مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال بیست و یکم، شماره چهارم (پیاپی ۸۳)،زمستان ۰۳، ص ص ۱۱۵-۱۰۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

نرخ‌های حاشیه‌ای مختلط در حضور قیمت‌های ورودی/خروجی: یک رویکرد مبتنی بر DEA

سیمین مسروری[1*]
۱- استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

رسید مقاله: ۲۸ مرداد ۱۴۰۲
پذیرش مقاله: ۱۲ دی ۱۴۰۲

چکیده
از دیدگاه اقتصاددانان، تجزیه و تحلیل اثر تغییرات کوچک در ورودی‌ها یا خروجی‌ها و تاثیر آن بر روی ورودی‌ها یا خروجی‌های دیگر از اهمیت بالایی برخوردار است. این مساله در چارچوب تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) به عنوان نرخ حاشیه‌ای (MP) شناخته می‌شود و در تئوری و کاربردهای اقتصادی نقش مهمی دارد. در این مقاله، یک روش توسعه‌یافته DEA در تحلیل سودآوری را با ادغام نرخ حاشیه‌ای بیان می‌کنیم. برای مشاهده تاثیر تغییر جزیی یک ورودی یا خروجی بر ورودی‌ها یا خروجی‌ها دیگر یک متغیر دودویی معرفی می‌شود تا به این ترتیب یک روش توسعه‌یافته برای تعیین نرخ‌های حاشیه‌ای ارایه دهیم که می‌تواند تغییر در مناسب‌ترین ورودی یا خروجی را در یک مرحله مشخص کند. سپس با استفاده از مفهوم سودآوری درDEA ، نشان دادیم که چگونه یک واحد سودآور می‌تواند هم‌چنان سودآور باقی بماند. تجزیه و تحلیل رویکرد M.MR (نرخ حاشیه‌ای مختلط) برای بررسی تاثیر تغییر جزیی یک ورودی/خروجی بر ورودی‌ها/خروجی‌های دیگر برای یک واحد کارا با یک مثال عددی بیان شده است.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها ، کارایی، نرخ‌های حاشیه‌ای، کارایی سود، ورودی/خروجی.

۱ مقدمه
با توجه به اهمیت و تاثیر شرکت‌ها بر توسعه اقتصادی، یافتن راهکاری برای بهبود عملکرد آن حایز اهمیت است. یکی ازاهداف کلیدی در تئوری تولید، بهبود و توسعه واحدهای تصمیم‌گیری است، زیرا حفظ کارایی و بهبود عملکرد در افزایش سود برای تصمیم‌گیرندگان بسیار حیاتی است تا در محیط رقابتی امروزی موفق باشند. تکنیک‌های مختلفی برای ارزیابی و تجزیه و تحلیل عملکرد واحدها وجود دارد. تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) به عنوان یک ابزار موثر در تحلیل عملکرد و بهبود واحدهای تصمیم‌گیری در محیط رقابتی امروزی مورد استفاده قرار می‌گیرد. تحلیل پوششی داده‌ها اولین بار توسط چارنز و همکاران[۱] با در نظر گرفتن فرض بازده به مقیاس

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: s.masrouri@yahoo.com

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]
[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2224]

ثابت با مدل CCR معرفی شد. در مطالعات عملی و تئوری، تکنیک غیرپارامتری DEA، به طور گسترده‌ای در مطالعات مربوط به شرکت‌ها نیز به کار گرفته شده است. با استفاده از این روش می‌توان عملکرد شرکت‌هایی را که ورودی و خروجی‌های چندگانه دارند، ارزیابی کرده و با شرکت‌های دیگر مقایسه کرد تا به عوامل مؤثر بر بهبود عملکرد و افزایش سود دست یافت. مطالعات مختلف نشان داده‌اند که تحلیل پوششی داده‌ها قابلیت ارزیابی و مقایسه عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری را در حوزه‌های بسیاری از جمله، مالی، تولید، خدمات بهداشتی و درمانی، حمل و نقل، بانکداری و سایر صنایع دارد. این روش به تصمیم‌گیرندگان امکان می‌دهد تا از منابع خود استفاده بهینه کرده ، عملکرد خود را افزایش داده و رقبا را پشت سر بگذارند.

از سوی دیگر با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها، تصمیم‌گیرندگان می‌توانند بهبود عملکرد واحدهای خود را شناسایی کنند. پژوهشگران بسیاری این تکنیک را از هر دوجنبه تئوریی و عملی مورد مطالعه قرار دادند که در این راستا می توان از بنکر و همکاران[۳،۲]، سیفورد و ترال [۴]، چارنز و همکاران[۵]، سیفورد[۶]، بسنت و همکاران[۷]، کوپر و همکاران[۸]، امروزنژاد و همکاران[۹] نام برد.

