مجله ریاضیات کاربردی واحد لاهیجان، سال هشتم، شماره ۲ (پیاپی ۲۹)، تابستان ۹۰، ص ص ۴۴-۲۹
شاپا ۶۰۸۳-۲۰۰۸

روشی برای رتبه بندی نمرات کارایی با استفاده از بوت استرپ

سعید عبادی *
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اردبیل، گروه ریاضی، اردبیل، ایران

رسید مقاله: ۸۹/۱۰/۲۸
پذیرش مقاله: ۹۰/۲/۱

چکیده

تعدادی از واحدهای تصمیم گیرنده که در مدل های DEA کارا ارزیابی می شوند دارای نمره ی کارایی یک هستند، پس هیچ تمایزی بین آن ها - از لحاظ تئوری – وجود ندارد. اغلب تصمیم گیرنده ها در صدد رتبه بندی کاملی از DMU ها هستند، تا بتوانند عملکرد آن ها را بهتر ارزیابی کنند و در جهت بهبود بیشتر پیش روند. تا به حال روش های مختلفی، برای رتبه بندی واحدهای کارا و ناکارا ارایه شده و مقالات زیادی در این زمینه منتشر یافته است. که برهر یک از این روش ها ایرادهایی وارد است و آن ها قادر به رتبه بندی تمامی DMU ها نیستند. روش بوت استرپ مطرح شده در این مقاله می تواند رتبه بندی تمامی واحدها را انجام دهد. روند بوت استرپ به عوض تحلیل تئوری از قدرت محاسباتی استفاده می کند. و برای بوت استرپ نمرات کارایی به طور ضمنی از برنامه ریزی خطی استفاده می کند. و به همین دلیل هیچکدام از مشکلات روش های قبلی را ندارد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، واحدهای تصمیم گیرنده، مجموعه ی امکان تولید، بوت استرپ.

۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده ها (DEA) شامل تکنیک ها و روش هایی برای ارزیابی کارایی و یا سنجش بهره وری واحدهای تصمیم گیرنده (DMU) است. به منظور ارزیابی علمی عملکرد واحدها و بخش ها، فعالیت های علمی زیادی صورت گرفته است. با توجه به تمایل رو به رشد تصمیم گیرنده ها و عوامل اجرایی به رتبه بندی کلی DMU ها، یک مجموعه ی جامع از روش های رتبه بندی و نتایج حاصل از مقایسه ی آن ها، می تواند نقش بسزایی در سرعت و دقت انتخاب مدیران و مجریان داشته باشد. به طوری که هر تصمیم گیرنده می تواند با توجه به فرایند جاری و واحدهای تحت ارزیابی، روشی از روش های رتبه بندی را طوری انتخاب کند که واحدهای مد نظر به صورت جامع تر و با دقت بیشتری متمایز شوند.

* عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: Said_ebadisharafabad@yahoo.com

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

تعریف رابطه ی عملکرد با روابط تاثیر گذار به ساخت تابعی با عنوان تابع تولید منجر شده که از ترکیب ورودی ها بیشترین خروجی ممکن را تولید می کند. واضح است که به دست آوردن تابعی که در تعریف بالا بگنجد، کار دشوار و در بسیاری از موارد غیر ممکن است. پس برای به دست آوردن تابع، آن را به روش های مختلف تقریب زدند. از جمله ی این روش ها می توان به روش های پارامتری و غیر پارامتری اشاره کرد. با پیشرفت تکنولوژی، روش های پارامتری در برخورد با مسایل موفق عمل نکرد. برای رفع مشکلات ناشی از روش های پارامتری، فارل در سال ۱۹۵۷ برای نخستین بار روش های غیر پارامتری را ابداع کرد.

