

راهکاری برای مقایسه و ارزیابی واحدهای تصمیم گیرنده بر اساس شاخص های استاندارد و تحلیل پوششی داده ها

علیرضا فخارزاده جهرمی^۱، حسن رستم زاده^۲، زهره عباسی^۳

۱- استاد، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

۲- دانشجوی دکتری، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

۳- کارشناسی ارشد، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه پیام نور مرکز شیراز، شیراز، ایران

رسید مقاله: ۲۰ شهریور ۱۴۰۲

پذیرش مقاله: ۱۱ بهمن ۱۴۰۲

چکیده

در علم تحلیل پوششی داده ها، واحدهایی که روی مرز تولید قرار می گیرند، میزان کارایی آنها صدد در صد یا به عبارتی کارا خواهند بود. اما در این نوع ارزیابی شاخص های استاندارد برای ورودی ها و خروجی ها در نظر گرفته نمی شوند. از این رو در این مقاله روشی ارایه می شود که واحدهای تصمیم گیرنده بر اساس استانداردهای موجود درمقایسه ورودی و خروجی، بر مبنای مدلهایی از تحلیل پوششی داده ها، مقایسه و ارزیابی شوند. از آنجا که ممکن است با داده های منفی مواجه شویم، نشان داده می شود که چگونه با استفاده از مدلهای ویژه داده های منفی در تحلیل پوششی داده ها و انجام ابتکاراتی، امر ارزیابی به صورتی مطلوب قابل انجام است. مثال عددی و پیاده سازی برای موردی واقعی و میدانی در صنعت، کارایی روش ارایه شده را به نمایش می گذارد. همچنین مقایسه نتایج با دو روش مهم ویژه تعیین کارایی با حضور داده های منفی در تحلیل پوششی داده ها نشان می دهد که روش پیشنهادی به صورت موثر عمل می نماید.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، ارزیابی، داده های منفی، شاخص استاندارد، مدلهای SORM.

۱ مقدمه

مدلهای زیادی در تحلیل پوششی داده ها برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم گیرنده (DMU) توسط محققان تعریف شده است. اولین مدل توسط چارنر و همکاران [۱] به نام مدل CCR در دو ماهیت ورودی و خروجی محور معرفی شد. بعد از آن مدل BCC نیز در همان دو ماهیت توسط بنکر و همکاران [۲] ارایه شد. در این زمینه مدلهای دیگری همانند مدلهای جمعی، SBM و ترکیبی شعاعی و غیرشعاعی توسط محققان معرفی شدند [۳]. این مدلهای برخی به صورت شعاعی و غیرشعاعی و یا ترکیبی از هر دو، واحدها را مورد ارزیابی قرار می دهند. گرچه از نظر کارایی بعضی از این مدلهای نسبت به دیگر روش ها دقیق تر عمل می کنند، اما همه آنها با

* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: h.rostamzadeh@sutech.ac.ir

تبدیل به یک مساله از نوع برنامه ریزی خطی قابل حل خواهند بود و ورودی و خروجی های به کار رفته در این مدل ها همگی نامنفی خواهند بود.

اما در ارزیابی عملی واحدهای تصمیم گیرنده، واحدهایی که روی مرز تولید قرار دارند کارا خواهند بود و واحدهایی که از مرز تولید فاصله دارند، ناکارا می باشند و این ناکارایی با افزایش فاصله از مرز تولید بیشتر خواهد بود. برای آن که یک واحد ناکارا به واحدی کارا تبدیل شود، باید مقداری از ورودی را کاهش یا مقداری از خروجی های آن را افزایش داد (و گاهی هر دو مورد). اما گاهی در عمل برای واحدهایی که فاصله ی زیادی تا مرز کارا دارند، این کارها عملی نیست و اتفاق نخواهد افتاد. این در حالی است که همواره مدیران در هر سازمان همگی به دنبال آن هستند که واحدهای تحت نظارت را به گونه ای مدیریت و برنامه ریزی کنند که شاخص های واحدها تحت مدیریت خود به حد استاندارد تعریف شده و یا مورد نظر برسانند. حتی می توان اذعان داشت که گاهی از نظر آنها واحدهایی که شاخص هایشان به حد استاندارد برسند کارا خواهند بود، هر چند که شاخص های برخی واحدها از حد استاندارد عبور کرده باشد. به طور مثال در آموزش و پرورش به طور عادی تلاش بر این است که مدارس به عنوان واحدهای تصمیم گیرنده، به حد استاندارد براساس ملاک های آموزش و پرورش، رسانده شوند؛ این استاندارد می توان معیارهایی از کشورهای پیشرفته و یا معیارهای جهانی تایید شده نظیر تعریفی از مدرسه استاندارد [۴] باشد؛ یا نظیر آنچه که در کشورمان رایج شده باشد (نظیر تعریف رایج شده در سند تحول بنیادین آموزش و پرورش کشور). البته دیگر موارد همچون استانداردهای ISO^۱ که در صنعت، تجارت، اقتصاد و غیره کاربرد فراوان دارد، نیز می تواند جز استانداردها تلقی گردند.

در این مقاله به دنبال ارزیابی و تشخیص نقاط ضعف واحدهایی هستیم که شاخص های ورودی و خروجی آنها با استاندارد مورد نظر متفاوت است تا با تصحیح برنامه ریزی تولید بتوان آنها را به حد استاندارد و کارا رساند. قابل ذکر است که به طور طبیعی در انجام این فرآیند ممکن است مقدار اختلاف شاخص ها با حد استاندارد گاهی مقداری منفی شود. پس در این نوع از ارزیابی، مواجه خواهیم بود با واحدهایی با مقداری (ویژگی هایی) جدید و منفی که عملاً با مدل های عمومی شناخته شده قابل ارزیابی نخواهند بود.

