Journal of Operational Research in its Applications
Vol.23, NO.1, Spring 2026
ISSN: 2251-7286
DOI: 10.71773/jamlu-2026-1-2295

Simultaneous and Continuous Analysis of Changes in the Grey Linear Programming Model: Grey Parametric Programming

F. Pourofoghi*
Assistant Professor, Department of Applied Mathematics, Payame Noor University, Tehran, Iran.

Research Paper

Received: 15 August 2025
Accepted: 25 January 2026

Abstract: In many real-world problems, available data and information are often incomplete or imprecise; therefore, the use of grey system theory and, in particular, grey linear programming as an effective tool for modeling such conditions is of special importance. Post-optimal analysis of the model's behavior, known as sensitivity (post-optimal) analysis, makes it possible to understand the model's sensitivity to changes in parameters. When model parameters change continuously and simultaneously due to temporal or economic factors, dynamic examination of the optimal solution using grey parametric programming is necessary. In this research, the concept of traditional parametric programming, which analyzes parameter variations within a defined range, has been extended to the grey domain, enabling the analysis of parameters that are represented by intervals rather than point estimates. Three types of grey parametric programming are examined: continuous changes in the coefficients of decision variables, changes in the right-hand side values of constraints, and simultaneous changes in both parts. The proposed method allows analysis of the effects of these changes across the entire parameter range and illustrates the trend of changes in the optimal solution under different conditions. Finally, a numerical example is provided for each case to demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

Introduction: Nowadays, due to the unstable economic, social, geographical and climatic conditions of the world, after obtaining the optimal solution of the gray linear programming problem, the parameters of the problem may change for various reasons, including inflation rates and other economic fluctuations. Therefore, in this paper, the concept of traditional parametric programming, which analyzes the changes of parameters within a defined range, is extended to grey parametric programming. And we provide the possibility of analyzing parameters that are themselves represented by intervals instead of point estimates.

Materials and Methods: Parametric programming technique is a more advanced form of sensitivity analysis that examines the optimal solution of a grey linear programming problem based on continuous changes in the model parameters under the influence of time or economic conditions. Therefore, in this method, the optimal solution of the model is determined and analyzed based on the desired changes over time. Suppose that the basic optimal solution for a grey linear programming problem is available. Specifically, the parametric programming technique will be considered for the following changes in the problem:

* *Corresponding Author: amir@ashojaie.com*

Journal of Operational Research in its Applications
Vol.23, NO.1, Spring 2026
ISSN: 2251-7286
DOI: 10.71773/jamlu-2026-1-2295

1. Change in the coefficients of the decision variables in the objective function. $\left(\otimes c_j\right)$
2. Change in the right-hand side values. $\left(\otimes b_i\right)$
3. Simultaneous change in the coefficients of the objective function $\left(\otimes c_j\right)$, and the right-hand side values $\left(\otimes b_i\right)$.

Results and Discussion: Using the concepts and theorems of grey systems theory, the continuous analysis and investigation of the parameters of the grey linear programming problem in each possible domain, which is called parametric programming, was carried out. For this purpose, three different modes of parametric programming for the coefficients of the decision variables, parametric programming for the right-hand values, and simultaneous parametric programming for the coefficients of the decision variables and the right-hand values of the grey linear programming problem were investigated, and the effect of continuous changes in the model parameters in all possible domains on the optimal solution of the model was determined.

Conclusions: Using the concepts and theorems of grey systems theory, the continuous analysis and investigation of the parameters of the grey linear programming problem in each possible domain, which is called parametric programming, was carried out. For this purpose, three different modes of parametric programming for the coefficients of the decision variables, parametric programming for the right-hand values, and simultaneous parametric programming for the coefficients of the decision variables and the right-hand values of the grey linear programming problem were investigated, and the effect of continuous changes in the model parameters in all possible domains on the optimal solution of the model was determined.
In the future, simultaneous and continuous analysis of changes in the transportation model can be investigated.

Keywords: Grey System, Interval Grey Numbers, Grey Linear Programming, Grey Parametric Programming.

مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال بیست و سوم ، شماره اول (پیاپی ۸۸)،بهار ۰۵، ص ص ۴۸-۲۷
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱
DOI: 10.71773/jamlu-2026-1-2295

تحلیل همزمان و پیوسته تغییرات در مدل برنامه‌ریزی خطی خاکستری: برنامه‌ریزی پارامتریک خاکستری

فرید پورافقی[1*]
استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

رسید مقاله: ۲۴ مرداد ۱۴۰۴
پذیرش مقاله: ۵ بهمن ۱۴۰۴

چکیده

در بسیاری از مسایل دنیای واقعی، داده‌ها و اطلاعات در دسترس معمولاً ناقص یا نادقیق‌اند، به همین دلیل استفاده از نظریه سیستم‌های خاکستری و به‌ویژه برنامه‌ریزی خطی خاکستری به عنوان ابزاری کارآمد برای مدل‌سازی این‌گونه شرایط اهمیت ویژه‌ای دارد. تحلیل رفتار مدل پس از یافتن پاسخ بهینه، که با عنوان تحلیل پس‌بهینگی شناخته می‌شود، امکان درک حساسیت مدل نسبت به تغییرات پارامترها را فراهم می‌کند. هنگامی که پارامترهای مدل به صورت پیوسته و همزمان در اثر عوامل زمانی یا اقتصادی تغییر می‌کنند، بررسی پویای پاسخ بهینه با روش برنامه‌ریزی پارامتریک خاکستری ضروری است. در این پژوهش، مفهوم برنامه‌ریزی پارامتری سنتی، که تغییرات پارامترها را در یک محدوده تعریف شده تجزیه و تحلیل می‌کند، به حوزه خاکستری گسترش داده شده و امکان تجزیه و تحلیل پارامترهایی فراهم شده که خود به جای تخمین‌های نقطه‌ای، با فواصل نمایش داده می‌شوند. سه نوع برنامه‌ریزی پارامتریک خاکستری مورد بررسی قرار گرفته است: تغییرات پیوسته در ضرایب متغیرهای تصمیم، تغییرات در مقادیر سمت راست محدودیت‌ها، و تغییرات همزمان در هر دو بخش. روش ارایه‌شده امکان تحلیل تاثیر این تغییرات در کل دامنه پارامترها را فراهم کرده و روند تغییرات پاسخ بهینه را در شرایط مختلف نشان می‌دهد. در پایان، برای هر حالت نمونه‌ای عددی ارایه شده است تا کارآمدی رویکرد پیشنهادی تبیین شود.

کلمات کلیدی: سیستم خاکستری، اعداد خاکستری بازه‌ای، برنامه‌ریزی خطی خاکستری، برنامه‌ریزی پارامتریک خاکستری.

۱ مقدمه

در حوزه بهینه‌سازی ریاضی، مدل برنامه‌ریزی خطی کلاسیک، اساساً بر این فرض متکی است که همه پارامترها، ضرایب تابع هدف، ضرایب محدودیت و مقادیر سمت راست دقیقاً شناخته شده و ایستا هستند. با این حال، فرآیندهای تصمیم‌گیری در دنیای واقعی همواره با عدم قطعیت، عدم دقت و تغییرات پویا ناشی از اطلاعات ناقص،

[*] عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: f_pourofoghi@pnu.ac.ir

ابهام یا شرایط اقتصادی در حال تحول، مشخص می‌شوند. در طول فرآیند تصمیم‌گیری، وجود عدم‌قطعیت در داده‌ها و موقعیت یک مساله برنامه‌ریزی خطی، معمولاً تصمیم‌گیرنده را با شرایط تردید و عدم قطعیت مواجه می‌کند و تصمیم‌گیری و انتخاب بهترین گزینه را برای او دشوار می‌سازد [۱]. بنابراین، در مدل‌سازی یک مساله با تکنیک‌های برنامه‌ریزی خطی، معمولاً پارامترهای مساله دارای سطحی از عدم قطعیت در مقادیر بیان‌شده هستند. به همین دلیل، برای مدل‌سازی مسایل واقعی، با داده‌های نادقیق روش‌های مختلف مانند آمار و احتمال و نظریه مجموعه‌های فازی ارایه شده‌اند [۲، ۳]. آمار و احتمال عدم قطعیتی است که از یک فرآیند کاملا تصادفی ناشی می‌شود و به توزیع و توابع نمونه‌گیری بالا نیاز دارد. به عبارت دیگر، اگر تصمیم‌گیرنده نتواند با به دست آوردن داده‌های بیشتر، عدم قطعیت را کاهش دهد، با یک فرآیند کاملا تصادفی با عدم قطعیت مواجه خواهد شد. نظریه مجموعه‌های فازی مبتنی بر تعریف اعداد فازی است و اعداد فازی نیز به نوبه خود به تعریف تابع عضویت بستگی دارند که وابسته به تعداد خبرگان و سطح تجربه آنها است. حال اگر در مساله‌ای تعداد خبرگان و سطح تجربه کم باشد به نحوی که نتوان تابع عضویت را استخراج کرد یا تعداد نمونه کم باشد یعنی نمی‌توانیم از نظریه عدم قطعیت فازی یا نظریه عدم قطعیت تصادفی استفاده کنیم، در این‌صورت نیازمند استفاده از نظریه‌ی دیگری خواهیم بود که در شرایط ذکر شده کارایی داشته باشد. برای مطالعه چنین مسایلی در دنیای واقعی که داده‌ها و اطلاعات موجود اغلب ناقص یا غیردقیق هستند و عدم دقت بالایی دارند، دنگ [۴] مفهوم نظریه سیستم خاکستری را معرفی کرد. نظریه سیستم‌های خاکستری، چارچوبی را برای مقابله با سیستم‌هایی که با اطلاعات محدود، ناقص یا نامشخص مشخص می‌شوند، ارایه می‌دهد که اغلب با استفاده از اعداد خاکستری بازه‌ای نمایش داده می‌شوند. برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری به طور گسترده در مدل‌سازی مسایل واقعی در برنامه‌ریزی مدیریت منابع، اقتصاد، جغرافیا، صنعت و غیره استفاده شده است [۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱]. محققان روش‌های مختلفی را برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری پیشنهاد کرده‌اند [۱۲، ۱۳, ۱۴، ۱۵،۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹]. یک مساله استاندارد برنامه‌ریزی خطی با هدف بهینه‌سازی یک تابع هدف، تحت مجموعه‌ای از محدودیت‌های خطی است. امروزه با توجه به شرایط ناپایدار اقتصادی، اجتماعی، جغرافیایی و اقلیمی جهان، پس از یافتن یک جواب بهینه برای مساله برنامه‌ریزی خطی، درک میزان مقاومت این جواب در برابر نوسانات جزئی پارامتر بسیار مهم است. تحلیل رفتار مدل پس از یافتن جواب بهینه، که به عنوان تحلیل پس از بهینگی شناخته می‌شود، بینشی در مورد حساسیت مدل به تغییرات پارامترها ارایه می‌دهد. تصمیم‌گیران اغلب سعی دارند که با استفاده از فن برنامه‌ریزی خطی خاکستری رخدادهای آتی را کنترل کرده و متناسب با اهداف خویش تنظیم نمایند. به این ترتیب، آمادگی بیشتری برای برخورد با تغییرات و تحولات آتی پیدا کنند و از سوی دیگر با پیش‌بینی رخدادهای آتی سعی می‌کنند اهداف خویش را متناسب با ان رخدادها تنظیم نمایند. اشکالی که در این مسایل می‌تواند رخ دهد این است که بعد از به‌دست آوردن جواب بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری ممکن است به دلایل مختلف از جمله نرخ تورم و سایر نوسانات اقتصادی پارامترهای مساله دچار تغییر شوند در این صورت برای به‌دست آوردن جواب بهینه مساله، بعد از اعمال تغییرات پارامترها ، مساله باید دوباره حل شود. بنابراین برای جلوگیری از حل مجدد آن، نیاز به تحلیل حساسیت مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری و پیدا کردن محدوده‌هایی برای ثابت ماندن جواب بهینه احساس می‌شود. تحلیل