در زمینه اقتصاد و مدیریت، تحلیل تاثیر تغییرات کوچک در ورودی‌ها و خروجی‌ها و نقش آن در تحقق تغییرات در سایر ورودی‌ها و خروجی‌ها، موضوعی اساسی و مهمی به شمار می‌رود. با توجه به پیچیدگی ذاتی بیشتر فرآیندهای تولید، اغلب غیرممکن است که یک ورودی یا خروجی را بدون نادیده گرفتن تاثیر آن برروی دیگر ورودی ها یا خروجی ها تغییر داد. این مساله در مفهوم نرخ حاشیه‌ای (MP) در چارچوب تحلیل پوششی داده‌ها شناخته می‌شوند و می‌تواند با استفاده از مشتقات جزیی به راحتی محاسبه شود. از آنجا که تجزیه و تحلیل این اثر و ارتباطات پنهان آن برای درک عمیق تغییرات در سیستم‌های اقتصادی و مدیریتی اهمیت زیادی دارد لذا، پژوهشگران راهکارهای مختلفی برای بهبود مدیریت این موضوع ارایه می دهند. در سال‌های اخیر، مقالات متعددی در راستای بهبود تحلیل تاثیرات نرخ حاشیه‌ای در DEA انجام شد. این مقالات به شیوه‌های مختلفی به تجزیه و تحلیل نقش مفهوم نرخ حاشیه‌ای پرداخته‌اند و رویکردهای متنوعی برای بررسی تاثیر تغییرات جزیی در ورودی‌ها و خروجی‌ها ارایه داده‌اند. از این جمله موارد می‌توان به رویکرد آسمیلد و همکاران[۱۰] اشاره کرد. این رویکرد نسخه اصلاح شده‌ای از روش روزن و همکاران [۱۱] است که در آن یک چارچوب کلی برای محاسبه و تجزیه و تحلیل نرخ‌های حاشیه‌ای در مرزهای DEA پیشنهاد شده است. مقاله مرتبط دیگر در این زمینه، مقاله‌ی اسمیت و همکاران [۱۲] است که به ارتباط تاثیرات غیرمستقیم و تجزیه‌ناپذیر تغییرات در DEA پرداخته‌اند. در ادامه کارهای انجام‌شده در این خصوص می‌توان به مقالات محققانی مانند ویلیامز و همکاران [۱۳]، اوئلت و همکاران [۱۴]، سویوشی و همکاران[۱۵،۱۶]، وانگ [۱۷]، گوناواردنا[۱۸]، بزرگی و همکاران [۱۹]، جلالت و همکاران [۲۰]، اشاره کرد. امیرتیموری و همکاران [۲۱]، رویکردی از نرخ حاشیه‌ای را بر اساس مدل تحلیل پوششی داده‌های تصادفی مبتنی بر برنامه‌ریزی با محدودیت شانس معرفی کردند که در آن معیاری از نرخ‌های حاشیه برای شرکت‌هایی که با عدم قطعیت داده‌ها مواجه هستند مورد بررسی قرار می‌گیرد. وو و همکاران[۲۲]، با بیان این که کاهش انتشار دی اکسید کربن اغلب رایگان نیست، برآورد هزینه کاهش نهایی

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2224]

انتشار دی اکسید کربن را مورد بررسی قرار دادند. در این مطالعه به بررسی چگونگی استفاده از گزینه‌های مختلف برای کاهش نهایی انتشار دی اکسید کربن و تخمین برآورد هزینه پرداخته می‌شود.

در مقاله پیش‌رو، با استفاده از ادغام نرخ حاشیه‌ای با تغییرات کوچک در ورودی‌ها و خروجی‌ها، به توسعه یک روش جدید در تحلیل نقش نرخ حاشیه‌ای در DEA می‌پردازیم و به طور دقیق تجزیه و تحلیل ارتباطات پنهان و تاثیرات غیرمستقیم را نشان می دهیم. در این راستا، یک متغیر دودویی معرفی می‌کنیم که ابزاری قدرتمند در تجزیه و تحلیل تاثیرات نقش نرخ حاشیه‌ای و تغییرات آن را در سیستم‌های اقتصادی و مدیریتی ارایه می‌دهد. در روند این مقاله، از رویکردهای تئوری و مطالعات پیشین از جمله تکنیک سودآوری در تحلیل پوششی داده‌ها برای بیان بهتر ترکیب رویکرد پیش رو با سایر تکنولوژی‌ها استفاده می‌شود تا مفاهیم اساسی و ارتباطات مربوط به نرخ حاشیه‌ای بهتر پرداخته شود. همچنین، با ارایه یک مثال، کاربرد عملی این روش را در تحلیل تاثیر تغییرات در یک واحد کارا نشان می‌دهیم.

۲ سودآوری و نرخ‌های حاشیه‌ای

در این بخش، یک مرور مختصر از روش‌های سودآوری و نرخ‌های حاشیه‌ای ارایه می‌شود. سپس، به ارتباط بین این دو موضوع مهم در چارچوب DEA می‌پردازیم.

۲-۱ سودآوری

در صنایع مختلف، سودآوری به عنوان یک مقیاس قابل اعتماد برای ارزیابی عملکرد فعالیت‌های تولیدی است. به همین دلیل در سطح بین‌المللی، به عنوان یک معیار قابل مقایسه و مفید برای ارزیابی عملکرد واحدها مورد استفاده قرار می‌گیرد. لذا محاسبه سودآوری، بینش‌هایی در وضعیت اقتصادی شرکت‌ها و امکان شناسایی روندهای مناسب در طول چرخه کسب و کار را فراهم می‌سازد.

برای بیان دقیق رویکرد ارایه‌شده ، ابتدا روش نرخ حاشیه‌ای ترکیبی معرفی می‌شود که تاثیر تغییری جزیی در یک ورودی (یا خروجی) را برروی دیگر ورودی‌ها (یا خروجی‌ها) را در یک مرحله نشان می‌دهد. سپس با استفاده از یک مثال سه‌بعدی و مدل سودآوری، حرکت واحدهای تصمیم‌گیری در طول مرز کارایی بیان می‌شود.