البته در تحلیل پوششی داده ها، برای رفع مشکل وجود داده های منفی شیوه ها و مدل هایی طراحی شده اند. از مهم ترین روش های رایج شده برای به کارگیری داده های منفی، می توان به روش پیشنهادی سیفورد و ژو [۵] اشاره کرد؛ در این روش ابتدا ورودی های نامطلوب در منفی ضرب می شوند و سپس یک بردار تبدیل محاسبه می شود که جمع آن با داده های منفی، یک بردار مثبت از داده ها را ایجاد می نماید. اما از این روش فقط در حالت بازده به مقیاس ثابت می توان استفاده کرد. روش دیگری نیز توسط پورتلا و همکاران [۶] با عنوان RDM^۲ رایج شده است؛ در این روش برای مجموعه واحدهای تصمیم گیرنده، یک نقطه ی ایده آل تعریف می شود که معمولاً این نقطه به مجموعه امکان تولید تعلق ندارد. آنگاه برای هر واحد ناکارا، ارزیابی کارایی بر حسب موقعیت نسبی آن در قیاس با نقطه ی ایده آل تعیین می شود. مدل دیگری نیز توسط شارپ و همکاران [۷] با عنوان MSBM^۳ برای

1 International Organization for Standardization
2 Range Directional Measure
3 Modified Slack Based Measure

به کارگیری داده‌های منفی، ارایه شده است. شارپ با قرار دادن جهت‌های بهبود معرفی شده در مدل RDM به جای مقادیر مشاهدات، یک تابع تعدیلی را معرفی می‌نماید به‌طوری که مدل ارایه شده برای داده‌های منفی مناسب باشد. مدل MEA^۱ نیز توسط آسمیلد و پاستور [۸] معرفی شده است. آنها نقطه‌ای ایده‌آل مدل MEA را با استفاده از تابع فاصله‌ای جهت‌دار و با در نظر گرفتن مولفه‌های ورودی و خروجی و از طریق حل یک مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی به دست آوردند. محمدی نسب و کاظمی متین [۹] نشان دادند که مدل MEA در زمینه داده‌های منفی دارای خواص مطلوبی است و تحت بازده به مقیاس‌های مختلف قابل استفاده است. خوینی و همکاران [۱۰] در خصوص شناخت تراکم و مشخص کردن کمترین و پرتراکم ترین واحدهای تصمیم‌گیری مقاله‌ای ارایه داده‌اند؛ آنها یک مدل برای تعیین DMU های کاندید با مقادیر ورودی و خروجی منفی برای داشتن ازدحام و روشی برای تشخیص وضعیت ازدحام این DMU ها ارایه داده‌اند. لین و چن [۱۱] یک مدل تحلیل پوششی داده‌های شعاعی برای یافتن ابرکارایی واحدها با متغیرهای ورودی و خروجی منفی و نامنفی معرفی کردند؛ در مقایسه با مدل‌های موجود که قادر به مقابله با داده‌های منفی هستند، مدل پیشنهادی آنها می‌تواند DMU های کارآمد با داده‌های منفی و غیرمنفی را رتبه‌بندی کند و هر DMU ناکارار را در یک جهت مناسب بر روی مرز با ابرکارایی قرار دهد. سلطانی فر و شریفی [۱۲] برای رتبه‌بندی واحدها با داده‌های منفی روش کارایی متقاطع را ارایه داده‌اند؛ آنها ابتدا یک مدل غیرشعاعی جدید برای ارزیابی عملکرد DMU ها در حضور داده‌های منفی پیشنهاد داده‌اند؛ سپس بر اساس این مدل یک مدل ثانویه جدید را برای رفع اولین اشکال در روش کارایی متقاطع زمانی که جواب بهینه چندگانه می‌باشد، ارایه داده‌اند. همچنین، برای حل اشکال دوم، این که دلیل قانع‌کننده‌ای برای استفاده از میانگین حسابی برای جمع‌آوری نتایج ماتریس کارایی متقاطع وجود ندارد، یک روش ترکیبی به کمک روش فازی پیشنهاد داده‌اند. بانسال و مهرا [۱۳] در خصوص تحلیل پوششی داده‌های صحیح منفی بازه‌ای مقاله‌ای ارایه داده‌اند؛ آنها روشی برای محاسبه کارایی واحدها با شاخص‌های صحیح منفی و بازه‌ای ارایه داده‌اند و روش پیشنهادی را بر روی مجموعه داده‌های واقعی مربوط به سال ۲۰۱۴ تا ۲۰۱۸ خطوط هوایی فعال در هند را پیاده‌سازی کردند. کاظمی متین و صالحی [۱۴] مدل اصلاح‌شده کراندار BAM^۲ برای داده‌های منفی به کار گرفتند و ارتباط ساختاری آن را با مدل‌های دیگر این زمینه نظیر RDM و MSBM نشان دادند.

در این میان از روش‌های ارایه‌شده‌ی اخیر، می‌توان به مدل مهم SORM^۳ که توسط امروز نژاد و همکاران [۱۵] ارایه شده است، اشاره کرد. اما ضعف‌هایی در این مدل مشاهده شد که برای برخی از مسایل کارایی لازم را نداشت؛ این امر سبب شد که مدل SORM اصلاح‌شده توسط رضا کاظمی متین و همکاران [۱۶] ارایه شود. در اینجا ما با استفاده از مدلی که برگرفته از مدل راسل [۱۷] می‌باشد، واحدهایی با شاخص‌های جدید منفی حاصل از مقایسه با معیار استاندارد مورد نظر را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم. روش معرفی شده، مقدار کارایی دقیق‌تری نسبت به مدل‌های ارایه‌شده برای شاخص‌های منفی را ارایه می‌دهد؛ همچنین مقادیر دقیق‌تری از اضافه یا کمبود

1 Multi-directional in Efficiency Analysis

2 Bounded Adjusted Measure

3 Semi-Oriented Radial Measure

شاخص‌های واحدهای ناکارا به دست می‌آید و برای هر دو دسته از مدل‌های بازده به مقیاس ثابت و متغیر قابل استفاده است. در بخش دوم این مقاله با بیان مفاهیم و تعاریف لازم، به معرفی مدل راسل و ویژگی‌های آن می‌پردازیم. بخش سوم اختصاص به روش ارزیابی واحدها با شاخص‌های استاندارد دارد. در بخش چهارم به بیان یک مثال واقعی می‌پردازیم که هدف آن تعیین کارایی و ارایه نحوه بهبود واحدهای ناکارا بر حسب معیار استاندارد مورد نظر مدیر است. در این راستا با ارایه مثال مقایسه نیز صورت خواهد گرفت. بخش آخر نیز به ارایه نتایج حاصل اختصاص یافته است.