حساسیت سنتی بر تغییرات کوچک و گسسته در پارامترهای منفرد تمرکز دارد. روش‌های متعددی برای تحلیل حساسیت مساله برنامه‌ریزی در محیط عدم قطعیت ارایه شده است [۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶]. بسیاری از کاربردهای صنعتی، مالی و لجستیکی مستلزم بررسی سناریوهایی هستند که در آنها پارامترهای سیستم در طول زمان یا به دلیل نیروهای اقتصادی به هم پیوسته نوسان می‌کنند. هنگامی که پارامترهای مدل به دلیل عوامل زمانی یا اقتصادی به طور مداوم و همزمان تغییر می‌کنند، بررسی پویای پاسخ بهینه با استفاده از برنامه‌ریزی پارامتری خاکستری ضروری می‌شود.

لذا در این مقاله مفهوم برنامه‌ریزی پارامتری سنتی، که تغییرات پارامترها را در یک محدوده تعریف‌شده تجزیه و تحلیل می‌کند، را به برنامه‌ریزی پارامتری خاکستری گسترش می‌دهیم و امکان تجزیه و تحلیل پارامترهایی را فراهم می‌کنیم که خود به جای تخمین‌های نقطه‌ای، با فواصل نمایش داده می‌شوند. بنابراین بعد از حل مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری و تعیین جواب بهینه سعی می‌کنیم تا با استفاده از فن برنامه‌ریزی پارامتریک یک محدوده برای تغییرات پیوسته پارامترهای مدل برنامه‌ریزی خطی خاکستری پیدا کنیم که هر تغییری در آن محدوده بر جواب بهینه تاثیر نمی‌گذارد، در حالی که، هر تغییری در خارج از محدوده تعیین‌شده بر جواب اساسی بهینه تاثیرگذار می‌باشد.

بخش‌های مختلف این مقاله به شرح زیر مرتب شده است. نظریه سیستم خاکستری و مفاهیم مرتبط با آن در بخش ۲ ارایه شده است. در بخش ۳، برنامه‌ریزی خطی خاکستری و الگوریتم سیمپلکس خاکستری معرفی‌شده است. برنامه‌ریزی پارامتریک خاکستری و الگوریتم های مربوط به حل حالت‌های مختلف آن و مثال‌های هر حالت در بخش ۴ آورده شده است. نتیجه‌گیری در بخش ۵ ارایه شده است.

۲ مفاهیم اساسی

این بخش به مفاهیم اساسی سیستم‌های خاکستری مورد استفاده در این مطالعه اختصاص دارد [۲۷, ۲۸, ۲۹].

۲ -۱ نظریه سیستم‌های خاکستری

نظریه سیستم‌های خاکستری یکی از مهم‌ترین دستاوردهای علمی در مورد نحوه استفاده از اطلاعات نادقیق است. این نظریه به مطالعه مسایلی می‌پردازد که به دلیل در دسترس بودن محدود داده‌ها و اطلاعات، سطوح بالایی از عدم قطعیت را در بر می‌گیرد [۳۰]. نظریه سیستم‌های خاکستری به عنوان رویکردی مناسب برای مقابله با عدم قطعیت مسایل واقعی شناخته شده است [۳۱، ۳۲].

تعریف ۲-۱: عدد خاکستری بازه‌ای با نماد $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$، نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۸].

$$\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}] = \{\underline{x} \le t \le \bar{x}\} \qquad , \qquad \underline{x} < \bar{x} \tag{۱}$$

که t بخشی از اطلاعاتی است که در مورد عدد $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ داده شده است.

تعریف ۲-۲: مرکز عدد خاکستری بازه‌ای $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ با نماد $\otimes\hat{x}$ نمایش داده شده و به صورت زیر محاسبه می‌شود[۱۸].

$$\otimes\hat{x} = \frac{\underline{x} + \bar{x}}{۲} \qquad (۲)$$

تعریف۲-۳: عدد خاکستری $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ را مثبت می‌نامیم، هرگاه داشته باشیم [۳۳]:

$$\otimes\hat{x} \geq ۰$$

قضیه ۲-۱: هر عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی می‌تواند به صورت مجموع دو عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی کوچک‌تر یا مساوی خودش نوشته شود [۳۳].

$$\forall \ \otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}], \otimes\hat{x} \geq ۰, \ \exists \otimes y \in [\underline{y}, \bar{y}], \otimes\hat{y} \geq ۰, \otimes z \in [\underline{z}, \bar{z}], \otimes\hat{z} \geq ۰$$

به طوری که:

$$[\underline{x}, \bar{x}] = [\underline{y}, \bar{y}] + [\underline{z}, \bar{z}].$$

تعریف ۲-٤: رتبه‌بندی و تفاضل اعداد خاکستری بازه‌ای[۸]

اعداد خاکستری بازه‌ای نامنفی $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ و $\otimes y \in [\underline{y}, \bar{y}]$ را در نظر بگیرید. در این صورت عدد $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ بزرگتر از عدد $\otimes y \in [\underline{y}, \bar{y}]$ است هرگاه عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی $\otimes[\underline{z}, \bar{z}]$ وجود داشته باشد به طوری که داشته باشیم:

$$\otimes[\underline{x}, \bar{x}] = \otimes[\underline{y}, \bar{y}] + \otimes[\underline{z}, \bar{z}]$$

$$\otimes[\underline{x}, \bar{x}] - \otimes[\underline{y}, \bar{y}] = \otimes[\underline{y}, \bar{y}] + \otimes[\underline{z}, \bar{z}] - \otimes[\underline{y}, \bar{y}] = \otimes[\underline{z}, \bar{z}]$$

مثال۲-۱: فرض کنید $\otimes x = \otimes[\underline{x}, \bar{x}] = \otimes[۲,۵]$ و $\otimes y = \otimes[\underline{y}, \bar{y}] = \otimes[۳,۸]$ اعداد خاکستری باشند، در این صورت خواهیم داشت:

$$\otimes[۳,۸] = \otimes[۲,۵] + \otimes[۱,۳]$$

حال تفاضل این دو عدد را به صورت زیر به‌دست خواهد آمد.

$$\otimes[۳,۸] - \otimes[۲,۵] = \otimes[۲,۵] + \otimes[۱,۳] - \otimes[۲,۵] = \otimes[۱,۳]$$

تعریف۲-۵ : فرض کنید $\otimes x_۱ \in [\underline{x}_۱, \bar{x}_۱]$ اعد و $\otimes x_۲ \in [\underline{x}_۲, \bar{x}_۲]$ دو عدد خاکستری بازه‌ای باشند[۱۸].

$$\otimes x_۱ + \otimes x_۲ = [\underline{x}_۱ + \underline{x}_۲, \bar{x}_۱ + \bar{x}_۲]$$

$$\otimes x_۱ \times \otimes x_۲ = \left[\min\{\underline{x}_۱\underline{x}_۲, \bar{x}_۱\bar{x}_۲, \bar{x}_۱\underline{x}_۲, \underline{x}_۱\bar{x}_۲\}, \max\{\underline{x}_۱\underline{x}_۲, \bar{x}_۱\bar{x}_۲, \bar{x}_۱\underline{x}_۲, \underline{x}_۱\bar{x}_۲\}\right] \qquad (۳)$$

$$\frac{\otimes x_۱}{\otimes x_۲} = \otimes x_۱ \times \otimes x_۲^{-۱} = \left[\min\left\{\frac{\underline{x}_۱}{\underline{x}_۲}, \frac{\underline{x}_۱}{\bar{x}_۲}, \frac{\bar{x}_۱}{\underline{x}_۲}, \frac{\bar{x}_۱}{\bar{x}_۲}\right\}, \max\left\{\frac{\underline{x}_۱}{\underline{x}_۲}, \frac{\underline{x}_۱}{\bar{x}_۲}, \frac{\bar{x}_۱}{\underline{x}_۲}, \frac{\bar{x}_۱}{\bar{x}_۲}\right\}\right] \qquad ۰ \notin [\underline{x}_۲, \bar{x}_۲]$$

۳ برنامه‌ریزی خطی خاکستری

فرم کلی مساله برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر می‌باشد.

$$
\begin{aligned}
& Max \;\; z = \sum_{j=1}^{n} c_j \; x_j \\
& s.t. \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,2,\ldots,m \\
& \quad x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
\tag{۴}
$$

که در آن تمام پارامترهای a_{ij} ,b_i , c_j اعداد دقیق هستند. با این حال، در بسیاری از موقعیت‌های دنیای واقعی، داده‌ها و اطلاعات مربوط به مساله مورد نظر واضح، دقیق و یا قطعی نیستند. در این مواقع برنامه‌ریزی خطی خاکستری برای مقابله با شرایط نادقیق مناسب‌تر بوده و نتایج بهتری ارایه می دهد.

