌توانند در یک شبکه‌ی کامپیوتری یا پایگاه داده، ویروس یا فرمان‌های حذف بعضی از تغییرات آدرس و در یک سیستم صنعتی، فرمان‌های تقاضا را نشان دهند و در شبکه‌های عصبی، سرویس‌گیرنده‌ی مثبت به عنوان یک برآشفتگی و سرویس‌گیرنده‌ی منفی به عنوان یک بازدارنده وارد عمل می‌شود. یک ورودی منفی سرویسی دریافت نمی‌کند و اثر حذف یک سرویس‌گیرنده از صف را دارد. اگر سرویس‌گیرنده زمانی که صفی تشکیل نشده وارد سیستم شود، تاثیری در سیستم نمی‌گذارد و از دست رفته محسوب می‌شود. برای یک عدد ثابت k، وقتی‌که یک ورودی منفی با اندازه‌ی $L(<k)$ $[L(\geq k)]$ وارد سیستم می‌شود، کم‌ترین مقدار $(\mathrm{L};N(t))$ $[(K;N(t))]$ سرویس‌گیرنده‌ها در صف را حذف می‌کند.

سیستم صف‌بندی، یک سامانه شامل تعدادی سرویس‌دهنده و سرویس‌گیرنده‌هایی هست که تا سرویس‌شان کامل نشود، از سیستم خارج نمی‌شوند. متغیرهای تصادفی T_n و S_n را با مقدارهای حقیقی مثبت گویند، هرگاه به ازای $n\in\mathbb{N}$، $T_{n+1}>T_n$ و $S_{n+1}>S_n$. دنباله‌ی $T=\{T_n : n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ را فرایند نقطه‌ای ورودی و $S=\{S_n : n\in\mathbb{N}\}$ را دنباله‌ای از زمان‌های سرویس در نظر می‌گیریم. فرض کنید k تعداد باجه‌های سرویس‌دهنده و c ظرفیت سیستم باشد که $k,c\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. نظم سرویس B، الگوی سرویس است که می‌تواند FCFC[1] (کسی که اول آمده اول سرویس می‌گیرد)، LCFC[2] (آخرین نفر اول سرویس می‌گیرد) یا PS[3] (روش اولویت) باشد که به‌طور معمول در این مقاله نظم سرویس FCFC را برمی‌گزینیم. طبق نماد کندال [۱۹]، سیستم صف $T/S/k/c/B$ شامل فرایند نقطه‌ای ورودی T، دنباله‌ای از زمان‌های سرویس S، تعداد سرویس‌دهندگان k، ظرفیت سیستم c و نظم سرویس B است. اگر $c=\infty$ و $B=FCFS$، آن‌گاه نماد کندال [۱۹] به‌صورت ساده‌تر یعنی $T/S/k$ نشان داده می‌شود.

فرایند تصادفی $\{Z_n : n\geq 2\}$ را n-امین زمان بین دو ورود گویند که به‌صورت $Z_n=T_n-T_{n-1}$ تعریف می‌شود.

[1] First Come First Served
[2] Last Come First Served
[3] Processor Sharing

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087]

فرایند تصادفی $\{Z(t):t=۰,۱,...\}$ را در نظر بگیرید، در این صورت دنباله‌ی متغیرهای تصادفی دو متغیره‌ی $\{Y_n,S_n,n=۰,۱,۲,...\}$ را دنباله‌ی تجدید مارکف گویند، اگر، $S_۰=۰$، $S_{n+۱}\geq S_n$، $Y_n=۰,۱,۲,...$ و

(۱)

$$\begin{aligned}P\left(Y_{n+۱}=j,S_{n+۱}-S_n\leq x\,|Y_n=i,S_n,Y_{n-۱},S_{n-۱},...,Y_۰,S_۰\right)\\ =P\left(Y_{n+۱}=j,S_{n+۱}-S_n\leq x\,|Y_n=i\right)\\ =P\left(Y_۱=j,S_۱\leq x\,|Y_۰=i\right).\end{aligned}$$

فرآیندهای تجدید مارکف، یک فرآیندهای تصادفی است که رده فرآیندهای جهشی مارکف را تعمیم می‌دهند و زنجیرهای مارکف و فرآیندهای پواسون حالت‌های خاصی از آنها هستند.

ماتریس $G(x)=\left[G_{ij}(x)\right]$ را که احتمال شرطی آن توسط رابطه‌ی (۱) داده شده است، هسته‌ی دنباله‌ی تجدید مارکف نامند. فرض کنید $N(t)=\sup\{n=۰,۱,...:S_n\leq t\}$ تعداد مشاهدات فرایند $Z(t)$ تا زمان t باشد. هم‌چنین به ازای هر $j\in\mathbb{Z}$، قرار دهید

$$Z_j(n)=\begin{cases}۱ & Y_n=j\\ ۰ & o.w.\end{cases}$$

در این صورت $N_j(t)=\sum_{n=۱}^{N(t)}Z_j(n)$ تعداد مشاهدات زمانی j تا رسیدن به زمان t است. فرایند $N(t)=N_j(t)$، $j\in I$ را فرایند تجدید مارکف و هسته‌ی $G(x)$ را هسته‌ی فرایندهای تجدید مارکف گویند. در یک فرآیند مارکف نشانیده، فقط حالت سیستم را در نقطه‌های زمانی نشانه‌گذاری شده خاصی، مانند زمان ورود یا خروج در یک سیستم صف، مشاهده می‌کنیم. این نقطه‌های نشانه‌گذاری شده، یک زنجیر مارکف را تعریف می‌کنند. زمان بین این نقطه‌ها، یک متغیر تصادفی است و فرآیندی که این زمان‌ها را توصیف می‌کند، یک فرآیند نیم‌مارکف است. قابل ذکر است که در فرآیند نیم‌مارکف ، زمان تا انتقال حالت بعدی می‌تواند هم به حالت فعلی و هم به حالت بعدی بستگی داشته باشد. فرایندهایی با دنباله‌های تجدید مارکف نشانیده را فرایندهای احیاکننده‌ی نوپیدایشی مارکف گویند. فرایند تصادفی $\{Z(t):t=۰,۱,...\}$ را یک فرایند احیاکننده‌ی نوپیدایشی مارکف نامند، اگر دنباله‌ی تجدید مارکف

$$\{Y_n,S_n:n=۰,۱,...\}$$

از متغیرهای تصادفی، که تمام توزیع‌های شرطی متناهی‌البعد $\{Z(t+S_n),\mathrm{t}=۰,۱,...\}$ به شرط $\{Z(u):۰\leq u\leq S_n,Y_n=i\}$ را همانند توزیع‌های $\{Z(t):t=۰,۱,...\}$ به شرط $Y_۰=i$ تشکیل دهند، وجود داشته باشند.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087]

۳ روش تحلیل ماتریسی

روش‌های تحلیل ماتریسی [۲۰] یک تفسیر احتمالی از ماتریس‌های انتقال فرایندها ارائه می‌دهد. هم‌چنین مطالعه‌ی زنجیرهای مارکف نشانیده، تحلیل‌های فرایندهای تصادفی را توسط بکارگیری این روش‌ها ساده می‌کند. در [۱] دو راه حل ماتریسی معرفی می‌شود و اغلب، مدل‌های صف‌بندی $G/M/۱$ و $M/G/۱$ بررسی می‌شوند که از آن‌ها تحت عنوان فرایندهای شبه زاد و مرگ یاد می‌شود. در مدل‌های صف‌بندی، فرآیند شبه زاد و مرگ، تعمیمی از فرآیند زاد و مرگ است که به‌صورت یک در میان بین سطح‌های بالا و پایین می‌رود، اما زمان بین این انتقال‌ها می‌تواند توزیع پیچیده‌تری داشته باشد که در بلوک‌های ماتریس احتمال انتقال یا ماتریس انتقال گذار کدگذاری شده است. توزیع مانای یک فرآیند شبه زاد و مرگ را می‌توان با استفاده از روش‌های هندسی ماتریسی محاسبه کرد.