تکنولوژی $T = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{R}^{m+s} : x \ \ can\ produce\ y\}$ را در نظر بگیرید که در آن x یک بردار ورودی $(i = ۱,\ldots,m)$ و y یک بردار خروجی $(r = ۱,\ldots,s)$ است. فرض می کنیم که در مجموعه امکان تولید به صورت $T = \{(\overline{x}, \overline{y}) : \overline{x} \geq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_{ij}, \overline{y} \leq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_{rj}, \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j = ۱,\ \lambda_j \geq ۰\}$ است که در اصول دسترسی‌پذیری قوی، تحدب و بازده به مقیاس متغیر (VRS) صدق می‌کند. در فضای چند ورودی /چند خروجی، بردار مشاهده شده $(x,\ y)$ و بردار هدف $(x^*,\ y^*)$ هر دو روی مرز T قرار دارند و با استفاده از بردار

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2224]

قیمت $p=(p_1,\ldots,p_s)$ برای بردار خروجی $y=(y_1,\ldots,y_s)$ و بردار هزینه $c=(c_1,\ldots,c_m)$ برای بردار ورودی $x=(x_1,\ldots,x_m)$، اندازه کارایی تکنیکی در نقطه مشاهده‌شده و نقطه هدف با $(\frac{py}{cx})\Big/(\frac{py^*}{cx^*})$ بیان می شود. بدین ترتیب مساله برنامه نویسی کسری به صورت زیر است:

$$W=\frac{py^*}{cx^*}=Max\ \frac{p\bar{y}}{c\bar{x}}$$

$$s.t.$$

$$\bar{x}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}\ \le x_{io} \qquad i=1,\ldots,m \qquad (1)$$

$$\bar{y}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}\ge y_{ro} \qquad r=1,\ldots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1$$

$$\lambda_j\ge 0 \qquad j=1,\ldots,n$$

که در آن هدف بهینه‌سازی ترکیب تولید به منظور رسیدن به حداکثر سود در مجموعه امکان تولید T است. با به دست آوردن جواب بهینه(x^*, y^*) ، کارایی سود با نسبت زیر تعریف می‌شود:

$$E_p=\frac{p_o y_o \Big/ c_o x_o}{p_o y^* \Big/ c_o x^*}$$

که در آن x^*, y^* مقدار بهینه مساله (۱) و x_o, y_o بردار مشاهده‌شده واحد تحت ارزیابی DMU_o است.

از آنجا که $\frac{p_o y_o}{c_o x_o}\le\frac{p_o y^*}{c_o x^*}$ و $0<E_p\le 1$است، لذا DMU_o کارایی سود (profit efficient) دارد اگر و تنها اگر $E_p=1$.

با به‌کارگیری تبدیل چارنز-کوپر و ضرب تمام عبارات مساله (۱) در $t\in R$ و استفاده از تبدیل $\hat{x}=t\bar{x},\hat{y}=t\bar{y},\hat{\lambda}=t\lambda$ مدل (۱) به مساله برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل می‌شود:

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2224]

$$
\begin{aligned}
& W = Max\ p\hat{y} \\
& s.t. \\
& \hat{x} = \sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j x_{ij} \ \le t\mathrm{x}_{io} \qquad i = 1,\ldots,m \\
& \hat{y} = \sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j y_{rj} \ge t y_{ro} \qquad r = 1,\ldots,s \qquad (2) \\
& \sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j = t, \\
& \hat{\lambda}_j \ge 0 \qquad j = 1,\ldots,n
\end{aligned}
$$

اگر فرض کنیم $(t^*, \hat{x}^*, \hat{y}^*, \hat{\lambda}^*)$ یک جواب بهینه مساله (۲) باشد با توجه به این که $t > 0$ است، $x^* = \frac{\hat{x}}{t^*}, y^* = \frac{\hat{y}}{t^*}, \lambda^* = \frac{\hat{\lambda}}{t^*}$ جواب بهینه مساله (۱) است.

بدیهی است که اختلاف بین x^* و x_o، همچنین اختلاف بین y^* و y_o در واقع جهت‌های بهبود مدیریتی هستند که می‌توانند از طریق محدودیت‌های مساله (۱) تحلیل شوند.

۲-۲ نرخ‌های حاشیه‌ای

در حوزه اقتصاد خرد، به‌ویژه در نظریه تولید، نرخ‌های حاشیه‌ای یک موضوع بنیادی و گسترده است که جهت مطالعه تاثیر تغییر یک ورودی/خروجی خاص بر روی ورودی ها/خروجی‌های دیگر مورد تحقیق قرار می‌گیرد. این تبادل‌ها در اقتصاد به‌طور معمول به عنوان نرخ‌های حاشیه‌ای شناخته می‌شوند. نرخ‌های حاشیه‌ای براساس مشتقات جزیی در ریاضیات، روی مرز تولید بیان می‌شوند. تجزیه و تحلیل تاثیر ورودی‌ها/خروجی‌های همگن، به عنوان نرخ های حاشیه ای جایگزینی شناخته می‌شود، در حالی که مطالعه ورودی‌ها/خروجی‌های غیرهمگن به عنوان نرخ‌های حاشیه‌ای تبدیلی نامیده می‌شود. بررسی این تبادل ها به‌طور مستقیم با درک ویژگی‌های تکنولوژی و مرز تولید مرتبط است.