DEA، در واقع تعمیم کار فارل در ابداع اولین روش غیر پارامتری است. فارل، با استفاده از ورودی ها و خروجی های واحد های تصمیم گیرنده و با استفاده از اصول حاکم بر آن ها، مجموعه ای با عنوان مجموعه ی امکان تولید را ارایه و قسمتی از مرز آن را تقریبی از تابع تولید خواند. این مرز را مرز کارا نیز می نامند و واحدهای تصمیم گیرنده ای که روی این مرز قرار می گیرند، کارا ارزیابی می شوند. از آنجائی که DEA تکنیک ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم گیرنده است، حداقل یکی از واحدها روی مرز و بقیه ی واحدها در زیر آن قرار دارند. نام تحلیل پوششی داده ها، از ویژگی پوششی بودن منشا گرفته است. این روش ها در مقایسه با بقیه روش های عملی قبلی، دارای مزیت هایی است که در ادامه به ذکر آن می پردازیم.

در روش های DEA بر خلاف بعضی از روش های عددی، مشخص بودن وزن ها از قبل و تخصیص آن ها به ورودی و خروجی داده ها لازم نیست، همچنین این روش ها، نیازی به اشکال تابعی از قبل مشخص شده (مانند روش رگرسیون های آماری) و یا شکل صریح تابع تولید (مانند برخی از روش های پارامتری) ندارند.

تحلیل پوششی داده ها، با استفاده از تکنیک برنامه ریزی ریاضی، می تواند تعداد زیادی از متغیرها و روابط را در بر گیرد و مشکلات روش هایی را که در استفاده از ورودی ها و خروجی ها با محدودیت مواجه اند را ندارد.

به علاوه بدنه ی وسیعی از فرضیه و تکنیک های در دسترس از برنامه ریزی ریاضی، می تواند به عنوان تحلیل ها و تعابیر راهنما و همچنین محاسبات تاثیر گذار استفاده شود.

همچنین DEA، فرصت های زیادی برای همکاری میان تحلیل گر و تصمیم گیرنده ایجاد می کند. این همکاری ها می تواند در راستای انتخاب ورودی و خروجی واحدهای تحت ارزیابی و چگونگی عملکرد و الگویابی نسبت به مرز کارا باشد.

۲ مدل های DEA و رتبه بندی

مجموعه ای به صورت $\{$ ورودی x خروجی y را تولید کند : $(y$ و $x) \}$ = T که در آن x بردار ورودی و y بردار خروجی است را مجموعه ی امکان تولید (PPS) می نامند. این تعریف با توجه به نوع تکنولوژی تولید متفاوت، PPS های مختلف را تولید می کنند.

اولین PPS که به مجموعه ی امکان تولید CCR معروف است در سال ۱۹۷۸ توسط چارنز و همکارانش [3] به صورت زیر تعریف شد:

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

$$
\begin{aligned}
&Min \quad \theta \\
&s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \theta x_{io} \qquad i = 1,2,...,m, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{ro} \qquad r = 1,2,...,s, \\
&\quad \lambda_j \ge 0 \qquad\qquad j = 1,2,...,n.
\end{aligned} \tag{۱}
$$

مدل دیگری که برای تحلیل و بررسی مفهوم کارایی در تحلیل پوششی داده ها، مورد استفاده قرار می گیرد، مدل جمعی است که توسط کوپر و همکاران [4] معرفی گردیده است. این مدل هم دارای ماهیت ورودی و هم دارای ماهیت خروجی است. در این مدل ماکزیمم فاصله ی واحد تصمیم گیرنده از مرز کارایی سنجیده می شود.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad z = \sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \\
&s.t \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io} \qquad i = 1,2,...,m, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro} \qquad r = 1,2,...,s, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
&\quad \lambda_j \ge 0 \qquad\qquad j = 1,2,...,n, \\
&\quad s_i^- \ge 0 \qquad\qquad i = 1,2,...,m, \\
&\quad s_r^+ \ge 0 \qquad\qquad r = 1,2,...,s.
\end{aligned} \tag{۲}
$$

این مدل، مدل جمعی BCC [2] است که با حذف قید $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ به مدل جمعی CCR تبدیل می شود. در مدل جمعی واحد تحت ارزیابی کاراست اگر و فقط اگر $z^* = 0$ که z^* مقدار بهینه ی تابع هدف را نشان می دهد.