ماتریس احتمال انتقال P برای یک زنجیر مارکف، می‌تواند روی مرز و قسمت‌های تکراری تجزیه شود. حالت‌های مرزی در مواردی که هیچ مشتری نباشد، مورد توجه قرار می‌گیرند و به‌طور کلی $m+۱$ تا از این حالت‌ها وجود دارند. حالت‌های تکراری از قسمت‌های تکراری ماتریس P هدایت می‌شوند. ماتریس را می‌توان به عنصرهایی که هر دو نوع از حالت‌ها را تشکیل می‌دهند، تقسیم کرد که در آن حالت‌های مرزی توسط بلوک‌هایی با اندازه‌ی $(m+۱)\times(m+۱)$ و واحدهای تکراری با $m\times m$ نشان داده می‌شوند. صف چندسرویس‌دهی زمان گسسته با ورودی‌های مرتبه ۱، یک توزیع حاشیه‌ای خاص را مشخص می‌کند.

زنجیر مارکف $\{(N(t),X(t)):t=۰,۱,...\}$ یک فرایند مارکف دوبعدی با فضای پارامتر $E=\{۰,۱,...\}^۲$ است. توزیع مانا را می‌توان توسط روش‌های تحلیل ماتریسی و با استفاده از نظریه‌ی فرایندهای احیاکننده‌ی نوپیدایشی مارکف به‌صورت زیر محاسبه کرد:

نخست یک زنجیر مارکف نشانیده را در زمان‌های تکمیل سرویس ایجاد می‌کنیم. دوره‌های نشانیده‌ی $\{\tau_k:t=۰,۱,...\}$ که در آن $۰<\tau_۰<\tau_۱<\tau_۲<\tau_۳,...$ به شرح زیر تعریف می‌شوند:

$$\tau_k=\begin{cases}۰ & k=۰\\ \inf\{t>\tau_{k-۱}:Z(t)=۱\ or\ ۰\le X(t)\le s-۱\} & k=۱,۲,....\end{cases}$$

قرار دهید $N(k)=N(\tau_k)$، $k=۰,۱,...$ و

$$J_۰=s,$$

$$J_k=\begin{cases}X(\tau_k) & Z(\tau_k)=۰,\ k=۱,۲,...\\ S & Z(\tau_k)=۱,\ k=۱,۲,...\end{cases}$$

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087]

بسته‌های ورودی نزدیک و بعد از τ_k به شرط J_k، مستقل هستند. با توجه به این حقیقت، مشاهده می‌شود که $X_k=\{(N_k,\mathrm{J}_k):k=0,1,...\}$، فرایند تجدید مارکف جدید با فضای حالت E است. ماتریس احتمال انتقال فرایند تجدید مارکف X_k به‌صورت زیر خواهد بود:

$$P=\begin{pmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & \cdots \\ A_0 & A_1 & A_2 & \cdots \\ 0 & A_0 & A_1 & \cdots \\ 0 & 0 & A_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

این حالت را یک ماتریس از نوع $M/G/1$ گویند. در حالت (n,i)، مولفه‌ی اول، یعنی n را سطح و مولفه‌ی دوم، یعنی i را فاز گویند. زیرا در ماتریس احتمال انتقال به جز سطر اول، هر سطر نسبت به سطر قبلی یکی به جلو انتقال می‌یابد و اعضای قبل از انتقال صفر می‌شوند، بنابراین زنجیر مارکف X_k را از سمت چپ رهاشده نیز نامند.

دوره τ_n را به‌عنوان تعدادی از مراحل، تا زمانی که زنجیر X_k برای اولین بار به سطح n برسد تعریف می‌کنیم. سپس به ازای هر $(i,j)\le m$ و $k\ge 1$،

$$G_k(i,j)=P\left(\tau_n=k,X_k=(n,j)\middle|X_0=(n+1,\mathrm{i})\right).$$

اگر زنجیر مارکف X_k بازگشتی باشد، ماتریس G که در معادله‌ی نقطه ثابت $G=\sum_{n=0}^{\infty}A_nG^n$ صدق می‌کند، یک ماتریس تصادفی است. همچنین ماتریس G می‌تواند به‌صورت بازگشتی $G_1=A_0$ و $G_k=\sum_{n=1}^{k-1}A_nG_{k-1}^n$ محاسبه شود. طرح بازگشتی برای بردار احتمال مانای $x=xP$ از P را می‌توان با استفاده از ماتریس G تعیین کرد. به این ترتیب که، $x=(x_n;n\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ با $x_n=(x_{n_i};1\le i\le m)$ شامل احتمال‌های مانا برای سطح n است. اگر X_k، بازگشتی مثبت باشد، آن‌گاه بردار x_n برای هر $n\ge 1$ به‌صورت بازگشتی

$$x_n=\left(x_0\bar{B}_n+\sum_{k=1}^{n-1}x_k\bar{A}_{n+1-k}\right)\left(I-\bar{A}_1\right)^{-1}$$

است که در آن $\bar{A}_n=\sum_{k=n}^{\infty}A_kG^{k-n}$ و $\bar{B}_n=\sum_{k=n}^{\infty}B_kG^{k-n}$. توزیع مانای $\{(N(t),X(t)):t=0,1,...\}$ می‌تواند توسط قضایای حدی برای فرایندهای احیاکننده‌ی نوپیدایشی مارکف زمان گسسته به‌صورت زیر تعیین شود. یادآوری می‌شود، یک حالت در یک زنجیر مارکف، یک حالت بازگشتی مثبت است اگرزمان مورد انتظار برای بازگشت به آن حالت متناهی باشد.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087]

قضیه ۱.[۲۰] فرض کنید $\{F(t):t=۰,۱,...\}$ فرایند احیاکننده‌ی نوپیدایشی مارکف زمان گسسته روی فضای حالت شمارای S با دنباله‌ی تجدید مارکف $\{(Y_k,S_k):k=۰,۱,...\}$ باشند. اگر E فضای حالت شمارای فرایند مارکف $\{Y_k:k=۰,۱,...\}$ باشد، برای $i\in E$ و $j\in S$ داریم:

$$\mu_i = E\left[S_۱ \middle| Y_۰ = i\right],$$

$$\alpha_{ij} = E\left[\sum_{t=۰}^{S_۱-۱} ۱_{\{F(t)=j\}} \middle| Y_۰ = i\right].$$

فرض کنید فرایند نیم‌مارکف زمان گسسته‌ی $\{Y(t):t=۰,۱,...\}$ توسط $Y(t)=Y_k$ برای $S_k \le t \le S_{k+۱}$، بازگشتی تحویل‌ناپذیر، نادوره‌ای و مثبت باشد. بنابراین برای $j\in S$ و $k\in E$ داریم:

$$\lim_{t\to\infty} p\{F(t)=j \mid Y_۰=k\} = \frac{\sum_{i\in E}\pi_i\alpha_{ij}}{\sum_{i\in E}\mu_i\alpha_{ij}}$$

که در آن $\pi=(\pi_i)_{i\in E}$ یک توزیع مانای فرایند مارکف $\{Y_k:k=۰,۱,...\}$ است.

٤ صف $DAR(۱)/D/s$ با توزیع حاشیه‌ای شبه‌دوجمله‌ای منفی نوع دو

در پهن‌باند شبکه‌ی رقمی خدمات مجتمع (B-ISDN)[1]، شبکه‌ی ATM، قرارداد اینترنت (IP)[2]، بسته‌ها یا سلول‌های صدا، ویدئو و داده بیش از یک کانال انتقال مشترک بر اساس تقسیم‌بندی‌های آماری ارسال می‌شود. دشواری‌های این مدل‌ها از ترافیک ناشی از ساختارهای ورودی همبسته هستند. یک روش معمول برای تقریب این فرایند ورودی تجدید استفاده از روش‌های تحلیلی برای فرایندهای ورودی DAR پیشنهاد می‌شود. تأثیر خودهمبستگی می‌تواند در فرایندهای ترافیکی، در اندازه‌گیری‌های عملکرد صف مانند: میانگین طول صف، میانگین زمان‌های انتظار و احتمال‌های از دست رفته‌ی حافظه‌های میانی متناهی بسیار چشم‌گیر باشد.