فرم کلی مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری به صورت زیر می‌باشد [۳۰، ۳۴].

$$
\begin{aligned}
& Max \quad \otimes z =_G \sum_{j=1}^{n} \otimes c_j \; \otimes x_j \\
& s.t. \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} \otimes a_{ij} \; \otimes x_j \le_G \otimes b_i \quad i = 1,2,\ldots,m \\
& \quad \otimes x_j \ge_G \otimes 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
\tag{۵}
$$

به‌طوری که:

$$
\begin{aligned}
& \otimes Z \in \left[\underline{Z} , \bar{Z} \right] && \underline{Z} , \bar{Z} \in R \\
& \otimes x_j \in \left[\underline{x}_j , \bar{x}_j \right] && \underline{x}_j , \bar{x}_j \in R \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n \\
& \otimes c_j \in \left[\underline{c}_j , \bar{c}_j \right] && \underline{c}_j , \bar{c}_j \in R \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n \\
& \otimes b_i \in \left[\underline{b}_i , \bar{b}_i \right] && \underline{b}_i , \bar{b}_i \in R \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m \\
& \otimes a_{ij} \in \left[\underline{a}_{ij} , \bar{a}_{ij} \right] && \underline{a}_{ij} , \bar{a}_{ij} \in R \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m, \; j = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
$$

انواع مختلفی از مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری وجود دارد که برخی از ضرایب و متغیرهای تصمیم مساله شامل اعداد خاکستری است.

تعریف ۳-۱: هر بردار ی از اعداد خاکستری بازه‌ای که محدودیت‌های مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری در رابطه (۵) را برآورده کند، جواب شدنی نامیده می شود [۱۸].

تعریف ۳-۲: فرض کنید Q مجموعه همه جواب‌های شدنی مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری (۵) باشد. در این صورت $\otimes x_\circ \in Q$ جواب بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری می‌باشد هرگاه برای هر $\otimes x \in Q$ داشته باشیم [۱۸]:

$$\otimes C \; \otimes x \le_G \otimes C \; \otimes x_\circ$$

تعریف ۳-۳: با تقسیم متغیرهای مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری به متغیرهای اساسی $\otimes X_B$ و متغیرهای غیر اساسی $\otimes X_N$ می‌توان ضرایب متناظر با آنها در تابع هدف را به ترتیب به بردارهای $\otimes C_B$ و $\otimes C_N$ تقسیم نمود. بنابراین فرم ماتریسی مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری به صورت زیر در می‌آید [۲۰]:

$$\begin{aligned} &Max\ \otimes z =_G \otimes C_B\ \otimes X_B + \otimes C_N\ \otimes X_N \\ &s.t. \\ &\quad B\ \otimes X_B + N\ \otimes X_N =_G \otimes b \\ &\quad \otimes X_B \geq_G \otimes \circ\ ,\ \otimes X_N \geq_G \otimes \circ \end{aligned} \tag{۶}$$

جدول ۱. روابط ریاضی در تابلوی سیمپلکس

متغیرهای اساسی	متغیرهای غیر آغازین	متغیرهای آغازین	مقادیر سمت راست
$\otimes Z_0$	$\otimes \bar{C}_j =_G \otimes C_B \otimes \bar{P}_j - \otimes C_j$		$\otimes Z =_G \otimes C_B\ \otimes \bar{b}$
متغیرهای اساسی	$\otimes \bar{P}_j =_G \otimes B^{-1}.\otimes P_j$	$\otimes B^{-1}$	$\otimes \bar{b} =_G \otimes B^{-1}.\otimes b$

متغیرهای که در تابلوی آغازین سیمپلکس به عنوان متغیرهای اساسی تعریف می‌شوند، متغیرهای آغازین و سایر متغیرهای مدل متغیرهای غیرآغازین گفته می‌شود.

اگرچه روش‌های مختلفی برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری معرفی شده است. در این مقاله الگوریتم سیمپلکس معمولی برای مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری را در نظر می‌گیریم.

الگوریتم ۳-۱: الگوریتم سیمپلکس مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری

فرض کنید که یک جواب اساسی شدنی B و جدول سیمپلکس مربوطه را داشته باشیم.

۱. جواب اساسی شدنی توسط $\otimes x_B =_G \otimes B^{-1} \otimes b =_G \otimes y_\circ$ و $\otimes x_N =_G \otimes \circ$ داده شده است.

۲. متغیر ورودی (ستون لولا) را بر اساس منفی‌ترین ضریب سطر صفر $(\otimes Z_\circ)$ تعیین کنید.

۳. متغیر خروجی(سطر لولا) را بر اساس حداقل حاصل تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر مثبت ستون لولا (متغیر ورودی) تعیین کنید.

۴. مقادیر جدید سطر صفر را با استفاده از رابطه $\otimes \bar{C}_j = \otimes C_B \otimes \bar{P}_j - \otimes C_j \geq_G \otimes \circ$ محاسبه کنید.(با استفاده از تعریف ۲-۴)

۵. اگر برای هر $j = ۱,۲,...,n$ داشته باشیم $\otimes \bar{C}_j = \otimes C_B \otimes \bar{P}_j - \otimes C_j \geq_G \otimes \circ$، آنگاه توقف کنید جواب به‌دست آمده بهینه است. در غیر این صورت به مرحله ۲ برگردید و مراحل سیمپلکس را تکرار کنید.

در ادامه به مثالی برای نشان دادن نحوه عملکرد الگوریتم فوق در زندگی واقعی نگاه خواهیم کرد.

مثال ۱: مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
&Max \otimes z =_G \otimes[۱,۵] \otimes x_۱ + \otimes[۲,۶] \otimes x_۲ \\
&s.t. \\
&\qquad \otimes[۳,۳] \otimes x_۱ + \otimes[۴,۴] \otimes x_۲ \leq_G \otimes[۵,۱۰] \\
&\qquad \otimes[۱,۱] \otimes x_۱ + \otimes[۲,۲] \otimes x_۲ \leq_G \otimes[۳,۷] \\
&\qquad \otimes x_j \geq_G \otimes ۰ \qquad j = ۱,۲
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

جدول ۲. تابلوی اولیه سیمپلکس

متغیرهای اساسی	$\otimes z$	$\otimes x_۱$	$\otimes x_۲$	$\otimes s_۱$	$\otimes s_۲$	مقادیر سمت راست
$\otimes z_۰$	$[۱,۱]$	$-[۱,۳]$	$-[۲,۶]$	$[۰,۰]$	$[۰,۰]$	$[۰,۰]$
$\otimes s_۱$	$[۰,۰]$	$[۳,۳]$	$[۴,۴]$	$[۱,۱]$	$[۰,۰]$	$[۵,۱۰]$
$\otimes s_۲$	$[۰,۰]$	$[۱,۱]$	$[۲,۲]$	$[۰,۰]$	$[۱,۱]$	$[۳,۷]$

جدول۳. تابلوی بهینه سیمپلکس

متغیرهای اساسی	$\otimes z$	$\otimes x_۱$	$\otimes x_۲$	$\otimes s_۱$	$\otimes s_۲$	مقادیر سمت راست
$\otimes z_۰$	$[۱,۱]$	$[\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}]$	$[۰,۰]$	$[\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}]$	$[۰,۰]$	$[\frac{۵}{۲},\frac{۳۰}{۲}]$
$\otimes x_۲$	$[۰,۰]$	$[\frac{۳}{۴},\frac{۳}{۴}]$	$[۱,۱]$	$[\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۴}]$	$[۰,۰]$	$[\frac{۵}{۴},\frac{۱۰}{۴}]$
$\otimes s_۲$	$[۰,۰]$	$[\frac{-۱}{۲},\frac{-۱}{۲}]$	$[۰,۰]$	$[\frac{-۱}{۲},\frac{-۱}{۲}]$	$[۱,۱]$	$[\frac{۱۱}{۲},۲۲]$

جواب بهینه مساله به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\otimes x_۱ = [۰,۰] \quad , \otimes x_۲ = [\tfrac{۵}{۴},\tfrac{۱۰}{۴}] \quad , \otimes z = [\tfrac{۵}{۲},\tfrac{۳۰}{۲}]$$

بخش بعدی برنامه‌ریزی پارامتریک برای مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری را ارایه می‌دهد.

٤ برنامه‌ریزی پارامتریک خاکستری

فن برنامه‌ریزی پارامتریک شکل پیشرفته‌تری از تحلیل حساسیت است که جواب بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری را بر اساس تغییرات پیوسته پارامترهای مدل تحت تاثیر زمان یا شرایط اقتصادی بررسی می‌کند. بنابراین در این روش جواب بهینه مدل بر اساس تغییرات مورد نظر در طول زمان تعیین و مورد تحلیل قرار می‌گیرد. فرض کنید که جواب بهینه اساسی برای یک مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری در دسترس است. به طور خاص، فن برنامه‌ریزی پارامتریک برای تغییرات زیر در مساله در نظر گرفته خواهد شد:

۱. تغییر در ضرایب متغیرهای تصمیم در تابع هدف $(\otimes c_j)$

۲. تغییر در مقادیر سمت راست $(\otimes b_i)$.

۳. تغییر همزمان برای ضرایب تابع هدف $(\otimes c_j)$ و مقادیر سمت راست $(\otimes b_i)$.