به دلیل ماهیت خطی قطعه‌ای مرز تولید درDEA، محاسبه یک مشتق منحصربفرد در هر نقطه امکان‌پذیر نیست. برای رفع این مشکل، مفهوم نرخ‌های حاشیه‌ای سمت راست و سمت چپ به ترتیب بر اساس تعریف مشتق جزیی سمت راست و سمت چپ معرفی شده است. بر این اساس اگر هدف افزایش ورودی/خروجی مرتبط به مقدار کوچکی باشد، با محاسبه مشتق جزیی سمت راست نرخ حاشیه‌ای سمت راست به دست می‌آید. از طرف دیگر، اگر هدف کاهش ورودی/خروجی مرتبط به مقدار کوچکی باشد نرخ‌های حاشیه‌ای سمت چپ با مشتق جزیی متناسب آن محاسبه می‌شود.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2224]

روزن و همکاران [۱۴] توصیفی اولیه از رابطه بین نرخ‌های حاشیه‌ای و مشتقات جزیی ارایه دادند که می‌توان آن را به شرح زیر خلاصه کرد:

در حالت کلی فرض کنید برای هر DMU_j یک بردار ورودی/خروجی $z_j = (-x_j, y_j)^t$ مورد بررسی باشد که در آن $x_j = (x_{1j},...,x_{mj})$ و $y_j = (y_{1j},...,y_{sj})$ است.

تعریف ۱. فرض کنید نقطه $z_j = (-x_j, y_j)^t$ یک نقطه از مجموعه تولید روی مرز باشد. نرخ حاشیه‌ای جایگزینی ورودی/خروجی jام به ورودی/خروجی kام در z_o به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$MR_{ij}^{+}(\mathbf{z}_o) \equiv \frac{\partial z_i}{\partial z_j}\Big|\mathbf{z}_o^{+} = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{z_i\left(z_{1o},\ldots,z_{jo}+h,\ldots,z_{(m+s)o}\right) - z_i\left(z_{1o},\ldots,z_{jo},\ldots,z_{(m+s)o}\right)}{h}$$

$$MR_{ij}^{-}(\mathbf{z}_o) \equiv \frac{\partial z_i}{\partial z_j}\Big|\mathbf{z}_o^{-} = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{z_i\left(z_{1o},\ldots,z_{jo}-h,\ldots,z_{(m+s)o}\right) - z_i\left(z_{1o},\ldots,z_{jo},\ldots,z_{(m+s)o}\right)}{h}$$

بنابراین، مشتقات جزیی سمت راست و سمت چپ در یک نقطه خاص به ترتیب نرخ‌های حاشیه‌ای سمت راست و سمت چپ مربوط به آن نقطه متناظر هستند. آسمیلد و همکاران [۲] یک روش چهار مرحله‌ای برای محاسبه نرخ‌های حاشیه‌ای جایگزینی ورودی/خروجی jام به ورودی/خروجی k ام در نقطه مرزی z_o معرفی کردند. این فرآیند به شرح زیر است.

۱. یک افزایش کوچک h برای ورودی/خروجی k ام انتخاب کنید

۲ . مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را حل کنید و مقدار z_{jo}^{*} را به‌دست آورید:

$$Max \quad z_{jo}^{*}$$

$$s.t.$$

$$(z_{1o},\ldots,z_{ko},\ldots,z_{jo}^{*},\ldots,z_{m+s,o}) \in T$$

۳. نرخ حاشیه ای جایگرینی سمت راست از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$MR_{jk}^{+}(z_o) = \frac{z_{jo}^{*} - z_{jo}}{h}$$

۴. مراحل (۲) و (۳) برای $-h$ تکرار می‌شود و نرخ حاشیه‌ای جایگرینی سمت چپ محاسبه می‌شود.

همان‌طور که در روش پیشنهادشده توسط آسمیلد و همکاران[۲] مشاهده شد، این فرآیند مستلزم اندازه‌گیری تغییرات در یک ورودی/خروجی انتخاب شده نسبت به تغییرات در ورودی/خروجی های دیگر است که توسط مدیر تعیین می‌شود.

در بخش بعدی یک مدل نرخ حاشیه‌ای جدید معرفی می‌کنیم و مدل را برای واحدهای کارایی که بر اساس مدل (۲) مشخص شده‌اند، اجرا می‌کنیم. هدف تعیین یک خروجی بهینه است که سودآوری واحد را تضمین می‌کند. این رویکرد شناسایی فرآیندهای تولید خروجی خاص و کارایی مرتبط با آنها را افزایش می‌دهد.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2224]

۳ نرخ‌های حاشیه‌ای مختلط

هنگامی که تغییری در یک ورودی/خروجی ایجاد می‌شود، هدف شناسایی تغییرات لازم در ورودی/خروجی‌های دیگر با تضمین شدنی بودن تولید و حفظ کارایی تکنیکی است. در مدل کلاسیک نرخ‌های حاشیه‌ای، اثر یک تغییر کوچک بر روی یک ورودی یا خروجی باید روی هر یک از ورودی‌ها و خروجی‌های دیگر در مراحل مختلف مورد بررسی قرار گیرد. هدف تحقیق پیش رو ارایه مدل نرخ‌های حاشیه‌ای مختلط‌ای است تا تاثیر تغییر جزیی یک ورودی/خروجی را بر ورودی/خروجی‌های دیگر در یک مرحله مشخص کند. این تاثیر به کمک متغیر دودویی در یک مرحله قابل مشاهده است. بدین ترتیب لازم نیست این تاثیر برای هر شاخص جداگانه بررسی شود.