یک فرایند تجدید مارکف در دوره‌های نشانیده از فرایند مارکف اصلی ساخته شده است و از این رو توزیع مانا از ساختار فرایند تجدید مارکف توسط روش‌های تحلیل ماتریسی محاسبه می‌شود و در پی آن توزیع مانای اندازه‌ی سیستم فرایند مارکف اصلی توسط فرایندهای احیاکننده‌ی مارکف محاسبه می‌شود. در این بخش فرایند ورودی یک صف چندسرویس‌دهی با $S>۰$ سرویس با نرخ سرویس ثابت به وسیله‌ی $DAR(۱)$ با توزیع حاشیه‌ای شبه‌دوجمله‌ای منفی نوع دو مورد بررسی قرار گرفته است. این سیستم صف‌بندی چندسرویس‌دهی زمان گسسته با ورودی‌های اتورگرسیو، برای مدل‌سازی صف ATM، با ترافیک همایش از راه دور کدگذاری شده‌ی VBR مناسب‌تر است. مدل $DAR(۱)$ توسط پارامترهای کمتر توصیف می‌شود و می‌توان آن‌را به آسانی با توزیع احتمال و نرخ خرابی تابع خودهمبستگی با مقدارهایی که توسط ترافیک واقعی اندازه‌گیری می‌شود منطبق

[1] Broadband Integrated Services Digital Network
[2] Internet Protocol

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]
[DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087]

کرد. این توزیع مانای سیستم صف‌بندی از اندازه‌ی سیستم و توزیع زمان انتظار بسته‌ی دلخواه با کمک روش‌های تحلیل ماتریسی و قضیه‌ی احیاکننده‌ی نوپیدایشی مارکف حاصل می‌شود.

توزیع دوجمله‌ای منفی (NBD)[1]، توزیع پوآسون تعمیم‌یافته و توزیع بورل-تانر در [۲۱] و توزیع پوآسون تعمیم‌یافته بریده شده در صفر به عنوان حالت‌های خاص توزیع شبه‌دوجمله‌ای منفی نوع دو (QNBD-II)[2] بررسی می‌شوند. این مدل به داده‌های واقعی از مشتریانی که برای بازرسی در یک فرودگاه منتظر هستند کاربرد دارد. تابع احتمال QNBD-II به‌صورت زیر است [۲۲]:

$$P\left(x;n,p_1,p_2\right)=\frac{\left(n+x-1\right)!p_1\left(p_1+xp_2\right)^{x-1}}{\left(n-1\right)!x!\left(1+p_1+xp_2\right)^{x+n}},\quad x=0,1,...$$

در حالتی که $p_2=0$، QNBD به NBD و زمانی‌که علاوه بر شرط قبلی $n=0$ نیز برقرار باشد، QNBD به توزیع شبه‌هندسی (QGSD)[3] با تابع احتمال $\left(\frac{p_1}{1+p_1}\right)^x\left(1+p_1\right)^{-1}$ تبدیل می‌شود. همچنین QNBD به توزیع پوآسون تعمیم‌یافته میل می‌کند که متاسفانه این توزیع به صوت سری‌های نامتناهی ظاهر می‌شود. روش گشتاوری برآوردهای مناسبی را برای پارامترهای توزیع ارایه نمی‌دهد، بنابراین مدل جدید توزیع QNBD برای $0<np_2<1$ و $0<p_1<1$ تابع احتمال زیر معرفی می‌شود:

$$p\left(x\right)=\frac{\left(np_2-p_1-1\right)}{\left(np_2-1\right)}\binom{n+x-1}{x}\frac{p_1\left(p_1+xp_2\right)^{x-1}}{\left(1+p_1+xp_2\right)^{x+n+1}}\qquad x=0,1,....\qquad (۲)$$

در حالتی که $p_2=0$، این مدل جدید به توزیع دوجمله‌ای منفی تبدیل می‌شود. احتمال‌های QNBD-II با رخدادهای متوالی کاهش می‌یابد. این همگرایی در احتمال‌ها باعث به وجود آمدن کاربردهایی در قابلیت اطمینان، زیست‌سنجی و تحلیل بقا می‌شود. مدل QNBD-II یک مدل تک‌متغیره است و فقط گشتاور اول (میانگین) آن یک فرم بسته دارد. کران بالا و پایین مد (M) به‌صورت $\frac{np_1-1}{1-p_1}<M<\frac{p_1(n-1)}{1-p_1}$ است که در آن $p_1<1$ و همچنین میانگین برابر $\frac{np_1}{1-np_2}$ است که در آن $np_2<1$. فرض کنید $X\sim QNBD\left(n,p_1,p_2\right)$ با تابع احتمال (۲) باشد. اگر $n\to\infty$ به‌طوری که $np_1=\alpha$ و $np_2=\lambda$، آن‌گاه متغیر تصادفی X به توزیع پوآسون تعمیم‌یافته با پارامترهای α و λ میل می‌کند. همچنین اگر $n\to\infty$ به‌طوری که $n\lambda^{-1}=\alpha$ و $\lambda^{-1}=p_2$، آن‌گاه متغیر تصادفی X به توزیع بورل-تانر میل می‌کند.

با مقایسه‌ی اولین گشتاور نمونه از مدل مورد نظر با گشتاور جامعه‌ی متناظر (روش گشتاوری) نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\bar{x}=\frac{np_1}{1-np_2}.\qquad (۳)$$

[1] Negative Binomial Distribution
[2] Quasi-Negative Binomial Distribution-II
[3] Quasi-Geometric Distribution

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]
[DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087]

با در نظر گرفتن $x = ۰$ در (۳) و مقایسه‌ی آن با فراوانی نسبی متناظرش یعنی $f_۰ = \frac{np_۲ - p_۱ - ۱}{(np_۲ - ۱)(۱+p_۱)^{n+۱}}$ و با استفاده از (۲) داریم:

$$\hat{p}_۱ = \left[\frac{۱}{f_۰}\left(۱+\frac{\bar{x}}{n}\right)\right]^{\frac{۱}{n+۱}} - ۱. \qquad (۴)$$

با در نظر گرفتن مقدار اولیه‌ی n در (۴)، مقدار $\hat{p}_۱$ حاصل می‌شود و زمانی‌که هر دوی این مقدارها در (۳) جای‌گزین شود، مقدار $\hat{p}_۲$ محاسبه می‌شود. به همین ترتیب با انجام دادن این روند در تکرارهای متوالی می‌توان براوردهای بهتری برای پارامترهای $(n, p_۱, p_۲)$ پیدا کرد.