۲ مدل راسل و نقش آن در کاراسازی واحدهای تصمیم گیرنده

راسل [۱۷] مدلی برای ارزیابی واحد تصمیم گیرنده $DMU_0 = (X_0, Y_0)$ در بین n واحد تصمیم گیرنده یک سازمان با m ورودی و s خروجی نامنفی به صورت زیر ارایه نمود:

$$p = \text{Min} \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \varphi_r}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i x_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \varphi_r y_{r0}, \quad r = 1, 2, \dots, s,$$

$$0 \leq \theta_i \leq 1, \varphi_r \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad r = 1, 2, \dots, s,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$
(۱)

که در آن θ_i نسبت کاهش ورودی i ام و φ_r نسبت افزایش خروجی r ام واحد DMU_0 است تا به یک واحد کارا تبدیل شود. بنابراین اگر $\theta_i = 1$ برای $i = 1, 2, \dots, m$ و $\varphi_r = 1$ برای $r = 1, 2, \dots, s$ ، آنگاه $p^* = 1$ و واحد DMU_0 روی مرز کارا (تولید) قرار دارد؛ بنابراین یک واحد کارا خواهد بود. همچنین با توجه به قیود مساله (۱) واضح است که مساله (۱) نسبت به تغییر واحد پایدار است.

نکته ۱-۲ در بهینگی مدل (۱) دسته قیود اول و دوم فعال هستند [۱۷]. بنابراین اگر $(\theta_i^*, \varphi_r^*)$ برای $i = 1, 2, \dots, m$ و $r = 1, 2, \dots, s$ جواب بهینه مدل (۱) باشد، آنگاه $(\theta_i^* x_{i0}, \varphi_r^* y_{r0})$ برای $r = 1, 2, \dots, s$ و $i = 1, 2, \dots, m$ واحدی کارا خواهد بود.

با استفاده از روش چارنز و کوپر [۱۸] مساله (۱) به یک مساله خطی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
p &= \min \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i \\
\text{s.t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &\leq \theta_i x_{io}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &\geq \varphi_r y_{ro}, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \varphi_r &= 1, \\
\theta_i &\leq t, \quad \varphi_r \geq t, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
\lambda_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{۲}$$

پس برای $i = 1, 2, \dots, m$ و $r = 1, 2, \dots, s$ ، $j = 1, 2, \dots, n$ اگر $(\lambda_j^*, \theta_i^*, \varphi_r^*, t^*)$ جواب بهینه مساله (۲) باشد، آنگاه $\left(\frac{\lambda_j^*}{t^*}, \frac{\theta_i^*}{t^*}, \frac{\varphi_r^*}{t^*} \right)$ جواب بهینه مساله (۱) می باشد.

۳ ارزیابی واحدها بر حسب شاخص های استاندارد

همان طور که گفته شد در این مقاله به دنبال ارزیابی و تشخیص نقاط ضعف واحدهایی هستیم که شاخص های ورودی و خروجی آنها با استاندارد مورد نظر متفاوت است تا با تصحیح برنامه ریزی تولید بتوان آنها را به حد استاندارد و کارا رساند. در انجام این فرآیند ممکن است مقدار اختلاف شاخص ها با حد استاندارد گاهی مقداری منفی شود. پس در این نوع از ارزیابی، مواجه خواهیم بود با واحدهایی با مقادیری (ویژگی هایی) جدید و منفی که عملاً با مدل های عمومی شناخته شده قابل ارزیابی نخواهند بود.

برای $o \in \{1, 2, \dots, n\}$ در ارزیابی واحد DMU_o بر حسب شاخص های استاندارد، فرض می کنیم واحد تصمیم گیرنده DMU_k واحدی با شاخص های استاندارد باشد که از طریق مراجعی معرفی و یا تعیین شده است (این واحد استاندارد می تواند توسط تصمیم گیرنده و یا ملاک های استاندارد حتی به صورت مجازی در نظر گرفته شود)؛ ما در اینجا این واحد را واحد استاندارد می نامیم. در ادامه اختلاف شاخص های ورودی و خروجی واحدهای مورد ارزیابی $DMU_j = (X_j, Y_j)$ ، $j = 1, 2, \dots, n$ را از شاخص های واحد استاندارد $DMU_k = (X_k, Y_k)$ محاسبه می کنیم، بنابراین سازمانی جدید با واحدها تصمیم گیرنده مجازی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$(\overline{x_{ij}}, \overline{y_{rj}}) = (x_{ij} - x_{ik}, y_{rj} - y_{rk}), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad r = 1, 2, \dots, s;$$

توجه داریم که مقادیر $\overline{x_{ij}}$ و $\overline{y_{rj}}$ در علامت آزاد هستند. حال تمام واحدها را با شاخص های جدید $\overline{x_{ij}}$ و $\overline{y_{rj}}$ مورد ارزیابی قرار می دهیم. اگر همه ی داده های ورودی l ام $(\overline{x_{lj}})$ و خروجی g ام $(\overline{y_{gj}})$ در تمام

واحدها نامثبت باشند، با توجه به این که $\lambda_j \geq 0$ ، خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \overline{x_{ij}} \geq \overline{x_{io}}, \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \overline{y_{gj}} \leq \overline{y_{go}}.$$