مدل متغیر کمکی تعدیل یافته (SA) که توسط سوییشی و همکاران [18] در سال ۱۹۹۹ ارایه شد مبتنی بر اعمال محدودیت های وزنی بر روی بردارهای u و v می باشد:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}, \\
&s.t \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1, \\
&\quad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0, \qquad j = 1,2,...,n, \\
&\quad u_r \ge 1/((m+s)R_r^+), \qquad r = 1,2,...,s, \\
&\quad v_i \ge 1/((m+s)R_i^-), \qquad i = 1,2,...,m.
\end{aligned} \tag{۳}
$$

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

که در آن

$$R_r^+ = \text{Max}\{y_{rj}\} \qquad 1 \le j \le n, \qquad R_i^- = \text{Max}\{x_{ij}\} \qquad 1 \le j \le n$$

اندرسون و پیترسون [1] در سال ۱۹۹۳ مدل ابرکارایی را برای رتبه بندی واحدهای کارای راسی معرفی کردند، که به مدل AP مشهور است. آن ها جهت تعیین رتبه ی واحد تصمیم گیرنده ی (o)، آن را از مجموعه ی امکان تولید حذف کردند و مدل را برای باقیمانده ی DMU ها اجرا نمودند. مدل پیشنهادی آن ها برای رتبه بندی DMU_o چنین است:

$$\begin{aligned} Max \quad & z = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} \\ s.t \quad & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1, \\ & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0, \quad j = 1,2,...,n, \quad j \ne 0, \\ & u_r \ge \varepsilon, \qquad\qquad r = 1,2,...,s, \\ & v_i \ge \varepsilon, \qquad\qquad i = 1,2,...,m. \end{aligned} \qquad (۴)$$

مدل AP دارای مشکلات اساسی زیر است:

الف. اندرسون و پیترسون در مدل مربوط، مقدار تابع هدف را به عنوان رتبه ی همه ی واحدها در نظر گرفتند، بر خلاف اینکه هر واحد با وزن های مختلفی ارزیابی شده است. مقدار تابع هدف این مدل در واقع نسبت Max کارایی هر واحد را به نزدیکترین واحد حقیقی روی مرز جدید به دست می دهد.

ب. مدل AP در ماهیت ورودی برای DMUهای با ورودی های خاص، ممکن است نشدنی گردد. به این معنی که اگر در ارزیابی DMU_o، یکی از ورودی های آن صفر باشد مثلا $(x_{ko} = 0)$ و DMUی دیگری وجود نداشته باشد که ورودی kام آن صفر باشد، آنگاه مدل (۲,۲)، ممکن است نشدنی گردد. البته مدل AP در ماهیت خروجی همواره شدنی است.

ج. در بعضی از موارد ممکن است، تغییرات کوچکی در داده ها، تغییرات زیادی را در θ^* حاصل کند، البته این مشکل در ماهیت خروجی مدل رخ نمی دهد.

د. مدل ابر کارایی AP، در رتبه بندی واحدهای غیر راسی ناتوان است.

مدل رتبه بندی AP از اولین روش های رتبه بندی ارایه شده است که در این گروه جای می گیرد. این مدل در دو ماهیت ورودی و خروجی طراحی شده است که بر حسب نیاز به کار گرفته می شود. مدل AP در ماهیت ورودی، ممکن است برای بعضی از داده ها نشدنی شود، همچنین برای داده های نزدیک به صفر امکان ناپایداری در مدل وجود دارد، البته این مشکلات در ماهیت خروجی وجود ندارد. سادگی و راحتی استفاده از این مدل باعث شده که علی رغم ضعف ها و کمبودهایی که در این روش وجود دارد، کاربرد وسیعی در همه ی زمینه ها داشته باشد.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

مدل AP برای واحدهای تصمیم گیرنده ای که ورودی آن ها نزدیک به صفر است، رتبه بندی منطقی به دست نمی دهد و θ^* حاصله ممکن است بسیار بزرگ باشد. به این دلیل مدل AP در ماهیت ورودی و برای ساختار خاصی از داده ها نا پایدار است.