مجموعه ورودی I با اندیس $i \in I$، مجموعه خروجی O با اندیس $r \in O$ و مجموعه J را برای ورودی/ خروجی‌های ممکن DMU_j با اندیس $j \in J$ را در نظر بگیرید. مشاهدات x_{ij} و y_{rj} به ترتیب سطح ورودی i ام و سطح خروجی j ام از واحد DMU_j را نشان می دهد. همچنین x_{ko} ورودی Kام واحد DMU_j است و نرخ حاشیه‌ای واحدهای کارای سودآور با توجه به محاسبه تغییرات در این واحدها نشان داده می‌شود. متغیر y_t میزان حداکثر و بهترین خروجی t ام واحد DMU_j را برای حفظ سودآوری نشان می‌دهد، که توسط مدل تعیین می‌شود. علاوه بر این، مقادیر اختصاص داده شده به شاخص $t \in O$ و شاخص r یکسان هستند. همچنین، متغیر λ_j در مدل ضرایب وزنی است.

همان‌طور که بیان شد در محاسبه نرخ های حاشیه ای اثر تغییر جزیی یک شاخص بر روی تک تک شاخص‌های دیگر به طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در رویکرد پیش رو بدون این که بررسی تغییرات روی تک تک خروجی‌ها نیاز باشد بهترین شاخص خروجی (y_t) مشخص می‌شود. این انتخاب از ضرب متغیر دودویی (δ_t) در y_t به دست می آید که در قید سوم مدل (۳) آورده شده است. با توجه به رویکرد سودآوری (مدل (۱)) و رویکرد بیان شده، مدل به صورت زیر است.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2224]

$$Z = Max \ \frac{\sum_{t=1}^{s} p_t \delta_t y_t + \sum_{t=1}^{s} \delta_t \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq t}}^{s} p_r y_{ro}}{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} c_i x_{ij} + (x_{ko} + h)}$$

$s.t.$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{kj} = x_{ko} + h \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} \qquad i = 1,\dots,m \quad i \neq k \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{tj} \geq \delta_t y_t \qquad t = 1,\dots,s \qquad (3) \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq \delta_t y_{ro} \qquad t = 1,\dots,s \quad r = 1,\dots,s \quad r \neq t \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
&\sum_{t=1}^{s} \delta_t = 1 \\
&\delta_t \in \{0,1\} \qquad t = 1,\dots,s \\
&\lambda_j \geq 0 \qquad j = 1,\dots,n
\end{aligned}$$

که در آن h یک افزایش جزیی برای ورودی k ام واحد تحت ارزیابی DMU_o است که در قید اول قابل مشاهده است. از آنجا که فقط یکی از δ_tها مساوی یک و بقیه $\delta_t (t \neq l)$ صفر هستند، بنابراین تنها یک خروجی برای هر واحد تحت ارزیابی افزایش یا کاهش می یابد و به همین علت سمت راست قید سوم و چهارم در δ_t ضرب شده است. با توجه به تغییراتی که در ورودی و خروجی براساس محدودیت های مدل ایجاد شده است تابع هدف بر اساس مدل سودآوری (۱) بیان شد. به عبارت دیگر، برای حفظ سودآوری واحد، δ_t تعیین می کند که کدام y_t حداکثر شود. حداکثر سودآوری با ترکیب این تغییرات در مدل (۳) مشهود است.

توجه داشته باشید که مدل (۳) یک مدل غیرخطی است. این مدل با تبدیل $\delta_t y_t = y_t^*$ به مدل خطی تبدیل می‌شود.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2224]

$$Z = Max \ \frac{\sum_{t=1}^{s} p_t y_t^* + \sum_{t=1}^{s} \delta_t \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq t}}^{s} p_r y_{ro}}{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} c_i x_{ij} + (x_{ko} + h)}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{kj} = x_{ko} + h$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} \qquad i = 1,\ldots,m \quad i \neq k$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{tj} \geq y_t^* \qquad t = 1,\ldots,s \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq \delta_t y_{ro} \qquad t = 1,\ldots,s \ , r = 1,\ldots,s \ , r \neq t;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

$$\sum_{t=1}^{s} \delta_t = 1$$

$$\delta_t \in \{0,1\} \qquad t = 1,\ldots,s$$

$$\lambda_j \geq 0 \qquad j = 1,\ldots,n$$

با توجه به متغیر دودویی δ_t بدیهی است که $(r \neq t)$ $\delta_r = 0$است. همچنین وقتی $\delta_t = 1$، آنگاه $y_t = y_t^*$ است. برای تحقق این امر از از قیود(۵) در مدل استفاده می‌شود.

$$y_t^* = y_t - M(1-\delta_t)$$
$$y_t^* \leq y_t \leq y_t^* + M(1-\delta_t) \qquad (5)$$
$$0 \leq y_t^* \leq M\delta_t$$

با جایگذاری قیود (۵) در مدل (۶) مساله برنامه ریزی خطی (۶) را داریم.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2224]

$$Z = Max \ \frac{\sum_{t=1}^{s} p_t y_t^* + \sum_{t=1}^{s} \delta_t \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq t}}^{s} p_r y_{ro}}{\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{m} c_i x_{ij} + (x_{ko} + h)}$$

$$s.t.$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{kj} = x_{ko} + h \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le x_{io} \qquad i = 1,\dots,m \quad i \neq k \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{tj} \ge y_t - M(1-\delta_t) \quad t = 1,\dots,s \qquad (6) \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge \delta_t y_{ro} \qquad t = 1,\dots,s \quad r = 1,\dots,s \quad r \neq t \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
&\sum_{t=1}^{s} \delta_t = 1 \\
&y_t^* = y_t - M(1-\delta_t) \\
&y_t^* \le y_t \le y_t^* + M(1-\delta_t) \\
&0 \le y_t^* \le M\delta_t \\
&\delta_t \in \{0,1\} \qquad t = 1,\dots,s \\
&\lambda_j \ge 0 \qquad j = 1,\dots,n
\end{aligned}$$

با حل مساله برنامه ریزی خطی (۶) مقدار بهینه y_t تعیین می‌شود.