این رابطه بدان معنی است که با افزایش ورودی نامثبت $\overline{x_{io}}$ و کاهش خروجی $\overline{y_{go}}$ ، می توان به مرز کارای $(\sum_{j=1}^n \lambda_j \overline{x_{ij}}, \sum_{j=1}^n \lambda_j \overline{y_{gj}})$ رسید. بنابراین می توان شاخص های ورودی منفی را با لحاظ کردن مقدار مثبت برای آنها به عنوان خروجی و به همین ترتیب شاخص های خروجی منفی را با در نظر گرفتن مقدار مثبت برای آنها به عنوان ورودی در نظر گرفت. زیرا با این شیوه واحد DMU_o با مشخصه های جدید روی مرز کار تصویر خواهد شد. به همین دلیل ورودی ها $\overline{x_{ij}}$ و خروجی ها $\overline{y_{rj}}$ را می توان به صورت زیر تعریف کرد که در این حالت دیگر با مقادیر منفی مواجه نخواهیم شد:

$$\begin{aligned} \overline{x_{ij}} &= \overline{x_{ij}^1} - \overline{x_{ij}^2}; \quad \overline{x_{ij}^1} = \begin{cases} \overline{x_{ij}}, & \overline{x_{ij}} \geq 0; \\ 0, & o.w \end{cases}, \quad \overline{x_{ij}^2} = \begin{cases} -\overline{x_{ij}}, & \overline{x_{ij}} < 0; \\ 0, & o.w \end{cases} \\ \overline{y_{rj}} &= \overline{y_{rj}^1} - \overline{y_{rj}^2}; \quad \overline{y_{rj}^1} = \begin{cases} \overline{y_{rj}}, & \overline{y_{rj}} \geq 0; \\ 0, & o.w \end{cases}, \quad \overline{y_{rj}^2} = \begin{cases} -\overline{y_{rj}}, & \overline{y_{rj}} < 0; \\ 0, & o.w \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

توجه داریم که رابطه های (۳) برای داده های اولیه مثبت (ورودی ها و خروجی ها) هم به کار برده می شود. بنابراین، اگر مقادیر ورودی و یا خروجی واحدها ترکیبی از مقادیر منفی و نامنفی باشند، می توان ابتدا آنها را به دو دسته متغیر ورودی و دو دسته متغیر خروجی با مقادیر مثبت و منفی جدا کرد، آنگاه با تبدیل دسته داده های منفی با

استفاده از روابط (۳) ورودی و خروجی واحد DMU_j به ترتیب برابر خواهند بود با مقادیر مثبت

$$Y_j = (\overline{y_j^1}, \overline{y_j^2}), \quad X_j = (\overline{x_j^1}, \overline{x_j^2}), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

حال مساله (۱) برای ارزیابی واحد DMU_o با استفاده از شاخص های جدید به صورت زیر تبدیل می شود.

$$p = \text{Min} \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \varphi_r} \quad (4)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \overline{x_{ij}} \leq \theta_i \overline{x_{io}}, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \overline{y_{rj}} \geq \varphi_r \overline{y_{ro}}, \quad r = 1, 2, \dots, s;$$

$$0 \leq \theta_i \leq 1, \varphi_r \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad r = 1, 2, \dots, s;$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

که در آن m و s به ترتیب تعداد ورودی X_j و تعداد خروجی Y_j می باشند. این مساله با استفاده از روش خطی سازی چارنز و کوپر [۱۸] تبدیل به مساله خطی (۲) شده و به راحتی قابل حل خواهد بود. چنانچه مقدار بهینه

مساله (۴) برابر یک باشد. واحد DMU_0 واحدی کارا خواهد بود. به عبارت دیگر عملکرد آن نسبت به بعضی واحدها به حد استاندارد نزدیکتر است؛ اما چنانچه مقدار بهینه آن کمتر از یک باشد، این نشان می‌دهد که واحد DMU_0 نسبت به واحدهای کارا از حد استاندارد دورتر است. اما مدل (۴) تصویری از آن تا مرز کارا و نزدیک به حد استاندارد را به ما می‌دهد که برابر با $\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \right)$ خواهد بود.

نکته ۱-۳ در ارزیابی واحد DMU_0 ، اگر x_{i0} و y_{r0} مقادیر منفی داشته باشند و همان‌طور که گفته شد با مقادیر نامنفی به ترتیب به عنوان خروجی و ورودی در مدل (۴) به کار گرفته می‌شوند؛ از آنجا که در (۴)، $\theta_i^* \leq 1$ و $\phi_r^* \geq 1$ لذا ورودی و خروجی منفی x_{i0} و y_{r0} ، به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابند.

نکته ۲-۳ چنانچه شاخص‌های DMU_0 از شاخص‌های واحد استاندارد بالاتر یا برابر باشد (ورودی‌های کمتر یا مساوی و خروجی‌های بیشتر یا مساوی نسبت به واحد استاندارد باشد)، آنگاه DMU_0 کارا است. زیرا در این حالت $X_0 = (\bar{X}_0^1, \bar{X}_0^2) = (0, 0)$ و $Y_0 = (\bar{Y}_0^1, \bar{X}_0^2)$ می‌باشد. بنابراین در مدل (۴)، با صرف‌نظر از X_0 ، دسته قیود اول حذف و صورت کسر تابع هدف یک خواهد شد که در این صورت جواب بهینه مدل برابر با $\lambda_0^* = 1$ و برای همه r ها $\phi_r^* = 1$ می‌شود، در نتیجه جواب بهینه برابر یک و DMU_0 کارا خواهد بود.

۴ مرور مدل‌های SORM برای داده‌های منفی

امروزنژاد و همکاران [۱۵] با بهره‌گیری از مدل BCC و تجزیه داده‌های منفی به صورت رابطه‌های (۳)، مدلی تحت عنوان مدل شعاعی نیمه جهت دار (SORM)^۱ برای خروجی‌هایی با داده‌های منفی را به صورت زیر ارائه دادند:

$$\begin{aligned} h &= \text{Max } h \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j &\leq x_0; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^1 &\geq h y_0^1; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2 &\leq h y_0^2; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1; \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن y_j^2 در اصل دارای مقدار منفی است که در (۵) با مقدار مثبت به عنوان خروجی در نظر گرفته شده است و در آن $h \geq 1$.

ایراد مهم مدل (۵) عدم افزایش مقدار خروجی منفی واحدهای ناکارا در بهینگی می‌باشد [۱۳]. به همین دلیل مدل

اصلاح شده SORM توسط رضا کاظمی متین و همکاران [۱۶] برای رفع این مشکل به صورت زیر بیان شد:

$$\begin{aligned} h &= \text{Max } h \\ \text{S.t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^1 &\leq x_o^1; & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^2 &\geq x_o^2; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^1 &\geq h y_o^1; & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2 &\leq \frac{1}{h} y_o^2; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1; \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن x_j^2 و y_j^2 به عنوان ورودی و خروجی‌های منفی که با فرض نامنفی بودن، به عنوان خروجی و ورودی در مدل (۶) در نظر گرفته شده است. البته این مدل برای واحدهای ناکارا که از مدل (۵) حاصل می‌شود، به کار برده می‌شود.