فرض کنید ورودی ATM با ترافیک همایش از راه دور کدگذاری شده‌ی VBR یک مدل $DAR(۱)$ با QNBD باشد. دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با مقدارهای مثبت $\{Y(t): t = ۰,۱,...\}$ را در نظر بگیرید و تعریف کنید $b_x = P[Y(t) = x]$، $x = ۰,۱,...$. اگر فرایند ورودی دارای توزیع QNBD-II باشد، فرایند $DAR(۱)$، یعنی $\{X(t): t = ۰,۱,...\}$ را توسط معادله‌ی رگرسیون به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X(۰) = Y(۰),$$
$$X(t) = (۱ - Z(t))X(t-۱) + Z(t)Y(t), \quad t = ۱,۲,...$$

که $\{Z(t): t = ۰,۱,...\}$ متغیرهای تصادفی برنولی مستقل و هم‌توزیع با احتمال‌های $P[Z(t) = ۰] = \beta$ و $P[Z(t) = ۱] = ۱ - \beta$ است که $۰ \le \beta < ۱$. فرض کنید $\{Y(t): t = ۰,۱,...\}$ و $\{Z(t): t = ۰,۱,...\}$ و $X(۰)$ از $Y(t)$ و هم‌چنین $Z(t)$ها، $t \ge ۰$ مستقل باشند. در این صورت $DAR(۱)$ توسط پارامتر β و توزیع $\{b_x: x = ۰,۱,...\}$ از $Y(t)$ تعریف می‌شود به‌طوری که:

$$X(۰) = Y(۰),$$
$$X(t) = \begin{cases} X(t-۱) & w.p.\ \beta \\ Y(t) & w.p.\ ۱-\beta \end{cases} \qquad Z(t) = ۰ \text{ or } ۱.$$

ماتریس احتمال انتقال یک مرحله‌ای فرایند $\{X(t): t = ۰,۱,...\}$ به‌صورت زیر است:

$$\beta \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \cdots \\ ۰ & ۱ & ۰ & \cdots \\ ۰ & ۰ & ۱ & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + (۱-\beta) \begin{pmatrix} b_۰ & b_۱ & b_۲ & \cdots \\ b_۰ & b_۱ & b_۲ & \cdots \\ b_۰ & b_۱ & b_۲ & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

ویژگی‌های $DAR(۱)$ در ذیل به‌طور خلاصه بیان می‌شوند:

۱) $\{X(t): t = ۰,۱,...\}$ مانا است؛

۲) $X(t)$ و $Y(t)$ هم‌توزیع‌اند، از این رو $b_x = P[X(t) = x]$، $x = ۰,۱,...$؛

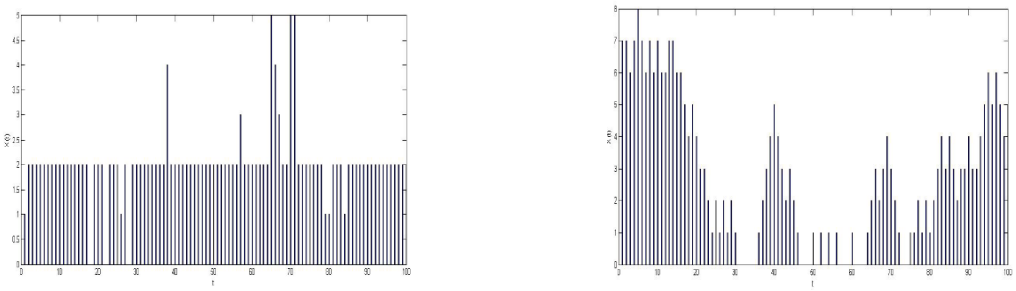
[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087]

۳) تابع خودهمبستگی برای $X(t)$ با تأخیر t به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\gamma(t)=\frac{Cov\left(X(\cdot);X(t)\right)}{\mathrm{Var}\left(X(\cdot)\right)}=\beta^{t},\ t=0,1,\ldots$$

که پارامتر β نرخ خرابی تابع خودهمبستگی است. زمانی‌که $\beta=1$، $X(t)$ همان $Y(t)$ است و هم‌چنین $DAR(1)$ ورودی‌های مستقل و هم‌توزیع تولید می‌کند. مسیر نمونه‌ی شبیه‌سازی شده فرآیند $DAR(1)$ با توزیع حاشیه‌ای مانا از نوع QNBD-II در شکل ۱ نشان داده شده است.



(ب) (الف)

شکل ۱. مسیر نمونه‌ی شبیه‌سازی شده فرآیند $DAR(1)$ با توزیع حاشیه‌ای مانا از نوع QNBD-II برای $p_1=0.021$، $n=100$، (الف) $\beta=1$، (ب) $\beta=0.2$.

۵ تحلیل زنجیر مارکف نشانیده

در یک مدل صف، زمان که مقدارهای صحیح را اختیار می‌کند را به شکاف‌هایی با اندازه‌ی مساوی تقسیم کرده و یک شکاف برای خدمت به یک بسته توسط یک سرویس‌دهنده مورد استفاده قرار می‌گیرد. فرض کنید ورودی‌های بسته در آغاز شکاف‌ها و انحرافات در پایان شکاف‌ها رخ می‌دهد. $\{X(t):t=0,1,\ldots\}$ ورودی‌های بسته را نشان می‌دهد، به‌طوری که $X(t)$ تعدادی از بسته‌های رسیده در شروع t-امین شکاف است. فرض کنید $N(t)$ تعدادی از بسته‌ها در سیستم است (که اندازه‌ی سیستم نامیده می‌شود)، بلافاصله قبل از ورود در شروع t-امین شکاف است. سپس $\{(N(t),X(t)):t=0,1,\ldots\}$ یک فرایند مارکف دوبعدی از نوع صف $M/G/1$ است. فضای حالت فرایند مارکف $E=\{0,1,\ldots\}^2$ است. تعداد فازها نامتناهی است و هم‌چنین محاسبه‌ی توزیع مانای $\{(N(t),X(t)):t=0,1,\ldots\}$ برای کار کردن آسان نیست. در عمل محاسبه‌ی توزیع مانای فرایند جدید در دوره‌های نشانیده $\{t_\tau,\tau=0,1,\ldots\}$ که $0<t_0<t_1,\ldots$ توسط روش تحلیل ماتریسی و با استفاده از فرایندهای احیاکننده‌ی نوپیدایشی نظریه‌ی مارکف به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$t_\tau=\begin{cases}0 & \tau=0\\ \inf\{t>t_{\tau-1}:Z(t)=1\ or\ 0\le X(t)\le s-1\} & \tau=1,2,\ldots\end{cases}$$

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087]

که به معادله‌ی زمان توقف معروف است. قرار دهید $N_\tau = N\left(t_\tau\right)$، $\tau = ۰,۱,...$ و

$$J_۰ = s,$$

$$J_\tau = \begin{cases} X\left(t_\tau\right) & Z\left(t_\tau\right) = ۰, \quad \tau = ۱,۲,... \\ s & Z\left(t_\tau\right) = ۱, \quad \tau = ۱,۲,... \end{cases}$$

ورودی‌های بسته در نقطه‌ی t_τ و بعد از آن مستقل از اطلاعات پیشین t_τ به شرط J_τ هستند. از این‌رو مشاهده می‌شود که $\left\{\left(N_\tau, J_\tau\right): \tau = ۰,۱,...\right\}$ فرایند تجدید مارکف با فضای احتمال $E = \left\{۰,۱,...\right\} \times \left\{۰,۱,...,s\right\}$ است. ماتریس احتمال انتقال فرایند تجدید مارکف به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

۱) برای $n = ۰,۱,...$ و $i = ۰,۱,...,s-۱$:

$$\left(n,i\right) \to \begin{cases} \left(\max\left\{n-s+i,۰\right\},i\right) & w.p. \ \beta \\ \left(\max\left\{n-s+i,۰\right\},s\right) & w.p. \ ۱-\beta \end{cases}$$

۲) برای $n = ۰,۱,...$:

$$\left(n,s\right) \to \begin{cases} \left(\max\left\{n-s+i,۰\right\},i\right) & w.p. \ b_i\beta, ۰ \le i \le s-۱ \\ \left(n-s+i,s\right) & w.p. \ b_i\left(۱-\beta\right), s-n+۱ \le i \le s-۱ \\ \left(۰,s\right) & w.p. \ \sum_{i=۰}^{\min\left\{s-n,s-۱\right\}} b_i\left(۱-\beta\right) + g_۰\delta_{n۰} \\ \left(n+l,s\right) & w.p. \ g_l, l \ge ۰, n+l > ۰ \end{cases}$$

که

$$\delta_{n۰} = \begin{cases} ۱ & n = ۰ \\ ۰ & n \ge ۱ \end{cases}$$

$$g_۰ = b_s, \ g_l = \sum_i b_{i+s}\left(۱-\beta\right)\beta^{i-۱}, l = ۱,۲,....$$