٤-١ برنامه‌ریزی پارامتریک برای ضریب متغیرهای تصمیم در تابع هدف $\left(\otimes c_j\right)$

بررسی تغیرات همزمان در سود و قیمت محصولات تحت تاثیر نرخ تورم و سایر نوسانات اقتصادی، یکی از کاربردهای فن برنامه‌ریزی پارامتریک برای $\left(\otimes c_j\right)$ می‌باشد. اگر نرخ تورم را با پارامتر λ مشخص کنیم. مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری پارامتریک برای ضریب متغیرهای تصمیم در تابع هدف $\left(\otimes c_j\right)$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$
\begin{aligned}
& Max \otimes z(\lambda) =_G \sum_{j=1}^{n}\left(\otimes c_j + \alpha_j \lambda\right) \otimes x_j \\
& s.t. \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \otimes a_{ij} \otimes x_j \leq_G \otimes b_i, \qquad i = 1,2,\ldots,m \\
& \qquad \otimes x_j \geq_G \otimes 0, \qquad\qquad j = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
\tag{8}
$$

α_jها مقادیر ثابت معرف آهنگ نسبی تغییر در ضرایب تابع هدف می باشند.

٤-١-١ الگوریتم برنامه‌ریزی پارامتریک برای ضریب متغیرهای تصمیم در تابع هدف $\left(\otimes c_j\right)$

۱. مساله را به روش سیمپلکس به ازای $\lambda = 0$ حل نمایید و جواب بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری را تعیین نمایید.

۲. مقادیر $\otimes \bar{c}_j(\lambda)$ ، $\otimes Z(\lambda)$ را با استفاده از روابط زیر محاسبه کنید.

$$\otimes \bar{c}_j(\lambda) = \otimes c_B \cdot \otimes \bar{p}_j - \otimes c_j(\lambda) \qquad , \qquad \otimes Z(\lambda) =_G \otimes c_B \otimes \bar{b}$$

تغییرات $\Delta \otimes c_j(\lambda) = \alpha_j \lambda$ را محاسبه کرده و وارد سطر صفر تابلوی بهینه سیمپلکس نمایید.

۳. دامنه مشترک تغییرات λ را به گونه‌ای تعیین کنید که تابلوی بهینه مدل بدون تغییر باقی بماند. سپس مقدار λ را بقدری اضافه کنید تا یکی از مقادیر متغیرهای غیر اساسی در سطر صفر منفی گردد.

۴. در صورتی که به ازای اولین شوک، ضریب یکی از متغیرهای غیر اساسی منفی گردد از آن به عنوان متغیر ورودی استفاده کنید و سپس مساله را به روش سیمپلکس اولیه حل نمایید و به گام سوم برگردید.

مثال۴-۱: مدل برنامه‌ریزی خطی خاکستری زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
& Max \otimes z =_G \otimes[0,2] \otimes x_1 + \otimes[2,4] \otimes x_2 + \otimes[1,3] \otimes x_3 \\
& s.t. \\
& \qquad \otimes x_1 + \otimes x_2 + 2 \otimes x_3 \leq_G \otimes[50,150] \\
& \qquad 2 \otimes x_1 + \otimes x_2 + 2 \otimes x_3 \leq_G \otimes[70,170] \\
& \qquad \otimes x_j \geq_G \otimes 0 \qquad j = 1,2,3
\end{aligned}
$$

فرض کنید در این مساله، سودآوری محصولات تحت تاثیر نرخ تورم و شرایط اقتصادی به فرم زیر در می‌آید.

$$Max \otimes z(\lambda) =_G \left(\otimes[۰,۲]+۲\lambda\right) \otimes x_۱ + \left(\otimes[۲,۴]+\lambda\right) \otimes x_۲ + \otimes[۱,۳] \otimes x_۳$$

s.t.

$$\otimes x_۱ + \otimes x_۲ + ۲ \otimes x_۳ \le_G \otimes[۵۰,۱۵۰]$$

$$۲\otimes x_۱ + \otimes x_۲ + ۲ \otimes x_۳ \le_G \otimes[۷۰,۱۷۰]$$

$$\otimes x_j \ge_G \otimes ۰ \qquad j = ۱,۲,۳$$

جواب بهینه مدل را تحت تاثیر λ در فاصله $[۰,+\infty)$ پیدا کنید.

مرحله اول: مساله را به روش سیمپلکس به ازای $\lambda = ۰$ حل کنید.

جدول٤. تابلوی اول سیمپلکس

متغیرهای اساسی	$\otimes z$	$\otimes x_۱$	$\otimes x_۲$	$\otimes x_۳$	$\otimes s_۱$	$\otimes s_۲$	مقادیر سمت راست
$\otimes z_۰$	$[۱,۱]$	$-[۰,۲]$	$-[۲,۴]$	$-[۱,۳]$	$[۰,۰]$	$[۰,۰]$	$[۰,۰]$
$\otimes s_۱$	۰	۱	۱	۲	۱	۰	$[۵۰,۱۵۰]$
$\otimes s_۲$	۰	۲	۱	۲	۰	۱	$[۷۰,۱۷۰]$

جدول٥. تابلوی بهینه سیمپلکس

متغیرهای اساسی	$\otimes z$	$\otimes x_۱$	$\otimes x_۲$	$\otimes x_۳$	$\otimes s_۱$	$\otimes s_۲$	مقادیر سمت راست
$\otimes z_۰$	$[۱,۱]$	$[۲,۲]$	۰	$[۳,۵]$	$[۲,۴]$	$[۰,۰]$	$[۱۰۰,۶۰۰]$
$\otimes x_2$	۰	۱	۱	۲	۱	۰	$[۵۰,۱۵۰]$
$\otimes s_۲$	۰	۱	۰	۰	-۱	۱	$[۲۰,۲۰]$

جواب بهینه به شرح زیر خواهد بود.

$$\otimes x_۱ = [۰,۰] \;,\; \otimes x_۲ = [۵۰,۱۵۰] \;,\; \otimes x_۳ = [۰,۰] \;,\; \otimes z = [۱۰۰,۶۰۰]$$

مرحله دوم: با استفاده از روابط بیان شده مقادیر $\otimes \bar{c}_j(\lambda)$ ، $\otimes Z(\lambda)$ را محاسبه کنید.

$$\otimes \bar{c}_{x_۱}(\lambda) = \otimes c_B \cdot \bar{p}_{x_۱} - c_{x_۱}(\lambda) = \left([۲,۴]+\lambda,۰\right)\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix} - \left([۰,۲]+۲\lambda\right) = [۲,۲] - \lambda$$

$$\otimes \bar{c}_{x_۳}(\lambda) = \otimes c_B \cdot \bar{p}_{x_۳} - c_{x_۳}(\lambda) = \left([۲,۴]+\lambda,۰\right)\begin{bmatrix}۲\\۰\end{bmatrix} - [۱,۳] = [۳,۵] + ۲\lambda$$

$$\otimes \bar{c}_{s_۱}(\lambda) = \otimes c_B \cdot \bar{p}_{s_۱} - c_{s_۱}(\lambda) = \left([۲,۴]+\lambda,۰\right)\begin{bmatrix}۱\\-۱\end{bmatrix} - [۰,۰] = [۲,۴] + \lambda$$

$$\otimes Z(\lambda) =_G \otimes c_B \otimes \bar{b}(\lambda) = \left([۲,۴]+\lambda,۰\right)\begin{bmatrix}[۵۰,۱۵۰]\\[۲۰,۲۰]\end{bmatrix} = [۱۰۰,۶۰۰] + [۵۰,۱۵۰]\lambda$$

اکنون مقادیر $\otimes \bar{c}_j(\lambda)$ ، $\otimes Z(\lambda)$ را به تابلوی بهینه جدول وارد کنید.

جدول۶. نتایج حاصل از اعمال تغییرات

متغیرهای اساسی	$\otimes z(\lambda)$	$\otimes x_۱$	$\otimes x_۲$	$\otimes x_۳$	$\otimes s_۱$	$\otimes s_۲$	مقادیر سمت راست
$\otimes z(\lambda)$	۱	$[۲,۲]-\lambda$	۰	$[۳,۵]+۲\lambda$	$[۲,۴]+\lambda$	۰	$[۱۰۰,۶۰۰]+[۵۰,۱۵۰]\lambda$
$\otimes x_۲$	۰	۱	۱	۲	۱	۰	$[۵۰,۱۵۰]$
$\otimes s_۲$	۰	۱	۰	۰	-۱	۱	$[۲۰,۲۰]$

جواب بهینه جدول فوق به صورت زیر می‌باشد.

$$\otimes x_1=[۰,۰]\ ,\ \otimes x_2=[۵۰,۱۵۰]\ ,\ \otimes x_3=[۰,۰]$$
$$\otimes z(\lambda)=[۱۰۰,۶۰۰]+[۵۰,۱۵۰]\lambda$$

مرحله سوم: دامنه مشترکت تغییرات λ را به گونه‌ای تعیین کنید که تابلوی بهینه مدل بدون تغییر باقی بماند.

$$\left.\begin{array}{l}\otimes\bar{c}_{x_۱}(\lambda)=[۲,۲]-\lambda\geq_G ۰\Rightarrow\lambda\leq_G[۲,۲]\\ \otimes\bar{c}_{x_۳}(\lambda)=[۳,۵]+۲\lambda\geq_G ۰\Rightarrow\lambda\geq_G[-۲/۵,-۱/۵]\\ \otimes\bar{c}_{s_۱}(\lambda)=[۲,۴]+\lambda\geq_G ۰\Rightarrow\lambda\geq_G[-۴,-۲]\end{array}\right\}\Rightarrow[-۲/۵,-۱/۵]\leq\lambda\leq[۲,۲]$$

به عبارت دیگر در این فاصله جدول بالا همچنان بهینه باقی می‌ماند.