سوییشی [18] در سال ۱۹۹۹ کران های خاصی را بر روی وزن های ورودی و خروجی، در مدل ابر کارایی تعریف کرد. او همانند مدل های پیشین، واحد تصمیم گیرنده ی تحت ارزیابی را از مجموعه حذف نمود و مدل متغیر کمکی را برای بقیه ی واحد ها در نظر گرفت. مدل پیشنهادی سوییشی برای رتبه بندی واحدهای کارا به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad \theta-(\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{R_i^-}+\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^+}{R_r^+})/(m+s)\\
&s.t \qquad \sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n}\lambda_j x_{ij}+s_i^- = \theta x_{io}, \qquad i=1,2,...,m,\\
&\qquad \sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n}\lambda_j y_{rj}-s_r^+ = y_{ro}, \qquad r=1,2,...,s, \qquad (۵)\\
&\qquad \lambda_j \geq 0, \qquad j=1,2,...,n,\ j\neq o,\\
&\qquad s_r^+ \geq 0, \qquad r=1,2,...,s,\\
&\qquad s_i^- \geq 0, \qquad i=1,2,...,m.
\end{aligned}
$$

$$R_r^+ = \mathrm{Max}\{y_{rj}\}, \quad 1\leq j\leq n, \qquad R_i^- = \mathrm{Max}\{x_{ij}\}, \quad 1\leq j\leq n$$

مقدار تابع هدف مساله ی ۵ را با δ_o^* نشان می دهند و آن را به عنوان یک عدد نشانه در نظر می گیرند. در این مساله مشکل نشدنی بودن که در مدل AP مطرح بود، همچنان باقی است.

پس از آن سوییشی و همکاران، با اعمال محدودیت های وزنی بر روی وزن های ورودی و خروجی مدل ابر کارایی AP، بعضی از مشکلات ناشی از صفر شدن وزن ها را بر طرف کردند. این مدل که تحت عنوان مدل متغیر کمکی تعدیل یافته ارایه شد، این مدل هم مانند مدل قبل برای بعضی از داده ها نشدنی است. همچنین سوییشی برای رفع مشکلات ناشی از ناپایداری، عدد نشانه ی AIN را پیشنهاد کرد. این عدد همواره در بازه ی [1,2] قرار دارد.

روش بهبود خروجی نیز یک روش شعاعی است، که در جهت افزایش خروجی ها به کار می رود. این مدل بسیار شبیه به مدل AP در ماهیت خروجی است ولی در استفاده از ورودی ها انعطاف پذیری بیشتری دارد. این مدل برای انواع داده ها، شدنی و کراندار است. انعطاف پذیری مدل مذکور در استفاده از ورودی ها، توجه بسیاری از مدیران اجرایی را به خود جلب کرده است.

با توجه به مشکلات اساسی مدل AP، محرابیان و همکاران [16] در سال ۱۹۹۹ مدل دیگری را (که به مدل MAJ معروف است) جهت رتبه بندی DMUهای کارا مطرح کردند. در مدل AP حرکت به سوی مرز در

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

امتداد شعاعی صورت می گرفت که ممکن بود سطح پوششی PPS را قطع نکند. در این صورت مساله جواب شدنی ندارد. و یا ممکن بود در فاصله ی بسیار دور، سطح پوششی PPS را قطع نماید. که در این صورت نیز مساله ناپایدار می شد. در مدل ابر کارایی غیر شعاعی MAJ حرکت به سوی مرز در امتداد محورهای ورودی، در ماهیت ورودی و با قدم های مساوی انجام می شود. که مشکل ناپایداری را رفع می کند ولی مشکل نشدنی بودن برای بعضی داده ها، در این مدل همچنان وجود دارد.