ماتریس احتمال انتقال P به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P = \begin{pmatrix} B_s & A_{s+۱} & A_{s+۲} & \cdots & A_{۲s-۱} & A_{۲s} & A_{۲s+۱} & \cdots \\ B_{s-۱} & A_s & A_{s+۱} & \cdots & A_{۲s-۲} & A_{۲s-۱} & A_{۲s} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ B_۱ & A_۲ & A_۳ & \cdots & A_s & A_{s+۱} & A_{s+۲} & \cdots \\ A_۰ & A_۱ & A_۲ & \cdots & A_{s-۱} & A_s & A_{s+۱} & \cdots \\ ۰ & A_۰ & A_۱ & \cdots & A_{s-۲} & A_{s-۱} & A_s & \cdots \\ ۰ & ۰ & A_۰ & \cdots & A_{s-۳} & A_{s-۲} & A_{s-۱} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots \end{pmatrix}$$

که عناصر ماتریس نیز به‌صورت زیر هستند:

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087]

$$A_i = \begin{array}{c} \\ 0 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & \cdots & i & \cdots & s \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta & \cdots & 1-\beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_i\beta & \cdots & b_i(1-\beta) \end{pmatrix} \end{array}, \qquad 0 \le i \le s-1$$

$$A_i = \begin{array}{c} \\ 0 \\ \vdots \\ s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & \cdots & s \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & g_{i-s} \end{pmatrix} \end{array}, \qquad i \ge s$$

$$B_i = \sum_{j=0}^{i} A_j, \qquad 1 \le i \le s.$$

برای یافتن توزیع مانا، وجود شرط پایداری، یعنی $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$ لازم است. در این‌جا نرخ خدمات ثابت است، لذا باید ظرفیت ارائه‌شده s باشد یعنی، $\frac{\lambda}{s} < 1$. در صف $\lambda = E\left(X\left(t\right)\right) = \sum_{x=1}^{\infty} x b_x = \frac{np_1}{1-np_2} < s$ با QNBD-II، شرط پایداری باید برقرار باشد و پارامترهای توزیع $DAR(1)/D/s$ برای یک $\left(n, p_1, p_2\right)$ داده شده (تعداد باجه‌ها)، برای رسیدن به میانگین ثابت محاسبه شود.

٦ توزیع مانای فرایند تجدید مارکف

فرض کنید $\pi_{ni} = \lim_{\tau\to\infty} P\left(N_\tau = n, \mathrm{J}_\tau = i\right)$، $n \ge 0$ و $0 \le i \le s$ احتمال‌های حدی فرایند تجدید مارکف $\left\{\left(N_\tau, J_\tau\right) : \tau = 0,1,,...\right\}$ است. در این صورت، توزیع مانای فرایند تجدید مارکف را می‌توان به روش تحلیل ماتریسی محاسبه نمود. ماتریس احتمال انتقال از مرتبه‌ی بی‌نهایت است، به‌گونه‌ای که قبل از اجرای روش تحلیل ماتریسی باید بریده شود. در این‌جا فرض کنید که ماتریس از مرتبه‌ی متناهی است و یک شاخص N، به‌طوری که به ازای هر $n > N$، $A_n = 0$ وجود داشته و زنجیر مارکف در زمان‌های بیشتر از N مرحله جهش نداشته باشد.

مثال ۱. برای درک بهتر موضوع، یک مثال عددی در حالتی که $N = 14$ و $s = 5$ بررسی می‌شود. در این حالت، ماتریس احتمال انتقال P به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P = \begin{pmatrix} \hat{B}_0 & \hat{A}_2 & \hat{A}_3 \\ \hat{A}_0 & \hat{A}_1 & \hat{A}_2 \\ 0 & \hat{A}_0 & \hat{A}_1 \\ 0 & 0 & \hat{A}_0 \end{pmatrix}$$

که در آن:

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087]

$$\hat{B}_{\cdot}=\begin{bmatrix} B_{5} & A_{6} & A_{7} & A_{8} & A_{9} \\ B_{4} & A_{5} & A_{6} & A_{7} & A_{8} \\ B_{3} & A_{4} & A_{5} & A_{6} & A_{7} \\ B_{2} & A_{3} & A_{4} & A_{5} & A_{6} \\ B_{1} & A_{2} & A_{3} & A_{4} & A_{5} \end{bmatrix},\hat{A}_{2}=\begin{bmatrix} A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{9} & A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{8} & A_{9} & A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{7} & A_{8} & A_{9} & A_{10} & A_{11} \\ A_{6} & A_{7} & A_{8} & A_{9} & A_{10} \end{bmatrix},\hat{A}_{3}=\begin{bmatrix} A_{15} & A_{16} & A_{17} & A_{18} & A_{19} \\ A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} & A_{18} \\ A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} \\ A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}_{\cdot}=\begin{bmatrix} A_{\cdot} & A_{1} & A_{2} & A_{3} & A_{4} \\ 0 & A_{\cdot} & A_{1} & A_{2} & A_{3} \\ 0 & 0 & A_{\cdot} & A_{1} & A_{2} \\ 0 & 0 & 0 & A_{\cdot} & A_{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{\cdot} \end{bmatrix},\hat{A}_{1}=\begin{bmatrix} A_{5} & A_{6} & A_{7} & A_{8} & A_{9} \\ A_{4} & A_{5} & A_{6} & A_{7} & A_{8} \\ A_{3} & A_{4} & A_{5} & A_{6} & A_{7} \\ A_{2} & A_{3} & A_{4} & A_{5} & A_{6} \\ A_{1} & A_{2} & A_{3} & A_{4} & A_{5} \end{bmatrix}.$$

در حالت کلی می‌توان ماتریس احتمال انتقال P را به‌صورت زیر نشان داد:

$$P=\begin{pmatrix} \hat{B}_{\cdot} & \hat{A}_{2} & \hat{A}_{3} & \cdots & \hat{A}_{n^{*}} \\ \hat{A}_{\cdot} & \hat{A}_{1} & \hat{A}_{2} & \cdots & \hat{A}_{n^{*}-1} \\ 0 & \hat{A}_{\cdot} & \hat{A}_{1} & \cdots & \hat{A}_{n^{*}-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \hat{A}_{\cdot} \end{pmatrix}$$

که $n^{*}=\frac{N+s+1}{s}-1$. یک ماتریس P از ساختار بالا از نوع $M/G/1$ است که مشابه با زنجیر مارکف نشانیده در صف $M/G/1$ هست و همان‌گونه که در بخش ۳ اشاره شد، در ماتریس احتمال انتقال به جز سطر اول، هر سطر نسبت به سطر قبلی یکی به جلو انتقال می‌یابد و اعضای قبل از انتقال صفر می‌شوند، بنابراین زنجیر مارکف X_{k} را از سمت چپ رهاشده نامند. عناصر P می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\hat{B}_{\cdot}=\begin{pmatrix} B_{s} & A_{s+1} & \cdots & A_{2s-1} \\ B_{s-1} & A_{s} & \cdots & A_{2s-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{1} & A_{2} & \cdots & A_{s} \end{pmatrix}.$$

توزیع مانای فرایند تجدید مارکف توسط روش‌های تحلیل ماتریسی ذکر شده در بخش ۳ محاسبه می‌شود.

مرحله‌ی اول) حل نامنفی مینیمم G از معادله‌ی ماتریس $G=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{A}_{n}G^{n}$ که G می‌تواند توسط تکرار زیر تعریف شود:

$$G_{\cdot}=0$$
$$G_{1}=\hat{A}_{\cdot}$$
$$G_{K}=\sum_{n=1}^{K-1}\hat{A}_{n}G_{k-1}^{n},k=2,3,\ldots$$
$$G=\sum_{k=1}^{\infty}G_{k}.$$

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087]

G یک ماتریس تصادفی است و تکرار آن تا وقتی‌که $\|۱-G.۱\|<\varepsilon$ به $\varepsilon=۰.۰۰۰۱$ برسد متوقف می‌شود. با توجه به این تکرارها، حد بالایی k و $n^*=k-۱$ (که n^* شاخص بریده‌ی N در G تصادفی شده است) را می‌توان محاسبه کرد.