با توجه به غیر منفی بودن λ (نرخ تورم)، خواهیم داشت:

$$۰\leq\lambda\leq[۲,۲]$$

تا زمانی که $۰\leq\lambda\leq[۲,۲]$ است جواب بهینه بدون تغییر باقی خواهد ماند. اگر مقدار λ بزرگتر از $[۲,۲]$ شود در این صورت، شرط بهینگی برای تابلوی فعلی نقض خواهد شد و متغیر غیر اساسی $\otimes x_۱$ که پس از بزرگ شدن λ داری ضریب منفی شده است به عنوان متغیر ورودی در مرحله بعد انتخاب می‌شود.

مرحله چهارم: با انتخاب متغیر غیر اساسی $\otimes x_۱$ به عنوان متغیر ورودی، مساله را به روش سیمپلکس حل کنید.

جدول۷. نتایج حاصل از افزایش λ به مقدار بیش از دامنه تعیین شده و تعیین متغیرهای اساسی جدید

متغیرهای اساسی	$\otimes z(\lambda)$	$\otimes x_۱$	$\otimes x_۲$	$\otimes x_۳$	$\otimes s_۱$	$\otimes s_۲$	مقادیر سمت راست
$\otimes z(\lambda)$	۱	۰	۰	$[۳,۵]+۲\lambda$	$[۴,۶]$	$-[۲,۲]+\lambda$	$[۶۰,۵۴۰]+[۷۰,۱۷۰]\lambda$
$\otimes x_۲$	۰	۰	۱	۲	۲	-۱	$[۳۰,۱۳۰]$
$\otimes x_۱$	۰	۱	۰	۰	-۱	۱	$[۲۰,۲۰]$

با برگشت به گام سوم، دامنه مشترکت تغییرات λ را به گونه‌ای تعیین کنید که تابلوی بهینه جدید مدل بدون تغییر باقی بماند.

$$\otimes\bar{c}_{x_۳}(\lambda)=[۳,۵]+۲\lambda\geq_G ۰\Rightarrow\lambda\geq_G[-۲/۵,-۱/۵]$$
$$\otimes\bar{c}_{s_۲}(\lambda)=-[۲,۲]+\lambda\geq_G ۰\Rightarrow\lambda\geq_G[۲,۲]$$

بنابراین دامنه مشترک λ به صورت زیر خواهد بود:

$$[۲,۲] \leq_G \lambda < +\infty$$

پس همواره به ازای $\lambda \geq_G [۲,۲]$ تابلوی ارائه شده بهینه باقی می‌ماند و جواب بهینه به ازای $\lambda \geq_G [۲,۲]$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\otimes x_۱ = [۲۰,۲۰] \ , \ \otimes x_۲ = [۳۰,۱۳۰] \ , \ \otimes x_۳ = [۰,۰]$$

$$\otimes z(\lambda) = [۶۰,۵۴۰] + [۷۰,۱۷۰]\lambda$$

بررسی نتایج مثال٤-۱:

وضعیت جواب‌ها تحت تاثیر λ در فاصله $[۰,+\infty)$ به شرح زیر می‌باشد.

اگر $0 \leq \lambda \leq [۲,۲]$ آنگاه جدول ۶ بهینه است.

اگر $[۲,۲] \leq_G \lambda < +\infty$ آنگاه جدول ۷ بهینه است.

٤-۲ برنامه‌ریزی پارامتریک برای مقادیر سمت راست $(\otimes b_i)$

از آنجاییکه شرایط اقتصادی و بحران‌های اجتماعی و همچنین توسعه تکنولوژی روی مقادیر منابع تاثیرگذار است. بررسی تغییرات بوجود آمده در منابع مستلزم طراحی مدل یا تحلیل حساسیت می‌باشد که اغلب دشوار و مستلزم صرف زمان و هزینه فراوانی می‌باشد بنابراین برای محاسبه اثر تغییر در مدل، طراحی یک مدل پارامتریک مناسب می‌باشد. برنامه‌ریزی پارامتریک برای مقادیر سمت راست $(\otimes b_i)$، ایجاد آمادگی برای مقابله با تغییرات منابع در برابر وقایع مختلف قبل از وقوع آن‌ها می‌باشد.

مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری پارامتریک برای مقادیر سمت راست $(\otimes b_i)$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned} & Max \otimes z =_G \sum_{j=۱}^{n} \otimes c_j \otimes x_j \\ & s.t. \\ & \sum_{j=۱}^{n} \otimes a_{ij} \otimes x_j \leq_G \otimes b_i + \alpha_i \lambda \qquad i = ۱,۲,...,m \\ & \otimes x_j \geq_G \otimes ۰ \qquad\qquad j = ۱,۲,...,n \end{aligned} \tag{۹}$$

هدف مشخص کردن جواب بهینه به عنوان تابعی از λ است.

٤-۲-۱ الگوریتم برنامه‌ریزی پارامتریک برای مقادیر سمت راست $(\otimes b_i)$

۱. مساله را به روش سیمپلکس به ازای $\lambda = ۰$ حل نمایید و جواب بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری را تعیین نمایید.

۲. مقادیر ، $\otimes \bar{b}(\lambda)$، $\otimes Z(\lambda)$ را با استفاده از روابط زیر محاسبه کنید.

$$\otimes\bar{b}(\lambda)=B^{-1}\cdot\otimes b(\lambda) \quad , \quad \otimes Z(\lambda)=_G \otimes c_B \otimes\bar{b}(\lambda)$$

تغییرات $\Delta\otimes b_i=\alpha_j\lambda$, $\otimes Z(\lambda)$ را محاسبه کرده و وارد تابلوی بهینه سیمپلکس نمایید.

۳. دامنه مشترک تغییرات λ را به گونه‌ای تعیین کنید که جواب بهینه بدست آمده در مرحله ۲ بدون تغییر باقی بماند. سپس مقدار λ را بقدری اضافه کنید تا یکی از مقادیر متغیرهای اساسی منفی گردد.

۴. متغیر اساسی که به ازای اولین شوک، مقدار آن منفی شد، در این مرحله به عنوان متغیر خروجی برای تکرار روش سیمپلکس ثانویه استفاده کنید و جواب بهینه جدید را بدست آورده و به مرحله ۳ برگردید. هرگاه نتوانیم متغیر ورودی را انتخاب کنیم به مرحله توقف رسیده‌ایم.

مثال ٤-۲: مدل برنامه‌ریزی خطی خاکستری زیر را با جواب بهینه آن در نظر بگیرید:

$$Max\otimes z=_G \otimes[۰,۲]\otimes x_۱+\otimes[۲,۴]\otimes x_۲+\otimes[۱,۳]\otimes x_۳$$

$s.t.$

$$\otimes x_۱+\otimes x_۲+۲\otimes x_۳\le_G\otimes[۵۰,۱۵۰]$$
$$۲\otimes x_۱+\otimes x_۲+۲\otimes x_۳\le_G\otimes[۷۰,۱۷۰]$$
$$\otimes x_j\ge_G\otimes ۰ \quad j=۱,۲,۳$$

فرض کنید مقادیر منابع در این مساله تحت شرایط اقتصادی و بحران‌های اجتماعی و همچنین توسعه تکنولوژی با گذشت زمان (λ) به فرم زیر در می‌آید.

$$Max\otimes z(\lambda)=_G \otimes[۰,۲]\otimes x_۱+\otimes[۲,۴]\otimes x_۲+\otimes[۱,۳]\otimes x_۳$$

$s.t.$

$$\otimes x_۱+\otimes x_۲+2\otimes x_۳\le_G\left(\otimes[۵۰,۱۵۰]+۲\lambda\right)$$
$$۲\otimes x_۱+\otimes x_۲+۲\otimes x_۳\le_G\left(\otimes[۷۰,۱۷۰]-۲\lambda\right)$$
$$\otimes x_j\ge_G\otimes ۰ \quad j=۱,۲,۳$$

جواب بهینه مدل را تحت تاثیر λ در فاصله $[۰,+\infty)$ پیدا کنید.

مرحله اول: مساله را به روش سیمپلکس به ازای $\lambda=۰$ حل کنید.

جواب بهینه به شرح زیر خواهد بود.

$$\otimes x_۱=[۰,۰] \ , \ \otimes x_۲=[۵۰,۱۵۰] \ , \ \otimes x_۳=[۰,۰] \quad , \quad \otimes z=[۱۰۰,۶۰۰]$$

مرحله دوم: با استفاده از روابط $\otimes\bar{b}(\lambda)=B^{-1}\cdot\otimes b(\lambda)$ و $\otimes Z(\lambda)=_G \otimes c_B \otimes\bar{b}(\lambda)$ ، تغییرات $\Delta\otimes b_i=\alpha_j\lambda$, $\otimes Z(\lambda)$ را محاسبه کرده و وارد تابلوی بهینه سیمپلکس نمایید.

$$\otimes\bar{b}(\lambda)=B^{-1}\cdot\otimes b(\lambda)=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[۵۰,۱۵۰]+۲\lambda\\ [۷۰,۱۷۰]-۲\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[۵۰,۱۵۰]+۲\lambda\\ [۲۰,۲۰]-۴\lambda\end{bmatrix}$$

$$\otimes Z(\lambda)=_G \otimes c_B \otimes\bar{b}(\lambda)=\left([۲,۴],۰\right)\begin{bmatrix}[۵۰,۱۵۰]+۲\lambda\\ [۲۰,۲۰]-۴\lambda\end{bmatrix}=[۱۰۰,۶۰۰]+[۴,۸]\lambda$$

جدول ۸. نتایج حاصل از اعمال تغییرات

متغیرهای اساسی	$\otimes z(\lambda)$	$\otimes x_1$	$\otimes x_2$	$\otimes x_3$	$\otimes s_1$	$\otimes s_2$	مقادیر سمت راست
$\otimes z(\lambda)$	۱	$[۲,۲]$	۰	$[۳,۵]$	$[۲,۴]$	۰	$[۱۰۰,۶۰۰]+[۴,۸]\lambda$
$\otimes x_2$	۰	۱	۱	۲	۱	۰	$[۵۰,۱۵۰]+۲\lambda$
$\otimes s_2$	۰	۱	۰	۰	-۱	۱	$[۲۰,۲۰]-۴\lambda$

مرحله سوم: دامنه مشترکت تغییرات λ را به گونه‌ای تعیین کنید که جواب بهینه به‌دست آمده موجه باشد.

$$\left.\begin{array}{l}\otimes\bar{b}_1(\lambda)=[۵۰,۱۵۰]+۲\lambda\geq_G ۰\Rightarrow\lambda\geq_G -[۲۵,۷۵]\\ \otimes\bar{b}_1(\lambda)=[۲۰,۲۰]-۴\lambda\geq_G ۰\Rightarrow\lambda\leq_G [۵,۵]\end{array}\right\}\Rightarrow -[۲۵,۷۵]\leq_G \lambda\leq_G [۵,۵]$$

به عبارت دیگر در این فاصله جدول بالا همچنان بهینه باقی می‌ماند .