برای برطرف کردن این مشکل، ساعتی و همکاران [17] در سال ۱۹۹۹ مدلی را پیشنهاد کردند که در آن کاهش ورودی ها همزمان با افزایش خروجی ها – با اندازه ی مساوی- DMUی تحت ارزیابی را روی مرز کارایی تصویر کند. این مدل همواره شدنی است.

در سال ۲۰۰۵ جهانشاهلو و همکاران [11] نشان دادند که تکنیک استفاده شده در مدل MAJ در جهت پایداری این مدل تحت تغییر واحد باعث بروز مشکلاتی در نتایج رتبه بندی می شود. اگر واحدهای کارا و در نتیجه مجموعه ی امکان تولید جدید در مدل مذکور ثابت بماند، اینطور انتظار می رود که نتایج حاصل از مدل رتبه بندی نیز ثابت باشد، اما در عمل اینطور نیست.

مشاهدات نشان می دهد که تغییر در ورودی بعضی از واحدهای ناکارا – جائیکه بقیه ی داده ها ثابت بماند– نتایج حاصل از رتبه بندی را تغییر می دهد. همچنین نرمالیزه کردن ورودی ها در مدل MAJ ، ممکن است باعث تغییر نتایج رتبه بندی در اثر تغییرات واحدهای ناکارا – اگر چه واحدهای کارا و PPS تغییر نکند– شود.

جهانشاهلو و همکاران [10] با شناخت و بررسی علل این مشکلات، تکنیک نرمال کردن را به گونه ای تغییر دادند که این ناپایداری را برطرف نمایند. آن ها در نرمال کردن، به جای استفاده از بیشینه ی ورودی ها در هر مولفه تحت عنوان R_i ، از Max ورودی های واحدهای کارا، تحت عنوان M_i استفاده کردند.

پس از آن با نسبت دادن وزن هایی به گام های ورودی و خروجی، مدل جامع JHF را ارایه کردند. این وزن ها بر اساس اهمیت گام های ورودی و خروجی، توسط مدیر تعیین می شود. تعیین وزن ها در نتایج رتبه بندی بسیار موثر است، با اختصاص دادن بردار وزنی خاص به ورودی ها و خروجی ها، این مدل به مدل های MAJ وMAJ اصلاح شده تبدیل می شود. مدل مذکور برای همه ی داده ها شدنی است. تابع هدف این مدل به تابع هزینه یا قیمت موسوم است و در فرایند اجرای مدل Min می شود.

پروفسور لی و همکاران [14] مدل ابر کارایی غیر شعاعی LJK را در سال ۲۰۰۷ مطرح کردند، این مدل نیز برای بعضی از داده ها نشدنی است. شرایط شدنی بودن مدل همانند مدل MAJ است. گام های ورودی در این روش بر خلاف مدل MAJ متغیر است، این انعطاف پذیری در تغییر ورودی ها، در بسیاری از موارد اقتصادی و مدیریتی حائز اهمیت است.

جهانشاهلو و همکاران [12] در سال ۲۰۰۴ مدل جدیدی را برای رتبه بندی واحدهای کارای راسی با استفاده از نرم یک ارایه نمودند که همانند بعضی از مدل های پیشین برای رتبه بندی واحدهای کارای غیر راسی پیشنهادی ندارد. در این مدل – همانند مدل ابر کارایی – واحد تحت ارزیابی از مجموعه ی امکان تولید حذف شده و مجموع انحرافات به صورت زیر کمینه می شود:

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

$$
\begin{aligned}
&Min \quad \Gamma_c^o(x,y) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - x_{io}| + \sum_{r=1}^{s} |y_r - y_{ro}| \\
&s.t \qquad \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq o}}^{n} \lambda_j x_{ij} \le x_i, \qquad i = 1,2,...,m, \\
&\qquad \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq o}}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_r, \qquad r = 1,2,...,s, \\
&\qquad \lambda_j \ge 0, \qquad j = 1,2,...,n, \quad j \neq o, \\
&\qquad y_r \ge 0, \qquad r = 1,2,...,s, \\
&\qquad x_i \ge 0, \qquad i = 1,2,...,m.
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

بار دیگر جهانشاهلو و همکاران [9] سعی کردند با استفاده از نرم چبیشف، قدر مطلق ماکزیمم انحرافات مولفه ای را Min کنند. و مدل پیشنهادی را به صورت زیر فرموله کردند:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad \left\| A - \overline{A} \right\|_{\infty} \\
&s.t. \qquad \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq o}}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \overline{x}_i, \qquad i = 1,2,...,m, \\
&\qquad \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq o}}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge \overline{y}_r, \qquad r = 1,2,...,s, \\
&\qquad \lambda_j \ge 0, \qquad j = 1,2,...,n, \quad j \neq o.
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

یکی از مشکلات مدل ابر کارایی، به دست آمدن مجموعه وزن های مجزا برای DMU های متفاوت است، که باعث می شود مقایسه ی درستی بین واحدهای تصمیم گیرنده انجام نگیرد و همچنین از نظر اقتصادی تعریف قابل قبولی ندارد. یکی از راههایی که برای رفع این مشکل پیشنهاد شده، روش رتبه بندی با مجموعه وزن های مشترک (CSW)است.

حسین زاده لطفی و همکاران [5] با توجه به این مساله که ناحیه ی شدنی همه ی این مسایل یکی است، مدلی را به صورت زیر ارایه کردند که در آن همه ی DMU توسط یک (v,u) منحصر به فرد ارزیابی شوند.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

$$Max \quad \left\{ \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r1}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i1}}, \ldots, \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rn}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{in}} \right\}$$

$$s.t \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1, \qquad j = 1,2,\ldots,n, \tag{۸}$$

$$u_r \ge \varepsilon, \qquad r = 1,2,\ldots,s,$$

$$v_i \ge \varepsilon, \qquad i = 1,2,\ldots,m.$$

در واقع در این مدل واحدها در بهترین شرایط ارزیابی نمی شوند و برای هر واحد یک مدل حل نمی شود.

در سال۲۰۰۵ جهانشاهلو و همکاران [11] روش دیگری برای یافتن مجموعه وزن های مشترک، در مدل های DEA به صورت زیر پیشنهاد کردند:

$$Max \quad \left\{ \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r1} + u_o}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i1}}, \ldots, \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rn} + u_o}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{in}} \right\}$$

$$s.t. \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + u_o}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1, \qquad j = 1,2,\ldots,n, \tag{۹}$$

$$u_r \ge \varepsilon, \qquad r = 1,2,\ldots,s,$$

$$v_i \ge \varepsilon, \qquad i = 1,2,\ldots,m.$$

در این مدل، روش تبدیل برنامه ریزی کسری چند هدفه به یک برنامه ریزی غیر خطی، متفاوت است.

یکی از جدیدترین مدل های رتبه بندی در غالب رتبه بندی با مجموعه وزن های مشترک CWA است که با وزن دار کردن مجموعه ی داده ها و تعیین فاصله از خط الگو، واحدها را از هم متمایز می کند. برای روشن تر شدن بیشتر مطلب به [15] رجوع کنید.

از مزیت های کاربردی این مدل – که در مسایل مشخص می شود – می توان موارد ذیل را ذکر کرد:

۱. این مدل واحدهایی با ورودی و خروجی های خیلی بزرگ را نیز رتبه بندی می کند.

۲. این مدل واحدهای تصمیم گیرنده ای که اندیس ورودی و خروجی آن ها از $n/2$ تجاوز می کند را نیز رتبه بندی می کند.