در مدل (۶) دسته قیود $\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2 \leq \frac{1}{h} y_o^2$ غیرخطی هستند. از لحاظ محاسبه کارایی این مدل به صورت شعاعی بر خروجی‌ها عمل می‌کند و همه خروجی‌ها را تا مرز کارا به یک شعاع افزایش می‌دهد. این در حالی است که مدل پیشنهادی (۴) به صورت غیرشعاعی همه ورودی‌ها و خروجی‌ها را تا رسیدن به مرز کارا کاهش و افزایش می‌دهد. قیود مدل (۶) در بهینگی ممکن است غیرفعال باشند؛ به این معنی که هنوز امکان کاهش ورودی و یا افزایش خروجی وجود دارد و این در حالی است که در مدل (۴) فعال بودن قیود در بهینگی باعث تشخیص دقیق‌تر مقدار مازاد ورودی و مقدار کاهش خروجی می‌گردد و از همه مهم‌تر در محاسبه کارایی مدل شعاعی (۶) از مدل پیشنهادی و غیرشعاعی (۴) ضعیف‌تر می‌باشد.

۵ پیاده‌سازی میدانی

هدف بررسی کارایی پنج واحد از قسمت PVC یک کارخانه صنعتی واقع در شهرک صنعتی شیراز در سال ۱۳۹۵ مطابق نیاز مدیریت کارخانه است. در قسمت PVC این کارخانه، چهار نوع مختلف از نوارهای PVC با جنس‌های متفاوت و اندازه‌های مختلف بر حسب سفارش‌ها تهیه می‌شوند؛ این چهار نوع نوار PVC عبارتند از نوارهای مات با اندازه‌های 2×20 و 2×36 و همچنین نوار براق با اندازه‌های 2×20 و 2×36 هستند. در این بررسی مقدار مترای اولیه خریداری شده از چهار نوع نوار PVC توسط کارخانه، به عنوان چهار ورودی در نظر گرفته شده است. همچنین مقدار مترای مصرف شده از هر چهار نوع نوار PVC (تولیدات مختلف کارخانه) که در PVC کردن ورق‌های MDF به کار برده می‌شود، به عنوان چهار خروجی در نظر گرفته شده است؛ این داده‌ها در جدول ۱ ارائه شده‌اند. قصد مدیریت محاسبه کارایی واحدهای PVC در سال ۱۳۹۵ در مقایسه با میانگین سال ۱۳۹۴ می‌باشد زیرا که در این سال از نظر تمام ابعاد (اقتصادی، تعداد نیروی کار و غیره) بهره بیشتری از واحدهای PVC نسبت به سال‌های قبل از آن نصیب شرکت شده است.

به این منظور میانگین سال ۱۳۹۴ را جهت برآورده شدن نظر مدیریت به عنوان شاخص‌های استاندارد در نظر می‌گیریم. آنگاه با در نظر گرفتن این شاخص‌های استاندارد تولید برای هر ورودی و خروجی، داده‌ها را با این شاخص‌ها مقایسه می‌کنیم به طوری که اگر داده‌های سال ۱۳۹۵ از استاندارد بالاتر باشد، آن داده‌ها با همان مقدار مثبت و اگر پایین‌تر باشد، با همان مقدار منفی فرض می‌شوند. در جدول ۲ شاخص‌های استاندارد (میانگین سال ۱۳۹۴) از بخش PVC برای این کارخانه نوشته شده است.

جدول ۱. داده‌های پنج واحد قسمت PVC کارخانه در سال ۱۳۹۵.

	نوار مات	نوار براق	نوار مات	نوار براق	نوار مات	نوار براق	نوار مات	نوار براق
	۲×۲۰	۲×۲۰	۲×۳۶	۲×۳۶	۲×۲۰	۲×۲۰	۲×۳۶	۲×۳۶
DMU	X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
۱	۵۴۰۰	۳۵۰۰	۲۲۰۰	۱۸۰۰	۵۵۰۰	۳۳۰۱	۲۳۹۲	۱۲۶۹
۲	۹۴۰۰	۴۷۰۰	۳۰۰۰	۱۹۰۰	۵۵۱۲	۳۳۰۷	۲۵۱۳	۱۲۶۶
۳	۵۹۰۰	۳۹۰۰	۲۷۰۰	۱۴۰۰	۵۴۷۷	۳۱۹۷	۲۵۳۷	۱۲۴۷
۴	۶۷۰۰	۴۲۰۰	۲۵۰۰	۱۰۰۰	۵۴۹۳	۳۳۰۶	۲۳۹۹	۱۲۸۹
۵	۸۶۰۰	۳۹۰۰	۳۱۰۰	۱۶۰۰	۵۳۷۲	۳۱۹۱	۲۴۶۲	۱۲۴۸

جدول ۲. شاخص‌های استاندارد (میانگین سال ۱۳۹۴) بخش PVC کارخانه.

	نوار مات	نوار براق	نوار مات	نوار براق	نوار مات	نوار براق	نوار مات	نوار براق
	۲×۲۰	۲×۲۰	۲×۳۶	۲×۳۶	۲×۲۰	۲×۲۰	۲×۳۶	۲×۳۶
DMU	X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
استاندارد	۶۰۰۰	۳۴۰۰	۲۵۰۰	۱۲۰۰	۵۴۲۰	۳۲۷۳	۲۴۹۱	۱۲۳۵

اکنون داده‌های جدول ۱ را با داده‌های جدول ۲ مقایسه کرده و مطابق آنچه در فوق شرح داده شد، میزان اختلاف را به صورت داده‌هایی مثبت یا منفی، مطابق با جدول ۳ به دست می‌آوریم (همه مقادیر ورودی‌ها بر عدد صد تقسیم شده است). از جدول ۳ کاملاً مشخص است که در این مقایسه داده‌هایی با مقادیر منفی وجود دارند. بنابراین با توجه به آنچه در بخش سوم بیان شد، ورودی‌ها و خروجی‌ها جدید را به تفکیک مقادیر مثبت نوشته و طبق جدول ۴ به عنوان شاخص‌های مثبت ارایه می‌شوند.