قضیه ۱. ورودی/ خروجی جدید $(x_{1o},\dots,x_{ko}+h,\dots,x_{mo},y_{1o},\dots y_t^*,\dots,y_{so})$ از DMU_o روی مرز کارایی قرار دارد.

اثبات. فرض خلف. فرض کنید $z^* > 1$. از آنجا که z^* جواب بهینه مدل (۴) است، پس

$$\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{kj} = \overline{x}_{ko} + h \\
\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} = \overline{x}_{io} \\
\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{tj} = \overline{y}_t^* \\
\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} = \delta_t \overline{y}_{ro}
\end{cases}$$

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2224]

یک جواب شدنی برای مدل (۴) است. از آنجایی که هدف حداکثر کردن تابع هدف نسبت به یک تغییر کوچک در یک ورودی خاص است، حداکثر مقدار ممکن خروجی مورد نظر ($\overline{y}_t$) را داریم. روشن است که $\overline{y}_t > y_t^*$ و مقدار بهینه (۴) است. با این تناقض، اثبات کامل است.

٤ مثال عددی

برای اثربخشی روش ارایه‌شده در این مقاله، مثالی با شش واحد تصمیم‌گیری ($DMUs$) ارایه می‌شود. این واحدها یک ورودی x_1 با عامل هزینه c_1 و دو خروجی (y_1, y_2) با عوامل سود (p_1, p_2) مشخص دارند. جزییات این واحدهای تصمیم‌گیری و نمره کارایی متناظر آنها که با استفاده از مدل (۲) محاسبه شده‌اند، در جدول ۱ آمده است. شکل ۱ مجموعه امکان تولید این مجموعه از داده‌ها را نشان می‌دهد. واحدهای سودآور با استفاده از روش نرخ حاشیه‌ای مختلط، مشخص شده است.

همان‌طور که در شکل ۱ و جدول ۱ نشان داده شده است، واحدهایB ، D، E و F سودآور هستند در حالی که واحدهای A و C سودآور نیستند. برای استفاده از روش ارایه شده در این مقاله، باید مقدار کوچکی برای تغییر جزیی h را انتخاب کنیم. فرض کنید که h برابر با ۰/۵ $\pm$ باشد. در شکل ۱ حرکت روی مرز تکنولوژی با پیکان‌ها (فلش ها) در نقاط B و E نشان داده می‌شود که در آن نرخ‌های حاشیه‌ای مختلط مورد نیاز را نیز می‌توان مشاهده کرد.

ابتدا تغییرات خروجی را با افزایش ورودی به مقدار ۰/۵برای واحدهای سودآور بررسی کنیم. به عنوان مثال، واحد DMU_B را در نظر بگیرید. به وضوح مشخص است که این واحد برای حفظ سودآوری نیاز به هدایت روی مرز کارایی دارد. همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، هر دو خروجی y_1 و y_2 می‌توانند در دو جهت مختلف B_1 و B_2 حرکت کنند. مشاهده می‌شود که با افزایش بیشتر در خروجی اول نسبت به خروجی دوم، موقعیت جدید این واحد (۸, ۳/۰۶۲۵, ۱/۵)B^* بر روی ابرصفحه تکیه‌کننده BDEF قرار می‌گیرد. به طریق مشابه، این تغییر برای سه واحد دیگر یعنیD ، E و F نیز امکان‌پذیر است. خروجی دوم واحد D ، ۴ واحد کاهش می‌یابد و به موقعیت جدید (۵, ۱۰, ۲/۵)D^* می‌رسد. در حالی که موقعیت جدید واحدهای E و F ، بدون هیچ تغییری در خروجی‌های این واحدها به ترتیب (۶, ۱۰, ۳/۵)E^* و (۱۲, ۳, ۵/۵)F^* است.

در ادامه بررسی نرخ حاشیه‌ای حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن ورودی به مقدار ۰/۵ کاهش می‌یابد. برای این تجزیه و تحلیل، DMU_E را در نظر بگیرید. همان‌طور که در شکل ۱ دیده می‌شود با کاهش ورودی از مقدار ۳ به مقدار ۲/۵ واحد، دو جهت بهبود ممکن (E_1 , E_2) برای تغییرات در دو خروجی این واحد وجود دارد و می‌تواند در یکی از این جهت‌ها حرکت کند. برای حفظ سودآوری، واحد E باید خروجی دوم خود را از ۶ به ۵ کاهش دهد. این حرکت منجر به موقعیت جدید (۵, ۱۰, ۲/۵)E^{**} بر روی صفحه تکیه کننده SEDNT می‌شود. این مورد همچنین برای واحدهای D و F نیز قابل اعمال است و موجب شده است که موقعیت جدید آنها به ترتیب (۴, ۶, ۱/۵)D^{**} و (۱۱/۴۳, ۳, ۴/۵) F^{**} باشد. مهم است که توجه کنیم نرخ حاشیه‌ای در نقطه

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2224]

Bتعریف نشده است زیرا با این مقدار کاهش ورودی(۰/۵)، این واحد نمی‌تواند همچنان در داخل تکنولوژی قرار گیرد. نتایج نهایی در جدول ۲ نشان داده شده است.