با توجه به غیر منفی بودن λ (زمان)، خواهیم داشت:

$$۰\leq_G \lambda\leq_G [۵,۵]$$

تا زمانی که $۰\leq_G \lambda\leq_G [۵,۵]$ است جواب بهینه بدون تغییر باقی خواهد ماند. اگر مقدار λ بزرگ‌تر از $[۲,۲]$ شود در این صورت، متغیر اساسی $\otimes s_2$ داری مقدار منفی شده و جواب بهینه غیر موجه خواهد شد.

مرحله چهارم: متغیر اساسی $\otimes s_2$ که به ازای اولین شوک، مقدار آن منفی شد، در این مرحله به عنوان متغیر خروجی برای تکرار روش سیمپلکس ثانویه استفاده کنید و جواب بهینه جدید را بدست آورده و به مرحله ۳ برگردید.

جدول۹. نتایج حاصل از افزایش λ به مقدار بیش از دامنه تعیین شده و تعیین متغیرهای اساسی جدید

متغیرهای اساسی	$\otimes z(\lambda)$	$\otimes x_1$	$\otimes x_2$	$\otimes x_3$	$\otimes s_1$	$\otimes s_2$	مقادیر سمت راست
$\otimes z(\lambda)$	۱	$[۴,۶]$	۰	$[۳,۵]$	۰	$[۲,۴]$	$[۱۴۰,۶۸۰]-[۴,۸]\lambda$
$\otimes x_2$	۰	۲	۱	۲	۰	۱	$[۷۰,۱۷۰]-۲\lambda$
$\otimes s_1$	۰	-۱	۰	۰	۱	-۱	$-[۲۰,۲۰]+۴\lambda$

با برگشت به گام سوم، دامنه مشترکت تغییرات λ را به گونه‌ای تعیین کنید که جواب بهینه به‌دست آمده موجه باقی بماند.

$$\left.\begin{array}{l}\otimes\bar{b}_1(\lambda)=[۷۰,۱۷۰]-۲\lambda\geq_G ۰\Rightarrow\lambda\leq_G [۳۵,۸۵]\\ \otimes\bar{b}_2(\lambda)=-[۲۰,۲۰]+۴\lambda\geq_G ۰\Rightarrow\lambda\geq_G [۵,۵]\end{array}\right\}\Rightarrow [۵,۵]\leq_G \lambda\leq_G [۳۵,۸۵]$$

به عبارت دیگر؛ تا زمانی که $[۵,۵]\leq_G \lambda\leq_G [۳۵,۸۵]$ است جواب بهینه بدون تغییر باقی خواهد ماند. اگر مقدار λ بزرگتر از $[۳۵,۸۵]$ شود در این صورت، متغیر اساسی $\otimes x_2$ داری مقدار منفی شده و جواب بهینه غیر موجه

خواهد شد. بنابراین متغیر اساسی $\otimes x_{۲}$ به عنوان متغیر خروجی برای تکرار روش سیمپلکس ثانویه تعیین می‌شود. اما از آنجایی که همه عناصر موجود در سطر $\otimes x_{۲}$ غیر منفی هستند، امکان انتخاب متغیر ورودی وجود ندارد. پس به مرحله توقف رسیده‌ایم. به عبارت دیگر؛ به ازای $\lambda \geq_G [۳۵,۸۵]$ جواب امکان‌پذیری برای مدل وجود ندارد.

بررسی نتایج مثال٤-۲:

وضعیت جواب‌ها تحت تاثیر λ در فاصله $[\circ,+\infty)$ به شرح زیر می‌باشد.

اگر $\circ \leq_G \lambda \leq_G [۵,۵]$ آنگاه جدول ۸ بهینه است.

اگر $[۵,۵] \leq_G \lambda \leq_G [۳۵,۸۵]$ آنگاه جدول ۹ بهینه است.

اگر $\lambda \geq_G [۳۵,۸۵]$ آنگاه جواب امکان‌پذیری برای مدل وجود ندارد.

٤-۳ برنامه‌ریزی پارامتریک همزمان برای ضرایب تابع $(\otimes c_j)$ و مقادیر سمت راست $(\otimes b_i)$

در این بخش تغییرات همزمان $(\otimes c_j)$ و $(\otimes b_i)$ تحت تاثیر پارامتر λ (زمان با توجه به تغییرات شرایط اقتصادی یا تکنولوژیک) بررسی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری پارامتریک برای ضرایب تابع $(\otimes c_j)$ و مقادیر سمت راست $(\otimes b_i)$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \otimes z(\lambda) =_G \sum_{j=۱}^{n} \left(\otimes c_j + \alpha_j \lambda\right) \otimes x_j \\
&s.t. \\
&\sum_{j=۱}^{n} \otimes a_{ij} \otimes x_j \leq_G \otimes b_i + \alpha_i \lambda \qquad i = ۱,۲,\ldots,m \\
&\otimes x_j \geq_G \otimes \circ \qquad\qquad\qquad\qquad j = ۱,۲,\ldots,n
\end{aligned}
\tag{۱۰}
$$

هدف مشخص کردن جواب بهینه مدل تحت تاثیر پارامتر λ می‌باشد.

٤-۳-۱ الگوریتم برنامه ریزی پارامتریک همزمان برای ضرایب تابع $(\otimes c_j)$ و مقادیر سمت راست $(\otimes b_i)$

۱. مساله را به روش سیمپلکس به ازای $\lambda = \circ$ حل نمایید و جواب بهینه مساله را تعیین نمایید.

۲. مقادیر $\otimes \bar{c}_j(\lambda)$ ، $\otimes \bar{b}(\lambda)$، $\otimes Z(\lambda)$ را با استفاده از روابط زیر محاسبه کنید.

$$\otimes \bar{c}_j(\lambda) =_G \otimes c_B \cdot \otimes \bar{p}_j - \otimes c_j(\lambda)$$

$$\otimes \bar{b}(\lambda) =_G B^{-۱} \cdot \otimes b(\lambda)$$

$$\otimes Z(\lambda) =_G \otimes c_B \otimes \bar{b}(\lambda)$$

تغییرات $\Delta \otimes c_j(\lambda) = \alpha_j \lambda$, $\Delta \otimes b_i = \alpha_j \lambda$ را محاسبه کرده و وارد سطر صفر و مقادیر سمت راست تابلوی بهینه سیمپلکس نمایید.

۳. دامنه مشترک تغییرات λ را به گونهای تعیین کنید که تابلوی بهینه مدل بدون تغییر باقی بماند. سپس مقدار λ را بقدری اضافه کنید که یکی از مقادیر $\bar{c}$ یا $\bar{b}$ منفی گردد.

۴. در صورتی که به ازای اولین شوک یکی از عناصر $\bar{c}$ منفی گردد از آن به عنوان متغیر ورودی استفاده می کنیم ولی اگر چنانچه به ازای اولین شوک یکی از عناصر $\bar{b}$ منفی گردد از متغیر متناظر آن به عنوان متغیر خروجی استفاده نمایید و سپس در هر دو حالت مساله را به روش سیمپلکس اولیه یا ثانویه متناسب با نیاز حل نمایید و به گام سوم برگردید.

مثال ٤-۳: مدل برنامه‌ریزی خطی خاکستری زیر را در نظر بگیرید:

$$Max \otimes z =_G \otimes[۰,۲] \otimes x_۱ + \otimes[۲,۴] \otimes x_۲ + \otimes[۱,۳] \otimes x_۳$$

$$s.t.$$

$$\otimes x_۱ + \otimes x_۲ + ۲ \otimes x_۳ \leq_G \otimes[۵۰,۱۵۰]$$

$$۲\otimes x_۱ + \otimes x_۲ + ۲ \otimes x_۳ \leq_G \otimes[۷۰,۱۷۰]$$

$$\otimes x_j \geq_G \otimes ۰ \qquad j = ۱,۲,۳$$

فرض کنید در این مدل سودآوری محصولات و مقادیر منابع در دسترس تحت تاثیر λ (زمان) قرار می‌گیرند به طوری‌که مقدار تاثیر آن در مدل به شرح زیر می باشد.

$$Max \otimes z(\lambda) =_G \left(\otimes[۰,۲] + ۲\lambda\right) \otimes x_۱ + \left(\otimes[۲,۴] + \lambda\right) \otimes x_۲ + \otimes[۱,۳] \otimes x_۳$$

$$s.t.$$

$$\otimes x_۱ + \otimes x_۲ + ۲ \otimes x_۳ \leq_G \left(\otimes[۵۰,۱۵۰] + ۲\lambda\right)$$

$$۲\otimes x_۱ + \otimes x_۲ + ۲ \otimes x_۳ \leq_G \left(\otimes[۷۰,۱۷۰] - ۲\lambda\right)$$

$$\otimes x_j \geq_G \otimes ۰ \qquad j = ۱,۲,۳$$

جواب بهینه مدل را تحت تاثیر λ در فاصله $[۰,+\infty)$ پیدا کنید.

مرحله اول: مساله را به روش سیمپلکس به ازای $\lambda = ۰$ حل کنید.