به جهت تعیین کارایی و میزان آن در شرکت، مدل (۴) برای تمام ۵ واحد اجرا گردید. بدین منظور ابتدا مساله مربوط به هر DMU به مساله خطی (۲) تبدیل و سپس جواب هر یک با استفاده از نرم افزار LINGO به دست آمد. نتایج حاصل از این فرایند در جدول ۵ ارایه شده است. از آنجاکه برای ارزیابی واحد DMU_0 در مساله متناظر (۲) استفاده از ورودی‌ها و خروجی‌های صفر این واحد تاثیری در بهینگی ندارد، بنابراین ورودی‌ها و خروجی‌های با مقادیر صفر در مساله لحاظ نمی‌شوند؛ به همین دلیل در جدول ۵ مقادیر θ_i و φ_r مربوطه با خط

تیره نمایش داده شده است.

جدول ۳. مقایسه شاخص های واحدهای کارخانه با شاخص های استاندارد.

DMU	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$	$\bar{X}_4$	$\bar{Y}_1$	$\bar{Y}_2$	$\bar{Y}_3$	$\bar{Y}_4$
۱	-۶	۱	-۳	۶	۸۰	۲۸	-۹۹	۳۴
۲	۳۴	۱۳	۵	۷	۹۲	۳۴	۲۲	۳۱
۳	-۱	۵	۲	۲	۵۷	-۷۶	۳۶	-۱۲
۴	۷	۸	۰	-۲	۷۳	۳۳	-۹۲	۵۴
۵	۲۶	۵	۶	۴	-۵۰	-۸۲	-۲۹	۱۳

جدول ۴. داده های تبدیل یافته نامنفی حاصل از مقایسه با شاخص های استاندارد.

DMU	$\bar{X}_1^{-1}$	$\bar{X}_1^{-2}$	$\bar{X}_2^{-1}$	$\bar{X}_2^{-2}$	$\bar{X}_3^{-1}$	$\bar{X}_3^{-2}$	$\bar{X}_4^{-1}$	$\bar{X}_4^{-2}$	$\bar{Y}_1^{-1}$	$\bar{Y}_1^{-2}$	$\bar{Y}_2^{-1}$	$\bar{Y}_2^{-2}$	$\bar{Y}_3^{-1}$	$\bar{Y}_3^{-2}$	$\bar{Y}_4^{-1}$	$\bar{Y}_4^{-2}$
۱	۰	۶	۱	۰	۳	۶	۰	۸۰	۰	۲۸	۰	۰	۹۹	۳۴	۰	۰
۲	۳۴	۰	۱۳	۵	۰	۷	۰	۹۲	۰	۳۴	۰	۲۲	۰	۳۱	۰	۰
۳	۰	۱	۵	۲	۰	۲	۰	۵۷	۰	۰	۷۶	۳۶	۰	۰	۱۲	۰
۴	۷	۰	۸	۰	۰	۰	۲	۷۳	۰	۳۳	۰	۰	۹۲	۵۴	۰	۰
۵	۲۶	۰	۵	۶	۰	۴	۰	۰	۵۰	۰	۸۲	۰	۲۹	۱۳	۰	۰

جدول ۵. نتایج حاصل از حل مساله با مدل پیشنهادی.

DMU	θ_1	ϕ_1	θ_2	θ_3	ϕ_2	θ_4	ϕ_3	ϕ_4	θ_5	ϕ_5	θ_6	ϕ_6	θ_7	ϕ_7	θ_8	کارایی
۱	-	۱	۱	-	۱	۱	-	۱	-	۱	-	-	۱	۱	-	۱
۲	۱	-	۱	۱	-	۱	-	۱	-	۱	-	۱	-	۱	-	۱
۳	-	۱	۱	۱	-	۰	-	۱	-	-	۱	۱	-	-	۱	۰/۸
۴	۱	-	۱	-	-	۱	۱	۱	-	۱	-	-	۱	۱	-	۱
۵	۰/۰۶۴۸	-	۰/۳۸۵۱	۰	-	۰/۱۲۰۳	-	-	۰	-	۰	-	۰/۷۶۳۷	۱	-	۰/۱۹۰۵

همان گونه که در جدول ۵ مشاهده می شود، واحدهای ۳ و ۵ در مقایسه با شاخص های استاندارد مورد نظر مدیریت طبق مدل پیشنهادی (۴) ناکارا هستند. همچنین فاصله ی بعضی از شاخص های آنها نسبت به واحدهای دیگر از شاخص های استاندارد بیشتر است. با توجه به نتایج به دست آمده در جدول ۵، از آنجا که مطابق نکته ۲-۱ بهبود یافته واحد (X_{io}, Y_{ro}) ، برابر با $(\theta_i^* X_{io}, \phi_r^* Y_{ro})$ است، شاخص های واحدها در جدول ۴ برای واحدهای ناکار ۳ و ۵ اصلاح و در جدول ۶ ارایه شده است. نتایج به دست آمده در جدول ۶ نیز اصلاح مقدار اختلاف بین شاخص های اولیه واحدها با شاخص های استاندارد بعد از بهبود می باشد. به طور مثال در واحد ناکار ۳ اختلاف ورودی $\bar{X}_4$ با شاخص ورودی نظیر آن در حالت استاندارد باید از ۲۰۰ به $۰ \times ۲۰۰ = ۰$ کاهش یابد؛ یعنی این ورودی برای واحد ۳ باید با ورودی چهارم شاخص استاندارد برابر باشد تا واحد ۳ به یک واحد کارا تبدیل شود.

جدول ۶. اصلاح اختلاف بین شاخص‌های واحدها پس از بهبود واحدهای ناکارا با شاخص‌های استاندارد.