جدول ۱. مجموعه داده‌ها

DMUs	x_1	y_1	y_2	c_1	p_1	p_2	نمره کارایی
A	۶	۲	۱۲	۱	۱	۱/۵	./۷۹۳۷
B	۱	۲	۸	۱	۱	۱/۵	۱
C	۴	۵	۵	۱	۱	۱/۵	۰/۲۹۱۳
D	۲	۱۰	۴	۱	۱	۱/۵	۱
E	۳	۱۰	۶	۱	۱	۱/۵	۱
F	۵	۳	۱۲	۱	۱	۱/۵	۱

بر اساس مفهوم بهره‌وری حاشیه‌ای، نسبت تولید به ورودی اصلاح‌شده را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\mathrm{MR}(\mathrm{DMU_B}) = \frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{y_1^* - y}{h} = \frac{۳/۰۶۲۵ - ۲}{۰/۵} = ۲/۱۲۵$$

$$\mathrm{MR}(\mathrm{DMU_E}) = \frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{y_2^* - y}{h} = \frac{۵ - ۶}{-۰/۵} = ۲$$

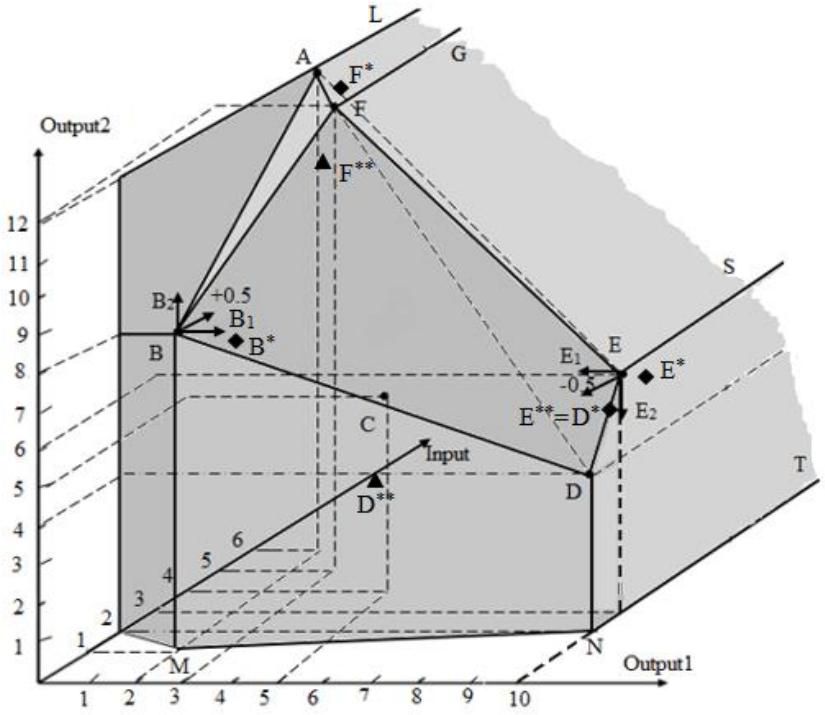
از آنجایی که مقدار گرادیان مثبت است، این نشان می‌دهد که افزایش یا کاهش یک متغیر ورودی منجر به افزایش یا کاهش متناظر در متغیر دیگری می‌شود. این رابطه از جدول ۲ مشخص است.

جدول ۲. نتیجه داده‌ها

	$h=+۰/۵$			ابرصفحه	$h=-۰/۵$			ابرصفحه		
DMUs	x_1^N	y_1^N	y_2^N		x_1^N	y_1^N	y_2^N		y_1^o	y_2^o
B	۱/۵	۳/۶۲۵	۸	BDEF	۰/۵	-	-	-	۲	۸
D	۲/۵	۱۰	۵	DE	۱/۵	۶	۴	BDNM	۱۰	۴
E	۳/۵	۱۰	۶	SEDNT	۲/۵	۱۰	۵	SEDNT	۱۰	۶
F	۵/۵	۳	۱۲	GFAL	۴/۵	۳	۱۱/۴۳۳۳	FBDE	۳	۱۲

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2224]



شکل ۱. جهت حرکت واحدها

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای محاسبه ارزش‌های نرخ حاشیه‌ای در مرزهای تولید DEA ارایه می‌شود. در روش ارایه‌شده، نرخ‌های حاشیه‌ای با تعیین خروجی مناسب برای افزایش یا کاهش از طریق تعدیل کوچک تقریب زده می‌شود. این کار با حداکثرکردن تابع هدف و انتخاب حداکثر خروجی مناسب بر اساس مقدار تعدیل کوچک انجام می‌شود. سهم اصلی این مقاله، معرفی رویکردی است که با استفاده از یک متغیر دودویی، تاثیر تغییر یک ورودی/خروجی بر سایر ورودی‌ها/ خروجی‌ها در یک مرحله قابل مشاهده است. همچنین از این رویکرد می‌توان برای محاسبه نرخ‌های حاشیه‌ای مختلف در هر تکنولوژی استفاده کرد. از مرز سودآوری برای بیان کاربرد عملی رویکرد ترکیب نرخ حاشیه‌ای با تکنیک‌های کارایی در تحلیل پوششی داده‌ها استفاده شده است. مثال موردی انجام‌شده در این مقاله، می‌تواند کاربرد عملی روش توسعه‌یافته را در تحلیل تاثیر یک شاخص بر شاخص دیگر در یک واحد کارا نشان دهد. این مقاله از راهنمایی‌ها و تجارب پژوهش‌های گذشته بهره‌گیری کرده و یک مسیر جدید برای تحقیقات آینده در زمینه تحلیل تاثیر در تغییرات کوچک در DEA را معرفی می‌کند. در مطالعات آتی از این رویکرد می‌توان برای یافتن بهترین خروجی در فناوری‌های مختلف DEA، دسته‌بندی ورودی (خروجی)ها به صورت مجموعه‌های متمایز و تغییر مجموعه‌ای خاص از ورودی (خروجی)ها بر روی مجموعه‌ای دیگر از ورودی (خروجی)ها استفاده نمود. همچنین