مرحله‌ی دوم) $H=\sum_{n=۰}^{n^*}\hat{B}_n G^n$ و یک بردار سطری مثبت H را که در شرط $hH=h$ صدق می‌کند پیدا کنید.

مرحله‌ی سوم) با

$$x_۰=h,$$

$$x_n=\left(x_۰\sum_{i=۰}^{n^*}\hat{B}_{n+i}G^i+\sum_{l=۱}^{n-۱}x_l\sum_{i=۰}^{n^*}\hat{A}_{n-l+i+۱}G^i\right)\times\left(I-\sum_{i=۰}^{n^*}\hat{A}_{i+۱}G^i\right)^{-۱},n=۱,...,\mathrm{n}^*$$

شروع کنید.

مرحله‌ی چهارم) در پایان داریم

$$\left(\left(\pi_{ns,۰},...,\pi_{ns,\mathrm{s}}\right),...,\left(\pi_{(n+۱)s-۱,۰},...\pi_{(n+۱)s-۱,s}\right)\right)=Cx_n,\ n=۱,...,\mathrm{n}^*$$

که $C=\left[\sum_{n=۰}^{n^*}x_n\mathbf{e}\right]^{-۱}$ و $\mathbf{e}$ بردار ستونی $s(s+۱)$ بعدی با مولفه‌های ۱ هستند.

در انتهای این بخش، توزیع مانای $\{N(t),\mathrm{X}(t),t=۰,۱,...\}$ محاسبه می‌شود. اگر دنباله‌ی تجدید مارکف در صف به‌صورت $\{((N_\tau,J_\tau),\mathrm{t}_\tau),\tau=۰,۱,...\}$ و

$$\frac{\left(\left(N(t+t_\tau),X(t+t_\tau)\right):t=۰,۱,...\right)}{\left(\left((N(\upsilon),X(\upsilon)\right),۰\le\upsilon<t_\tau,N_\tau,J_\tau\right)=(n,i)\right)}$$

به‌طور تصادفی هم‌ارز با

$$\frac{\left(N(t),\mathrm{X}(t),t=۰,۱,...\right)}{\left(N_۰,J_۰=(n,i)\right)}$$

باشد، $\{N(t),\mathrm{X}(t),t=۰,۱,...\}$ یک فرایند احیا کننده‌ی مارکف زمان گسسته با دنباله‌ی تجدید مارکف $\{((N_\tau,J_\tau),\mathrm{t}_\tau),\tau=۰,۱,...\}$ است. احتمال‌های حدی $p_{nj}=\lim_{t\to\infty}P\{(N(t),\mathrm{X}(t))=(n,i)\}$، $n,j=۰,۱,...$ از $\{N(t),\mathrm{X}(t),t=۰,۱,...\}$ توسط قضیه‌ی ۱، به‌صورت زیر حاصل شده است:

$$p_{nj}=\frac{\sum_{l=۰}^{\infty}\sum_{i=۰}^{s}\pi_{li}E\left[\sum_{t=t_\tau}^{t_{\tau+۱}-۱}۱_{(N(t),\mathrm{X}(t))=(n,j)}\middle|(N_\tau,J_\tau)=(l,i)\right]}{\sum_{l=۰}^{\infty}\sum_{i=۰}^{s}\pi_{li}E\left[t_{\tau+۱}-t_\tau\middle|(N_\tau,J_\tau)=(l,i)\right]}.\qquad(۵)$$

صورت کسر معادله‌ی (۵) به‌صورت زیر است:

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087]

$$\begin{cases} \pi_{nj}+\pi_{ns}b_j & ۰\le j\le s-۱ \\ \dfrac{\pi_{ns}b_s}{۱-\beta} & j=s \\ \sum_{i=۰}^{\left\lfloor \frac{n}{j-s}\right\rfloor}\pi_{n-i(j-s),s}b_j\beta^i & j\ge s+۱. \end{cases}$$

قرار دهید:

$$E\left[\sum_{t=t_\tau}^{t_{\tau+۱}-۱}{}_{\left(N(t),X(t)\right)=(n,j)}\,\middle|\,(N_\tau,J_\tau)=(l,i)\right]=\begin{cases} ۱ & i=j,۰\le i\le s-۱,n=۱ \\ b_j & i=s,۰\le j\le s-۱,n=۱ \\ \frac{b_s}{۱-\beta} & i=s,j=s,n=۱ \\ b_j\beta^{\frac{n-۱}{j-s}} & i=s,j>s,n\ge ۱,\frac{n-۱}{j-s} \\ ۰ & o.w \end{cases}$$

پس:

$$E\left[t_{\tau+۱}-t_\tau\,\middle|\,(N_\tau,J_\tau)=(l,i)\right]=\begin{cases} ۱ & ۰\le i\le s-۱ \\ \sum_{r=۰}^{s-۱}b_r+\sum_{r=s}^{\infty}b_r\frac{۱}{۱-\beta} & i=s. \end{cases}$$

مخرج کسر معادله‌ی (۵) به‌صورت زیر است:

$$\sum_{l=۰}^{\infty}\sum_{i=۰}^{s-۱}\pi_{li}+\sum_{l=۰}^{\infty}\pi_{ls}\left(\sum_{r=۰}^{s-۱}b_r+\sum_{r=s}^{\infty}b_r\frac{۱}{۱-\beta}\right) \qquad (۶)$$

که $\left(\sum_{l=۰}^{\infty}\pi_{l۰},\ldots,\sum_{l=۰}^{n^*}\pi_{ls}\right)$ بردار احتمال مانای فرایند مارکف $\{J_\tau:\tau=۰,۱,\ldots\}$ است و ماتریس احتمال انتقال آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\left(P\left(J_{\tau+۱}=j\,\middle|\,J_\tau=i\right)\right)_{۰\le i,j\le s}=\begin{pmatrix} \beta & ۰ & \cdots & ۰ & ۱-\beta \\ ۰ & \beta & \cdots & ۰ & ۱-\beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & \beta & ۱-\beta \\ \beta b_۰ & \beta b_۱ & \cdots & \beta b_{s-۱} & ۱-\beta\sum_{r=۰}^{s-۱}b_r \end{pmatrix}$$

و ماتریس انتقال بی‌نهایت کوچک آن به‌صورت زیر است:

$$Q=\begin{pmatrix} -(۱-\beta) & ۰ & \cdots & ۰ & (۱-\beta) \\ ۰ & -(۱-\beta) & \cdots & ۰ & (۱-\beta) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & -(۱-\beta) & (۱-\beta) \\ \beta b_۰ & \beta b_۱ & \cdots & \beta b_{s-۱} & -\beta\sum_{r=۰}^{s-۱}b_r \end{pmatrix}$$

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087]

که معادلات تعادل آن $\pi Q = ۰$ و $\pi e = ۱$ هستند.

به‌وسیله‌ی حل معادلات تعادل، توزیع مانای فرایند مارکف $\{J_\tau : \tau = ۰,۱,...\}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sum_{l=۰}^{\infty} \pi_{li} = \begin{cases} \frac{\beta b_i}{۱-\beta \sum_{r=s}^{\infty} b_r} & ۰ \le j \le s-۱ \\ \frac{۱-\beta}{۱-\beta \sum_{r=s}^{\infty} b_r} & i = s. \end{cases}$$

بوسیله‌ی جایگزین کردن این معادله در (۶)، مخرج کسر سمت راست (۵) برابر $\mu = \left(۱-\beta \sum_{r=s}^{\infty} b_r\right)^{-۱}$ خواهد بود.