DMU	$\overline{X}_1^1$	$\overline{X}_1^2$	$\overline{X}_2^1$	$\overline{X}_2^2$	$\overline{X}_3^1$	$\overline{X}_3^2$	$\overline{X}_4^1$	$\overline{X}_4^2$	$\overline{Y}_1^1$	$\overline{Y}_1^2$	$\overline{Y}_2^1$	$\overline{Y}_2^2$	$\overline{Y}_3^1$	$\overline{Y}_3^2$	$\overline{Y}_4^1$	$\overline{Y}_4^2$
۱	۰	۶	۱	۰	۳	۶	۰	۸۰	۰	۲۸	۰	۰	۹۹	۳۴	۰	۰
۲	۳۴	۰	۱۳	۵	۰	۷	۰	۹۲	۰	۳۴	۰	۲۲	۰	۳۱	۰	۰
۳	۰	۱	۵	۲	۰	۰	۰	۵۷	۰	۰	۷۶	۳۶	۰	۰	۱۲	۰
۴	۷	۰	۸	۰	۰	۰	۲	۷۳	۰	۳۳	۰	۰	۹۲	۵۴	۰	۰
۵	۱/۶۸۴۸	۰	۱/۹۲۵	۰	۰	۰/۴۸۱۲	۰	۰	۵۰	۰	۸۲	۰	۰/۲۲۱۴	۱۳	۰	۰

با مشخص شدن اختلاف‌های صحیح شاخص‌های اولیه واحدهای ناکارا ۳ و ۵ با شاخص‌های استاندارد، می‌توان شاخص‌های این واحدها را اصلاح کرد تا به واحدهای کارا تبدیل شوند؛ یعنی از ورودی‌ها و خروجی‌های اولیه واحدها ۳ و ۵ را به گونه‌ای تغییر می‌دهیم که اختلاف آنها با ورودی و خروجی‌های استاندارد مطابق با جدول ۶ باشد. در بقیه واحدها به دلیل کارا بودن اصلاحیه‌ای صورت نمی‌گیرد. این تغییرات در جدول ۷ قابل رویت می‌باشد.

جدول ۷. اصلاح ورودی و خروجی‌های واحدهای ۳ و ۵.

DMU	نوار براق	نوار مات	نوار براق	نوار مات	نوار براق	نوار مات	نوار براق	نوار مات
	2×36	2×20	2×36	2×20	2×36	2×20	2×36	2×20
$\overline{X}_1$	$\overline{X}_2$	$\overline{X}_3$	$\overline{X}_4$	$\overline{Y}_1$	$\overline{Y}_2$	$\overline{Y}_3$	$\overline{Y}_4$	
۱	۱۲۶۹	۲۳۹۲	۳۳۰۱	۵۵۰۰	۱۸۰۰	۲۲۰۰	۳۵۰۰	۵۴۰۰
۲	۱۲۶۶	۲۵۱۳	۳۳۰۷	۵۵۱۲	۱۹۰۰	۳۰۰۰	۴۷۰۰	۹۴۰۰
۳	۱۲۴۷	۲۵۳۷	۳۱۹۷	۵۴۷۷	۱۲۰۰	۲۷۰۰	۳۹۰۰	۵۹۰۰
۴	۱۲۸۹	۲۳۹۹	۳۳۰۶	۵۴۹۳	۱۰۰۰	۲۵۰۰	۴۲۰۰	۶۷۰۰
۵	۱۲۴۸	۲۴۸۴	۳۱۹۱	۵۳۷۲	۱۲۴۸	۲۵۰۰	۳۵۹۳	۶۱۶۸

برای انجام مقایسه عملکرد روش پیشنهادی، از دو مدل SORM و SORM اصلاح شده که در بخش قبل به صورت مختصر توضیح داده شدند، استفاده می‌کنیم. مثال را با استفاده از مدل SORM حل کنیم نتایج طبق جدول ۸ حاصل می‌شوند.

جدول ۸. نتایج به دست آمده با استفاده از مدل SORM.

DMU	$\overline{X}_1$	$\overline{X}_2$	$\overline{X}_3$	$\overline{X}_4$	$\overline{Y}_1$	$\overline{Y}_2$	$\overline{Y}_3$	$\overline{Y}_4$	کارایی
۱	-۶	۱	-۳	۶	۸۰	۲۸	-۹۹	۳۴	۱
۲	۳۴	۱۳	۵	۷	۹۲	۳۴	۲۲	۳۱	۱
۳	-۱	۵	۲	۲	۵۷	-۷۶	۳۶	-۱۲	۱
۴	۷	۸	۰	-۲	۷۳	۳۳	-۹۲	۵۴	۱
۵	۲۶	۵	۶	۴	۰/۲۸۶	۴۵/۴۳	-۱۰۱/۳	-۲۸۶/۵	۰/۲۸۶

همان‌گونه که در جدول ۸ مشاهده می‌شود، واحد ۵ ناکارا و مقادیر خروجی آن به جای این که افزایش پیدا

کنند، کاهش یافته‌اند؛ این یعنی که اختلاف خروجی‌های اولیه در این واحد با خروجی‌های استاندارد بیشتر شده است. پس مدل SORM جهت بررسی کارایی و سپس انجام بهبود واحد‌های ناکارا در این حالت مناسب نیست و به همین منظور مدل اصلاح شده SORM را برای تعیین کارایی واحدها اجرا نمودیم که بر آن اساس نتایج جدول ۸ به صورت جدول ۹ اصلاح می‌گردند.

جدول ۹. نتایج به دست آمده برای با استفاده از مدل اصلاح شده SORM.

DMU	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$	$\bar{X}_4$	$\bar{Y}_1$	$\bar{Y}_2$	$\bar{Y}_3$	$\bar{Y}_4$	کارایی
۱	-۶	۱	-۳	۶	۸۰	۲۸	-۹۹	۳۴	۱
۲	۳۴	۱۳	۵	۷	۹۲	۳۴	۲۲	۳۱	۱
۳	-۱	۵	۲	۲	۵۷	-۷۶	۳۶	-۱۲	۱
۴	۷	۸	۰	-۲	۷۳	۳۳	-۹۲	۵۴	۱
۵	۲۶	۵	۶	۴	-۵۰	-۸۲	-۲۹	۱۳	۱

با توجه به نتایج به دست آمده در جدول ۹، عملاً این نتایج تغییری نسبت به داده‌های جدول مقایسه ای ۳ ندارد، اما در ارزیابی انجام شده با استفاده از مدل اصلاح شده SORM واحد ۵ که در مدل SORM ناکارا بود، به یک واحد کارا تبدیل شده است؛ حال با این تفاسیر هر ۵ واحد کارا هستند. ولی همان گونه که مشاهده کردید در مدل پیشنهادی ارایه شده مقدار کارایی واحدها با دقت بیشتری محاسبه شد و همچنین نتایج به دست آمده در مقایسه با مدل های SORM و مدل اصلاح شده SORM واقع بینانه تر می باشد. همچنین دیگر نیاز به حل دو مدل نبوده و با حل یک مدل، میزان کاهش و یا افزایش شاخص ها مشخص می گردد.