جواب بهینه به شرح زیر خواهد بود.

$$\otimes x_۱ = [۰,۰] \ , \ \otimes x_۲ = [۵۰,۱۵۰] \ , \ \otimes x_۳ = [۰,۰] \ , \ \otimes z = [۱۰۰,۶۰۰]$$

مرحله دوم: با استفاده از روابط بیان شده مقادیر $\otimes\bar{c}_j(\lambda)$ ، $\otimes\bar{b}(\lambda)$، $\otimes Z^*(\lambda)$ و تغییرات $\Delta\otimes c_j(\lambda) = \alpha_j \lambda$, $\Delta\otimes b_i = \alpha_j \lambda$ را محاسبه کرده و وارد سطر صفر و مقادیر سمت راست تابلوی بهینه سیمپلکس نمایید.

$$\otimes\bar{c}_{x_1}(\lambda)=\otimes c_B\cdot\bar{p}_{x_1}-c_{x_1}(\lambda)=([2,4]+\lambda,0)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-([0,2]+2\lambda)=[2,2]-\lambda$$

$$\otimes\bar{c}_{x_3}(\lambda)=\otimes c_B\cdot\bar{p}_{x_3}-c_{x_3}(\lambda)=([2,4]+\lambda,0)\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}-[1,3]=[3,5]+2\lambda$$

$$\otimes\bar{c}_{s_1}(\lambda)=\otimes c_B\cdot\bar{p}_{s_1}-c_{s_1}(\lambda)=([2,4]+\lambda,0)\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}-[0,0]=[2,4]+\lambda$$

$$\otimes\bar{b}(\lambda)=B^{-1}\cdot\otimes b(\lambda)=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[50,150]+2\lambda\\[70,170]-2\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[50,150]+2\lambda\\[20,20]-4\lambda\end{bmatrix}$$

$$\otimes Z^*(\lambda)=_G\otimes c_B\otimes\bar{b}(\lambda)=([2,4]+\lambda,0)\begin{bmatrix}[50,150]+2\lambda\\[20,20]-4\lambda\end{bmatrix}=[100,600]+[54,158]\lambda+2\lambda^2$$

اکنون مقادیر $\otimes\bar{c}_j(\lambda)$ ، $\otimes\bar{b}(\lambda)$، $\otimes Z^*(\lambda)$ را به تابلوی بهینه جدول وارد کنید.

جدول ۱۰. نتایج حاصل از اعمال تغییرات

متغیرهای اساسی	$\otimes z(\lambda)$	$\otimes x_1$	$\otimes x_2$	$\otimes x_3$	$\otimes s_1$	$\otimes s_2$	مقادیر سمت راست
$\otimes z(\lambda)$	۱	$[2,2]-\lambda$	۰	$[3,5]$ $+2\lambda$	$[2,4]$ $+\lambda$	۰	$[100,600]+[54,158]\lambda$ $+2\lambda^2$
$\otimes x_2$	۰	۱	۱	۲	۱	۰	$[50,150]+2\lambda$
$\otimes s_2$	۰	۱	۰	۰	-1	۱	$[20,20]-4\lambda$

مرحله سوم: دامنه مشترکت تغییرات λ را به گونه‌ای تعیین کنید که تابلوی بهینه مدل بدون تغییر باقی بماند.

$$\otimes\bar{c}_{x_1}(\lambda)=[2,2]-\lambda\geq_G 0\Rightarrow\lambda\leq_G[2,2]$$

$$\otimes\bar{c}_{x_3}(\lambda)=[3,5]+2\lambda\geq_G 0\Rightarrow\lambda\geq_G[-2/5,-1/5]$$

$$\otimes\bar{c}_{s_1}(\lambda)=[2,4]+\lambda\geq_G 0\Rightarrow\lambda\geq_G[-4,-2]$$

$$\otimes\bar{b}_1(\lambda)=[50,150]+2\lambda\geq_G 0\Rightarrow\lambda\geq_G[-75,-25]$$

$$\otimes\bar{b}_2(\lambda)=[20,20]-4\lambda\geq_G 0\Rightarrow\lambda\leq_G[5,5]$$

بنابراین دامنه مشترک λ در فاصله $[-2/5,-1/5]$ و $[2,2]$ تعریف می‌شود. به عبارت دیگر در این فاصله جدول بالا همچنان بهینه باقی می‌ماند.

چون λ زمان فرض شد، دامنه منفی برای آن بی معنی خواهد بود. بنابراین خواهیم داشت:

$$0\leq_G\lambda\leq_G[2,2]$$

زمانی که مقدار λ بزرگتر از $[2,2]$ شود در این صورت، به ازای اولین شوک، متغیر غیر اساسی $\otimes x_1$ داری ضریب منفی شده و به عنوان متغیر ورودی در مرحله بعد انتخاب می‌شود.

مرحله چهارم: با انتخاب متغیر غیر اساسی $\otimes x_1$ به عنوان متغیر ورودی، مساله را به روش سیمپلکس معمولی حل کنید.

جدول۱۱. نتایج حاصل از افزایش λ به مقدار بیش از دامنه تعیین شده و تعیین متغیرهای اساسی جدید

متغیرهای اساسی	$\otimes z(\lambda)$	$\otimes x_1$	$\otimes x_2$	$\otimes x_3$	$\otimes s_1$	$\otimes s_2$	مقادیر سمت راست
$\otimes z(\lambda)$	۱	۰	۰	$[۳,۵]+۲\lambda$	$[۴,۶]$	$-[۲,۲]+\lambda$	$[۲۰,۵۲۰]+[۸۲,۱۸۶]\lambda-۲\lambda^2$
$\otimes x_2$	۰	۰	۱	۲	۲	-۱	$[۳۰,۱۳۰]+۶\lambda$
$\otimes x_1$	۰	۱	۰	۰	-۱	۱	$[۲۰,۲۰]-۴\lambda$

با برگشت به گام سوم، دامنه مشترکت تغییرات λ را به گونه‌ای تعیین کنید که جواب فوق بهینه باقی بماند.

$$\otimes\bar{c}_{x_3}(\lambda)=[۳,۵]+۲\lambda\geq_G ۰\Rightarrow\lambda\geq_G[-۲/۵,-۱/۵]$$

$$\otimes\bar{c}_{s_1}(\lambda)=[۴,۶]+۰\lambda\geq_G ۰\Rightarrow-\infty<_G\lambda<_G+\infty$$

$$\otimes\bar{c}_{s_2}(\lambda)=-[۲,۲]+\lambda\geq_G ۰\Rightarrow\lambda\geq_G[۲,۲]$$

$$\otimes\bar{b}_1(\lambda)=[۳۰,۱۳۰]+۶\lambda\geq_G ۰\Rightarrow\lambda\geq_G[-\tfrac{۱۳۰}{۶},-۵]$$

$$\otimes\bar{b}_2(\lambda)=[۲۰,۲۰]-۴\lambda\geq_G ۰\Rightarrow\lambda\leq_G[۵,۵]$$

بنابراین دامنه مشترک λ در فاصله $[۲,۲]$ و $[۵,۵]$ تعریف می‌شود. به عبارت دیگر در این فاصله جدول بالا همچنان بهینه باقی می‌ماند. زمانی که مقدار λ بزرگتر از $[۵,۵]$ شود شرط موجه بودن تابلوی بهینه نقض خواهد شد. در این صورت، به ازای اولین شوک، متغیر اساسی $\otimes x_1$ به عنوان متغیر خروجی و متغیر $\otimes s_1$ به عنوان متغیر ورودی انتخاب می‌شود. چون هدف مساله تعیین تغییرات $\otimes z(\lambda)$ به ازای $۰\leq\lambda<+\infty$ می‌باشد بنابراین با استفاده از سیمپلکس ثانویه تابلوی جدید را تشکیل دهید.

جدول۱۲. اصلاح تابلوی بهینه به ازای افزایش λ به مقدار بیش از دامنه تعیین شده و تعیین متغیرهای اساسی جدید

متغیرهای اساسی	$\otimes z(\lambda)$	$\otimes x_1$	$\otimes x_2$	$\otimes x_3$	$\otimes s_1$	$\otimes s_2$	مقادیر سمت راست
$\otimes z(\lambda)$	۱	$[۴,۶]$	۰	$[۳,۵]+۲\lambda$	۰	$[۲,۴]+\lambda$	$[۱۰۰,۶۴۰]+[۹۸,۱۳۰]\lambda-۲\lambda^2$
$\otimes x_2$	۰	۲	۱	۲	۰	۱	$[۷۰,۱۷۰]-۲\lambda$
$\otimes s_1$	۰	-۱	۰	۰	۱	-۱	$-[۲۰,۲۰]+۴\lambda$

دوباره دامنه مشترک تغییرات λ را به گونه‌ای تعیین کنید که جواب فوق بهینه باقی بماند.

$$\otimes\bar{c}_{x_1}(\lambda)=[۴,۶]+\circ\lambda \geq_G \circ \Rightarrow -\infty <_G \lambda <_G +\infty$$
$$\otimes\bar{c}_{x_2}(\lambda)=[۳,۵]+۲\lambda \geq_G \circ \Rightarrow \lambda \geq_G [-۲/۵,-۱/۵]$$
$$\otimes\bar{c}_{s_2}(\lambda)=[۲,۴]+\lambda \geq_G \circ \Rightarrow \lambda \geq_G -[۲,۴]$$
$$\otimes\bar{b}_1(\lambda)=[۷۰,۱۷۰]-۲\lambda \geq_G \circ \Rightarrow \lambda \leq_G [۳۵,۸۵]$$
$$\otimes\bar{b}_2(\lambda)=-[۲۰,۲۰]+۴\lambda \geq_G \circ \Rightarrow \lambda \geq_G [۵,۵]$$

بنابراین دامنه مشترک λ در فاصله $[۵,۵]$ و $[۳۵,۸۵]$ تعریف می‌شود. به عبارت دیگر در این فاصله جدول بالا همچنان بهینه باقی می‌ماند. زمانی که مقدار λ بزرگتر از $[۳۵,۸۵]$ شود شرط موجه بودن تابلوی بهینه نقض خواهد شد. در این صورت، به ازای اولین شوک، متغیر اساسی $\otimes x_2$ به عنوان متغیر خروجی انتخاب می‌شود.