به‌عنوان مثال $\{N(t), X(t), t = ۰,۱,...\}$، $p_{nj} = \lim_{t\to\infty} P\{(N(t), X(t)) = (n,i)\}$ از $n, j = ۰,۱,...$، توسط معادله‌ی زیر یافت می‌شود:

$$p_{nj} = \begin{cases} \mu^{-۱}\left(\pi_{nj} + \pi_{ns} b_j\right) & ۰ \le j \le s-۱ \\ \mu^{-۱} \frac{\pi_{ns} b_s}{۱-\beta} & j = s \\ \mu^{-۱} \sum_{i=۰}^{\left|\frac{n}{j-s}\right|} \pi_{n-i(j-s),s} b_j \beta^i & j \ge s+۱ \end{cases}$$

۷ توزیع مانای زمان انتظار یک بسته

زمان انتظار بسته‌ی دلخواه در وضعیت پایا به‌صورت W تعریف می‌شود. پس برای $w = ۰,۱,...$، داریم $p(W = w) = \frac{A}{B}$ که در آن A میانگین تعداد ورودی‌ها در یک شکاف بر حسب وضعیت پایا، که زمان انتظار آن w است و B میانگین تعداد ورودی‌ها در یک شکاف که j بسته‌ی ورودی در شروع از t–امین شکاف و n بسته قبل از آن وجود دارد. بنابراین $N(t) = n$ و $X(t) = j$. از این‌رو، تعداد بسته‌هایی که دارای زمان انتظار w هستند، در میان آن‌هایی که در شروع از t–امین شکاف وارد می‌شوند به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} \min\{s(w+۱) - n, j\} & sw < n < s(w+۱) \\ \min\{n + j - sw, s\} & n \le sw \le n + j \\ ۰ & o w. \end{cases}$$

بنابراین

$$A = \sum_{n=۰}^{sw} \sum_{j=sw-n+۱}^{\infty} p_{nj} \min\{n = j - sw, s\} + \sum_{n=sw+۱}^{s(w+۱)-۱} \sum_{j=۱}^{\infty} p_{nj} \min\{s(w+۱) - n, j\}.$$

λ میانگین تعداد ورودی‌ها در یک شکاف است. بنابراین، توزیع مانای زمان انتظار W، از یک بسته‌ی دلخواه، توسط معادله‌ی زیر، برای $w = ۰,۱,...$ حاصل می‌شود:

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087]

$$P(W=w)=\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{n=0}^{sw}\sum_{j=sw-n+1}^{\infty}p_{nj}\min\{n=j-sw,s\}+\sum_{n=sw+1}^{s(w+1)-1}\sum_{j=1}^{\infty}p_{nj}\min\{s(w+1)-n,j\}\right)$$

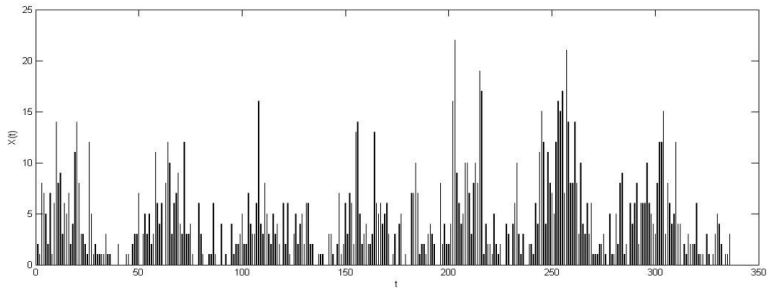
۸ تحلیل داده‌های واقعی

در این بخش یک مدل واقعی بر اساس داده‌های مربوط به تعداد مسافرانی که از ساعت ۸ صبح تا ۱۱:۳۰ شب وارد فرودگاه می‌شوند را در نظر بگیرید (جدول ۱). داده‌ها که در سایت www.westminstercollege.edu قابل مشاهده است، به مدت یک هفته جمع‌آوری شده و شامل تمام دوره‌های اشتغال و بی‌کاری است.

جدول ۱. داده‌های مربوط به تعداد مسافران که وارد فرودگاه می‌شوند

فراوانی	تعداد	فراوانی	تعداد
۸	۱۲	٤۳	۰
۲	۱۳	٤۹	۱
۵	۱٤	٤۷	۲
۳	۱۵	٤٤	۳
۳	۱٦	۲۹	٤
۲	۱۷	۲۲	۵
۰	۱۸	۳۰	٦
۱	۱۹	۱٤	۷
۰	۲۰	۱۵	۸
۱	۲۱	۵	۹
۱	۲۲	۸	۱۰
۳۳٦	جمع	٤	۱۱

داده‌های خروج مشتری را می‌توان به صورت مدل $DAR(1)$ در نظر گرفت که در آن $X(t)$ تعداد مشتریان منتظر خدمات است که در شکل ۲ نشان داده شده است.

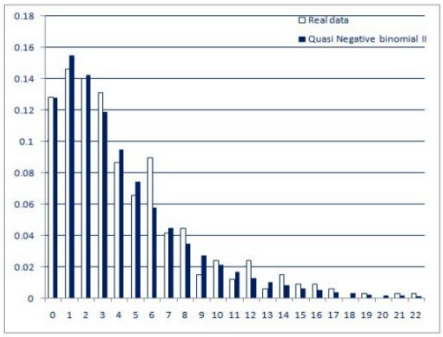


شکل ۲. داده‌های خروج مشتری با استفاده از توزیع $DAR(1)$

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087]

آزمون کولموگروف-اسمیرنوف، یک آزمون آماری ناپارامتری است که برای مقایسه دو توزیع احتمال و ارزیابی اینکه آیا یک نمونه از یک توزیع خاص آمده است استفاده شود. آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف، فرض H_0 که بیانگر این است که داده‌ها از مدل $DAR(1)$ با توزیع کناری QNBD-II، با پارامترهای $\hat{p}_1 = ۰/۰۲۱$ و $\hat{p}_2 = ۰/۰۰۵۱۳$ هستند را تایید می‌کند. آماره آزمون برابر ۰/۰۱۷۹ و مقدار بحرانی متناظر با سطح معنی‌داری ۰/۰۱ برابر با ۰.۰۸۸۹ است. این حقیقت نشان می‌دهد فرض تعداد ورودی‌ها از $DAR(1)$ با توزیع کناری QNBD-II پیروی می‌کند (شکل ۳) در سطح معنی‌داری ۰/۰۱ رد نمی‌شود. این حقیقت نشان می‌دهد، با توجه به نمونه موجود و در سطح معنی‌داری ۰/۰۱، دلیلی برای رد فرض H_0 مبنی بر این که داده‌ها از مدل $DAR(1)$ با توزیع کناری QNBD-II، با پارامترهای $\hat{p}_1 = ۰/۰۲۱$ و $\hat{p}_2 = ۰/۰۰۵۱۳$ هستند وجود ندارد. سطح معنی‌داری ۰/۰۱، نشان‌دهنده این حقیقت است که احتمال رد فرض H_0، با فرض اینکه درست باشد برابر با ۰/۰۱ است.



شکل ۳. هیستوگرام احتمال داده‌های مسافران فرودگاه با توزیع $DAR(1)$ و توزیع حاشیه‌ای QNBD-II و $\hat{p}_1 = ۰/۰۲۱$ و $\hat{p}_2 = ۰/۰۰۵۱۳$.

با استفاده از روش تحلیل ماتریسی، توزیع مانای اندازه سیستم و زمان انتظار یک مشتری دلخواه برای صف $DAR(1)/D/s$ با توزیع کناری QNBD-II محاسبه می‌شود. در اینجا میانگین ورود برابر $\lambda = ۴/۳۱۲۵$ است. برای برقراری شرط پایداری، تعداد سرویس‌دهنده‌ها را برابر با $s = ۵$ اختیار می‌کنیم. یعنی $\frac{\lambda}{s} = ۰/۸۶۲۵$. با توجه به این‌که ظرفیت ارایه‌شده $\frac{\lambda}{s} < ۱$، شرایط پایداری سیستم صف برقرار است، یعنی صف به حالت پایا می‌رسد. همچنین مقدار تابع خودهمبستگی برابر با $\beta = ۰/۱$ و $\hat{p}_1 = ۰/۰۲۱$ و $\hat{p}_2 = ۰/۰۰۵۱۳$. جدول ۲ و ۳، توزیع مانای زمان انتظار یک مشتری دلخواه و اندازه سیستم را نشان می‌دهد.