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2224]

ازترکیب این رویکرد با روش‌های تصادفی در جایی که رویکردهای قطعی به تغییرپذیری ورودی‌ها حساس هستند استفاده کرد. در نهایت امید است که از این پژوهش‌ها به منظور بهبود دقت تحلیل‌ها، در روند افزایش کارایی سازمان‌ها و بهره‌وری استفاده شود و به پیشرفت علمی و عملی در این حوزه کمک کند.

منابع

[1] Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units ,European Journal of Operational Research, 2 (6), 429–444.

[2] Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W.W., (1984). Some methods for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis, Manage. Sci, 30 (9), 1078-1092.

[3] Banker, R. D., & Thrall, R. M., (1992). Estimation of returns to scale using data envelopment analysis, European Journal of Operational Research, 62, 74–84.

[4] Seiford, L.M., & Thrall, R.M., (1990). Recent developments in dea: The mathematical programming approach to frontier analysis, J. Econometrics, 46(1–2):7–38.

[5] Charnes, A., & Cooper, W.W., Kluwer Academic Publishers.

[6] Seiford, L.M., (1996). Data developments analysis: The evolution of the art 1978–1995, Journal of productivity analysis, 7,99–139.

[7] Bessent, A., Elam, W. J., & Clark, T., (1988). Efficiency Frontier Determination by Constrained Facet Analysis. Operations Research 36, 785–796.

[8] Cooper, W. W., Park, K. S., & Ciurana, J. T., (2000). Marginal rates and elasticities of substitution with additive models in DEA, J. Prod. Anal, 13 (2), 105–123.

[9] Emrouznejad, A., Tavares, G., & Parker, B., (2008). Evaluation of research in efficiency and productivity: A survey and analysis of the first 30 years of scholarly literature in DEA, Socio. Econ. Plan. Sci, 42 (3) ,151-157.

[10] Asmild, M., Paradi, J., & Reese, D., (2006). Theoretical perspectives of trade-off analysis using DEA,
Omega, (34), 337-343.

[11] Rosen, D., Schaffnit, C., & Paradi, J. C., (1998). Marginal rates and two-dimensional level curves in DEA, J. Prod. Anal, 9, 205–232.

[12] Smith, J. A., Johnson, M. B., & Anderson, L. W., (2010). Analyzing irreversible and indirect effects of small changes in dea." Journal of Economic Analysis and Management, 8(3), 245-265.

[13] Williams, E. R., Brown, C. L., & Miller, K. J., (2015). Analyzing small changes in dea using an extended marginal rate approach. Journal of Business Analytics, 2(2), 117-132.

[14] Ouellette , P., & Vigeant, S,. (2016). From partial derivatives of dea frontiers to marginal products, marginal rates of substitution, and returns to scale, European Journal of Operational Research, 253(3),880-887.

[15] Sueyoshi, T., & Goto, M., (2012). Returns to scale, damages to scale, marginal rate of transformation and rate of substitution in dea environmental assessment, Energy Econ, 34, 905–917.

[16] Sueyoshi, T., & Yuan, Y., (2016). Marginal rate of transformation and rate of substitution measured by dea environmental assessment: Comparison among European and North American nations, Energy Economics, 56, 270-287.

[17] Wang, z., & He, W., (2017). Co_2 emissions efficiency and marginal abatement cost of the regional transportation sectors in China, Transportation Research Part D: Transport and Environment, 50, 83-97.

[18] Gunawardena, A., Hailu, A., White, B., & Pandit, R., (2017). Estimating marginal abatement costs for industrial water pollution in Colombo, Environmental Development.21, 26-37.

[19] Bozorgi, F., Soufi, M., Amirteimoori, A., & Homayounfar, M., (2021). Analysis of marginal rates of substitution in the presence of undesirable factors using data envelopment analysis. Journal of Operational Research in its Applications, 18 (4) :103-119. In Persian.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2224]

[20] Jalalat, B., & Mohammaditabar D., (2023). Fuzzy multi objective supplier selection and joint replenishment problem by inverse weighted and goal programming approaches. Journal of Operational Research in its Applications, 20 (4) :21-35. (In Persian).

[21] Amirteimoori, A., Allahviranloo, T., & Khoshandam, L., (2024). Marginal rates of technical changes and impact in stochastic data envelopment analysis: An application in power industry. Expert Systems with Applications. Journal of Operational Research in its Applications, 237, Part C. (In Persian)

[22] Wu, F., Wang, S. Y., & Zhou, P., (2023). Marginal abatement cost of carbon dioxide emissions: The role of abatement options. European Journal of Operational Research, 310(2), 891-901.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2224]