۶ نتیجه گیری و پیشنهادها

در جوامع امروزی مدیران و صاحب نظران دوست دارند سازمان تحت مدیریت خود را بر اساس شاخص های استاندارد مورد نظر مقایسه کنند تا بتوانند بر اساس آن سازمان را حدممکن به شاخص های استاندارد نزدیک تر کنند. در این مقایسه بعضی از شاخص ها بالاتر از حد استاندارد و بعضی از آنها پایین تر از حد استاندارد است، در این خصوص ارزیابی عملکرد واحدها بر اساس اختلاف شاخص های آنها تا شاخص های واحد استاندارد صورت می گیرد. براساس این نیاز در این مقاله روشی را ارایه کردیم که این مقایسه را به نحوی انجام می دهد. در روش پیشنهادی از مدل راسل [۱۷] استفاده شد با این تفاوت که در مدل راسل باید شاخص ها (ورودی و خروجی ها) همه نامنفی باشند؛ ولی با توجه به این که ممکن است در مقایسه صورت گرفته با شاخص های استاندارد داده های منفی حاصل شوند، لذا اقدام به ارایه راهکاری جهت تبدیل داده های منفی به مثبت و سپس بر مبنای نتایج حاصل در نهایت با اعمال تغییری در مدل راسل، مساله ای حاصل گردید که از آن مقایسه و ارزیابی واحد مورد نظر صورت می گیرد. روش پیشنهادی بر یک مثال واقعی از متشکل از پنج واحد یک کارخانه واقع در شهرک بزرگ صنعتی شیراز پیاده سازی شد. در این مثال برای ارزیابی و مقایسه لازم با شاخص های استاندارد ممکن است با

داده‌های منفی روبه‌رو شویم، بر این اساس راهکاری جهت تبدیل آنها به داده‌های متناظر مثبت ارایه گردید. نتایج حاصل از این مثال در مقایسه با روش‌های SORM و SORM اصلاح شده نشان از صحت و توانایی روش ارایه شده دارد. روش معرفی شده، مقدار کارایی دقیق‌تری نسبت به مدل‌های ارایه شده برای شاخص‌های منفی را ارایه می‌دهد؛ همچنین مقادیر دقیق‌تری از اضافه یا کمبود شاخص‌های واحدهای ناکارا به دست می‌آید و برای هر دو دسته از مدل‌های بازده به مقیاس ثابت و متغیر قابل استفاده است. روش ارایه شده را می‌توان برای داده‌های فازی و همچنین برای واحدهای با ساختار شبکه ارایه داد.

منابع

- [1] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision-making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429-44.
- [2] Banker, R. D., Charnes, R. F., Cooper, W. W., (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30(9), 1078-92.
- [3] Cooper, W., Seiford, M., Tone, K., (2007). *Data envelopment analysis: A comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software*. Springer Science Business Media, LLC.
- [4] Maxwell, L. E., (2016). School building condition, social climate, student attendance and academic achievement: A mediation model. *Journal of Environmental Psychology*, 46, 206-216.
- [5] Seiford, L. M., Zhu, J., (2002). Modeling undesirable factors in efficiency evaluation. *European Journal of Operational Research*, 142, (1), 16-20.
- [6] Portela, S., Thanassoulis, E., Simpson, G., (2006). Negative data in DEA: A directional distance function approach to bank branches. *Journal of Operations Research Society*, 55, 1111-21.
- [7] Sharp, J. A., Meng, W., Liu, W., (2007). A modified slack -based measure model for data envelopment analysis with natural negative outputs and inputs. *Journal of Operations Research Society*, 58, 1672-77.
- [8] Asmild, M., Pastor, J. T., (2010). Slack free MEA and RDM with comprehensive efficiency measures, *OMEGA*, 475-83.
- [9] Mohamadinasab, S.S., Kazemimatin, R., (2016). MEA model in performance evaluation with negative data. *Journal of Operational Research in Its Applications*, 12(1), 113-125. In Persian.
- [10] Khoveyni, M., Eslami, R., Yang, G., (2017). Negative data in DEA: Recognizing congestion and specifying the least and the most congested decision-making units. *Computers & Operations Research* 79, 39-48.
- [11] Lin, R., Chen, Z., (2017). A directional distance based super-efficiency DEA model handling negative data. *Journal of the Operational Research Society*, 68, 1312-22.
- [12] Soltanifar, M., Sharafi, H., (2022). A modified DEA cross efficiency method with negative data and its application in supplier selection. *Journal of Combinatorial Optimization*, 43, 265-96.
- [13] Bansal, P., Mehra, A., (2022). Integrated dynamic interval data envelopment analysis in the presence of integer and negative data. 18(2), 1339-63.
- [14] Kazemimatin, R., Salehi, L., (2014). A modified bounded model related to negative data. *Journal of Operational Research in Its Applications*, 10(4), 127- 137. In Persian.
- [15] Emrouznejad, A., Amin, G.R., Thanassoulis, E., Anouze, A.L., (2010). On the boundness of the SORM DEA models with negative data. *European Journal of Operational Research*, 206, 265-68.
- [16] Matin, R.K., Amin, G.R., Emrouznejad, A., (2014). A modified semi oriented radial measure for target setting with negative data. *Measurement*, 54, 152-58.
- [17] Russell, R.R., (1985). Measures of technical efficiency. *Journal of Economic Theory*, 35, 109-26.
- [18] Charnes, A., and Cooper, W.W., (1962). Programming with linear fractional functionals. *Naval Research Logistics Quarterly*, 9, 181-86.