جدول ۲. محاسبه $P(W = w)$ برای $\beta = ۰/۱$ و $\lambda = ۴/۳۱۲۵$ و $s = ۵$.

w	$P(W = w)$
۰	۰/۲۸۳۲
۱	۰/۱۱۹۵
۲	۰/۰۵۸۹
۳	۰/۰۳۸۰
⋮	⋮

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087]

جدول ۳. محاسبه p_{nj} برای $\beta = ۰/۱$ و $\lambda = ۴/۳۱۲۵$ و $s = ۵$.

	j										
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	⋯
0	0.1025	0.1239	0.1140	0.0945	0.0751	0.0585	0.0410	0.0319	0.0248	0.0193	⋯
1	0.0071	0.0094	0.0084	0.0088	0.0088	0.0045	0.0031	0.0024	0.0019	0.0015	⋯
2	0.0057	0.0069	0.0070	0.0066	0.0070	0.0036	0.0025	0.0019	0.0015	0.0012	⋯
3	0.0047	0.0058	0.0058	0.0058	0.0056	0.0030	0.0021	0.0016	0.0013	0.001	⋯
4	0.0047	0.0058	0.0058	0.0058	0.0056	0.0030	0.0021	0.0016	0.0013	0.001	⋯
5	0.0031	0.0037	0.0038	0.0038	0.0039	0.0020	0.0014	0.0319	0.0008	0.0006	⋯
6	0.0026	0.0031	0.0031	0.0032	0.0032	0.0016	0.0012	0.0009	0.0007	0.0005	⋯
7	0.002	0.0024	0.0025	0.0024	0.0025	0.0013	0.0009	0.0007	0.0005	0.0004	⋯
8	0.0016	0.0019	0.0019	0.0019	0.0019	0.001	0.0007	0.0006	0.0004	0.0003	⋯
9	0.0016	0.0019	0.0019	0.0019	0.0019	0.001	0.0007	0.0006	0.0004	0.0003	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

۹ نتیجه‌گیری

برای مدل‌سازی صف ATM با ترافیک همایش از راه دور کدگذاری شده‌ی VBR، استفاده از سیستم صف‌بندی چندسرویس‌دهی زمان گسسته با ورودی‌های اتورگرسیو توصیه می‌شود. مدل $DAR(۱)$ توسط پارامترهای کمتر توصیف می‌شود و می‌توان آن‌را به آسانی با توزیع احتمال و نرخ خرابی تابع خودهمبستگی، با مقدارهایی که توسط ترافیک واقعی اندازه‌گیری می‌شود منطبق کرد. این توزیع مانای سیستم صف‌بندی از اندازه‌ی سیستم و توزیع زمان انتظار بسته‌ی دلخواه، با کمک روش‌های تحلیل ماتریسی و قضیه‌ی احیاکننده‌ی نوپیدایشی مارکف حاصل می‌شوند. از تعریف تابع خودهمبستگی، پارامتر βی بزرگ‌تر، فروپاشی خودهمبستگی فرایند ورودی را با سرعت کمتری کاهش می‌دهد. در اندازه‌ی سیستم و زمان انتظار توزیع مانا، بررسی شده که پارامتر βی بزرگ به‌طور تصادفی بزرگ‌تر از حالتی هست که پارامتر β کوچک باشد. هم‌چنین اندازه‌ی سیستم و زمان انتظار مانا، زمانی که پارامتر ورودی توزیع حاشیه‌ای کاهش یابد، افزایش می‌یابند.

منابع

[1] Neuts, M.F. (1989). Structured stochastic matrices of the M/G/1 type and their applications, New York: Dekker.

[2] Möller, T. A., Weiß, C. H. (2020). Generalized discrete autoregressive moving-average models. Applied Stochastic Models in Business and Industry, 36(4), 641-659.

[3] Thornton, M. A., Chambers, M. J. (2013). Continuous-time autoregressive moving average processes in discrete time: representation and embeddability. Journal of Time Series Analysis, 34(5), 552-561.

[4] Cakiroglu, M. O., Kurban, H., Buxton, E., Dalkilic, M. (2025). A novel discrete time series representation with de bruijn graphs for enhanced forecasting using timesnet, IEEE Access.

[5] Conway, G. D. (2024). A short manual to discrete time series analysis Technical Report (Max Plank Institute for Plasma Physics). IPP2024–04.

[6] Kulyukin, V. A., Kulyukin, A. V., Meikle, W. G. (2025). Discrete Time Series Forecasting in Non-Invasive Monitoring of Managed Honey Bee Colonies: Part II: Are Hive Weight and In-Hive Temperature Seasonal and Colony-Specific?, Sensors (Basel, Switzerland), 25(14), 4319.

[7] McKenzie, E., (2003). Discrete variate time series. In D.N. Shanbhag and C.R. Rao (Eds), Handbook of Statistics 21, stochastic processes, modeling and simulation. (573-606), Amsterdam: North-Holland.

[8] Khodayifar, S, Raayatpanah, M. A., Fouladi, A. (2019). Optimal Coding Subgraph Selection under Survivability Constraint, Journal of Operational Research in its Applications 16(1), 11-28 (In Persian).

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087]

[9] Lakatos, L., Szeidl, L., Telek, M. (2013). Introduction to queueing systems with telecommunication applications, 388, Springer.
[10] Upadhyaya, S. (2016). Queueing systems with vacation: an overview. International journal of mathematics in operational research, 9(2), 167-213.
[11] Elwalid, A., Heyman, D., Laksman, T.V., Mitra, D., Weiss, A. (1995). Fundamental Bounds and Approximations for ATM Multiplexes with Applications to Video Teleconferencing. IEEE Journal of Selected Areas in Communications, 13(6), pp.1004-1016.
[12] Hwang, G.U., Choi, B.D., Kim, J.K. (2002). The waiting time analysis of a discrete time queue with arrivals as an autoregressive process of order 1. Journal of Applied Probability, 39(3), 619-629.
[13] Hwang, G.U., Sohraby, K. (2003). On the exact analysis of a discrete-time queueing system with autoregressive inputs. Queueing Systems, 43(1-2), pp.29-41.
[14] Kim, B., Chang, Y., Kim, Y. C., Choi, B. D. (2007). A queueing system with discrete autoregressive arrivals. Performance Evaluation, 64, 148-161.
[15] Fiems, D., Prabhu, B., De Turck, K. (2013). Analytic approximations of queues with lightly- and heavily-correlated autoregressive service times. Annals of Operations research, 202(1), 103-119.
[16] Abraham, B., Jose, K. K. (2013). Analysis of queueing system with discrete autoregressive arrivals having DML as marginal distribution. Statistica, 73(3), 317-339.
[17] Ross, S. M. (2023). Introduction to Probability Models. USA: Academic Press.
[18] Yazdani Khodashahri, M. B, Nasl Mosavi, S. H., Hosseini Shirvani, M. (2021). Optimal Stock Portfolio Selection Using Hybrid Meta-Heuristic Algorithms, Journal of Operational Research in its Applications, 18(1), 101-124 (In Persian).
[19] Kendall D. G. (1953). Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain. Annals of Mathematical Statistics, 24(3), 338-354.
[20] Latouche, G., Ramaswami, V., Sethuraman, J., Sigman, K., Squillante, M. S., Yao, D. (2012). Matrix-analytic methods in stochastic models, Springer Science & Business Media.
[21] Trivedi, B. S., Patel, M. N. (2019). Estimation of Parameters of Misclassified Size Biased Borel Tanner Distribution. Advances in Analytics and Applications, 243-260.
[22] Sen, K., Jain, R. (1996). Generalized Markov-Polya-urn-model with pre-determined strategies. Journal of Statistical Planning and Inference, 54, 119-133.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-3-2087]