چون هدف مساله تعیین تغییرات $\otimes z(\lambda)$ به ازای $\circ \leq \lambda < +\infty$ می‌باشد بنابراین با استفاده از سیمپلکس ثانویه باید تابلوی جدید را تشکیل شود. اما از آنجایی‌که کلیه عناصر موجود در ردیف $\otimes x_2$ غیر منفی هستند بنابراین امکان انتخاب متغیر ورودی وجود ندارد. بنابراین برای λ بزرگتر از $[۳۵,۸۵]$ جواب امکان پذیری وجود ندارد. و تغییرات مجاز λ در فاصله $[۵,۵]$ و $[۳۵,۸۵]$ می‌باشد.

بررسی نتایج مثال٤-۳:

وضعیت جواب‌ها تحت تاثیر λ در فاصله $[\circ,+\infty)$ به شرح زیر می‌باشد.

اگر $\circ \leq_G \lambda \leq_G [۲,۲]$ آنگاه جدول ۱۰ بهینه است.

اگر $[۲,۲] \leq_G \lambda \leq_G [۵,۵]$ آنگاه جدول ۱۱ بهینه است.

اگر $[۵,۵] \leq_G \lambda \leq_G [۳۵,۸۵]$ آنگاه جدول ۱۲ بهینه است.

اگر $\lambda \geq_G [۳۵,۸۵]$ آنگاه جواب امکان‌پذیری برای مدل وجود ندارد.

۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

عدم قطعیت یکی از ویژگی‌های جدایی ناپذیر و ذاتی مساله‌هایی است که در حوزه‌های اجتماعی، اقتصادی و غیره با آن‌ها مواجه می‌شویم. بنابراین، برای بهینه‌سازی مسایل دنیای واقعی که به دلیل دسترسی محدود به داده‌ها و حجم محدود اطلاعات بسیار نادقیق هستند از نظریه‌ی سیستم‌های خاکستری استفاده می‌شود. تحلیل حساسیت به بررسی تغییرات مجزا و منقطع پارامترهای مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری و تاثیر آن بر جواب بهینه بدست آمده می‌پردازد. اما از آنجاییکه بسیاری از تغییرات مدل برنامه‌ریزی خطی خاکستری با گذشت زمان تحت تاثیر عواملی مانند تورم، شرایط اقتصادی و غیره به‌طور مداوم و پیوسته اتفاق می‌افتد. بنابراین پارامترهای تشکیل‌دهنده مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری نیز تحت تاثیر پارامتر زمان به‌طور پیوسته تغییر خواهند کرد. در این مقاله، مفهوم برنامه‌ریزی پارامتری سنتی، که تغییرات پارامترها را در یک محدوده تعریف شده تجزیه و تحلیل می‌کند، را به برنامه‌ریزی پارامتری خاکستری گسترش دادیم و امکان تجزیه و تحلیل پارامترهایی را فراهم کردیم که خود به جای تخمین‌های نقطه‌ای، با فواصل نمایش داده می‌شوند. بنابراین، با استفاده از مفاهیم و قضایای نظریه سیستم‌های خاکستری، به تحلیل و بررسی پیوسته پارامترهای مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری در هر دامنه ممکن پرداخته شد

که به آن برنامه‌ریزی پارامتریک گفته می‌شود. برای این منظور سه حالت مختلف برنامه‌ریزی پارامتریک برای ضرایب متغیرهای تصمیم، برنامه‌ریزی پارامتریک برای مقادیر سمت راست و برنامه‌ریزی پارامتریک همزمان برای ضرایب متغیرهای تصمیم و مقادیر سمت راست مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری مورد بررسی قرار گرفت و تاثیر تغییرات پیوسته پارامترهای مدل در تمامی دامنه‌های ممکن بر جواب بهینه مدل تعیین شد.

در آینده می‌توان تحلیل همزمان و پیوسته تغییرات در مدل حمل و نقل را مورد بررسی قرار داد.

منابع

[1] Bevilacqua, M., Clarapica, F.E. and Glacchetta G., (2006). A fuzzy-QFD approach to supplier selection, J. Purch. Supply Manage, 12, 14–27.

[2] Liu, S.F., Forrest, J. and Yang, Y., (2013). Advances in grey systems research, J. Grey Syst, 25 (2), 1–18.

[3] Zimmermann, H.J., (1976). Description and optimization of fuzzy systems, Int. J. Gen. Syst, 2, 209–215.

[4] Deng, J.L., (1982). The control problems of grey systems, Syst. Control Lett, 1 (5), 288–294.

[5] Amirian, H. and Sahraeian, R., (2018). A hybrid integer grey programming for an integrated problem of project selection and scheduling with interval data, J. Ind. Prod. Eng, 35 (4), 199–213.

[6] Goodarzian, F., Abraham, A., Ghasemi, P., MascoloAS, M.D. and Nasseri S.H., (2021). Designing a green home healthcare network using grey flexible linear programming: heuristic approaches, J. Comp. Des. Eng, 8 (6), 1468–1498.

[7] Pourofoghi, F., Ardabili, J.S. and Darvishi, D., (2019). A new approach for finding an optimal solution for grey transportation problem, Nonlin. Anal. Eng. Sci, 10, 83–95.

[8] Pourofoghi, F. and Darvishi Salokolaei, D., (2024). A New Approach to Solving Grey Assignment Problems Using the Concept of Operators and Ranking of Grey Numbers, Operational Research and Its Applications, 21 (1), 93-106.

[9] Pourofoghi, F. and Darvishi, D., (2021). Applying Duality Results to Solve the Linear Programming Problems with Grey Parameters, Control and Optimization in Applied Mathematics (COAM), 5(1), 15-28.

[10] Pourofoghi, F. and Darvishi D., (2024). Solving Linear Fractional Programming Problems in Uncertain Environments: A Novel Approach with Grey Parameters, Control and Optimization in Applied Mathematics (COAM), 9(1). 169-183.

[11] Pourofoghi, F., (2022). Solving the problem of linear programming with cost coefficients and grey resources using the primal simplex algorithm, Big data and computing visions, 2(2), 80-89.

[12] Huang, G.H. and Moore, R.D., (1993). Grey linear programming, its solving approach and its application, Int. J.Syst. Sci, 24 (1), 159–172.

[13] Li, Q.X., Liu, S. and Wang, N.A., (2014). Covered solution for a grey linear program based on a general formula for the inverse of a grey matrix, Grey Syst., Theory Appl, 4 (1), 72–94.

[14] Liu, S.F., Dang Y. and Forrest, J., (2009). On positioned solution of linear programming with grey parameters, Int. Conf. Syst., Man, Cyber., USA, 751–756.

[15] Mahmoudi, A., Liu, S., Ahmed, J.S. and Abbasi, M., (2019). A novel method for solving linear programming with grey parameters, J, Int. Fuzzy Syst, 36, 161–172.

[16] Nasseri, S.H., Yazdani, A. and Darvishi, D., (2016). A primal simplex algorithm for solving linear programming problem with grey cost coefficients, J. New Res. Math, 1 (4), 115–135.

[17] Razavi Hajiagha, S.H., Akrami H. and Hashemi, S.S., (2012). A multiobjective programming approach to solve grey linear programming, Grey Syst.: Theory Appl, 2 (2), 259–271.

[18] Saffarardabili, J., Darvishi, D. and Pourofoghi, F., (2020). Application of center and width concepts to solving grey linear programming, International Journal of Applied and Computational Mathematics, 6 (49), 1–12.

[19] Voskoglouo, M.G., (2018). Solving linear programming problems with grey data, Oriental J. Phys. Sci, 3 (1), 17–23.

[20] Darvishi, D., Pourofoghi, F. and Forrest, J. Y., (2021). Sensitivity analysis of grey linear programming for optimization problems. Operations Research and Decisions, 31(4), 35-52.

[21] Fuller, R., (1980). On stability in fuzzy linear programming problems, Fuzzy Sets Syst, 30, 339–344.

[22] Gupta, P. and Bhatia, D., (2001). Sensitivity analysis in fuzzy multi-objective linear fractional programming problem, Fuzzy Sets Syst, 122, 229–236.

[23] Hamacher, H., Leberling, H. and Zimmermann, H.J., (1978). Sensitivity analysis in fuzzy linear programming, Fuzzy Sets Syst, 1, 269–281.
[24] Kheirfam, B. and Hasani, F., (2010). Sensitivity analysis for fuzzy linear programming problems with fuzzy variables, Adv. Model. Opt, 12, 257–272.
[25] Temelcan Ergenecosar, G., Gonce Kocken, H., Albayrak, I.and Sivri, M., (2025). Solution to the single parametric linear programming problems via simplex-based algorithms: handling the uncertainties in costs, left or right-hand sides, Croatian Operational Research Review, 17, 1-12.
[26] Nemesch, L., Ruzika, S., Thielen, C. and Wittmann, A., (2025). A survey of exact and approximation algorithms for linear-parametric optimization problems, Journal of Global Optimization ,93, 299–333.
[27] Li, Q.X. and Lin, Y., (2010). The basic architecture of grey system theory, Proc. Conf. Management in China, Lanzhou, China, 158–163.
[28] Liu, S.F., Forrest, J. and Yang, Y., (2013). Advances in grey systems research, J. Grey Syst, 25 (2), 1–18.
[29] Yin, M.S., (2013). Fifteen years of grey system theory research: A historical review and bibliometric analysis, Exp. Syst. Appl, 40, 2767–2775.
[30] Liu, S.F. and Lin, Y., (2006). Grey Information: Theory and Practical Applications, Springer.
[31] Aydemir, E., Yilmaz, G. and Oruc, K.O., (2020). A grey production planning model on a ready-mixed concrete plant, Eng. Opt, 52 (5), 817–831.
[32] Liu, S.F., Yang, Y. and Forrest, J., (2017). Grey Data Analysis, Springer, Singapore.
[33] Pourofoghi F., Darvishi, D. and Saffar Ardabili J. (2021). A New Approach to Finding the Answer of Transportation Problems with Grey Parameters", Operational Research and Its Applications, 18. 2, 59-73.
[34] Chen Z., Chen, Q., Chen, W. and Wang, Y., (2004). Grey linear programming, Kybernetes, 33 (2), 238–246.