از مشکلات این روش به دست آمدن جواب های بهینه ی چند گانه است که منجر به نتایج رتبه بندی متفاوت می شود.

جهانشاهلو و همکاران [8] در سال ۲۰۰۸ با استفاده از روش شبیه سازی مونت کارلو، روشی را برای رتبه بندی

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

همه ی واحدهای کارا ارایه نمودند بر خلاف مشکلاتی که ممکن است در استفاده از این روش با آن مواجه شویم، به خاطر اینکه این روش در رتبه بندی واحدهای کارای غیر راسی موفق است، ارزشمند است.

جهانشاهلو و همکاران [6] در سال ۲۰۰۶، روش رتبه بندی مبتنی بر مرز کاملا ناکارا را ارایه کردند، در این روش با تعریف مرز کاملا ناکارا، به جای ارزیابی هر واحد تصمیم گیرنده نسبت به مرز کارا، فاصله ی آن را از مرز کاملا ناکارا محاسبه می شود. این فاصله هم از طریق شعاعی و هم غیر شعاعی قابل محاسبه است. در مقایسه ی این روش با مدل های رتبه بندی که تا به حال ارایه شده است، به نتایج زیر می رسیم:

- این مدل مشکلی در جهت جواب های بهینه ی چند گانه ندارد.
- مدل پیشنهادی همواره شدنی و پایدار است.
- این روش قادر به رتبه بندی واحدهای کارای غیر راسی است.
- در این روش واحدهایی با بدترین عملکرد (که در بعضی موارد مدیریتی و اقتصادی حائز اهمیت است) مشخص می شوند. دیگر برتری های این مدل، پایداری تحت انتقال است که به خاطر همین ویژگی، این مدل را می توان برای داده های صفر و منفی هم بکار برد.

مشکلی که این روش با آن مواجه است، واحدهایی هستند که روی فصل مشترک مرز کارا و ناکارا قرار دارند. این واحدها دارای بهترین ورودی (خروجی) در بعضی مولفه ها و بدترین ورودی (خروجی) در مولفه های دیگر هستند. این مدل نتایج قابل تحلیلی برای این مدل ها به دست نمی دهد.

اکثر روش هایی که مورد مطالعه قرار گرفته اند، مانند روش های ذکر شده و روش هایی که جهانشاهلو [7] و جی [13] اخیرا ارایه کردند مبتنی بر خاصیت غالب و مغلوب بودن واحدها عمل می کنند. و آن ها را در دو گروه کارا وناکارا تقسیم بندی و سپس به رتبه بندی واحدهای کارا می پردازند.

برخی از این روش ها، از تکنیک حذف DMU از مجموعه ی امکان تولید (PPS) و بررسی تغییرات دیگر DMU ها در PPS جدید استفاده می کنند. اینگونه روش ها به روش های ابر کارایی معروف است.

در این دسته، بعضی از روش ها، Min فاصله ی DMU ی حذف شده را از PPS جدید، معیاری برای رتبه ی آن واحد قرار می دهند. فاصله ی مذکور به روش های مختلف محاسبه می شود:

۱. روش های شعاعی: در این روش ها، فاصله ی DMU ی حذف شده، در امتداد شعاعی از مرز کارای PPS جدید، محاسبه می شود.

۲. روش های غیر شعاعی: در این روش ها، حرکت در جهت موازی محورهای ورودی و خروجی و به سوی مرز کارا است.

۳. استفاده از توابع نرم: در اینجا فاصله ی مذکور با استفاده از نرمهای مختلف اندازه گیری می شود.

بیشتر مدل هایی که در گروههای بالا جای می گیرند، قادر به رتبه بندی واحدهای کارای غیر راسی نیستند.

در کل اندازه گیری کارایی فنی فارل به دو روش محاسبه می شود یکی روش غیر پارامتری و غیر تصادفی است که بر اساس برنامه ریزی ریاضی پایه گذاری شده (CCR) و دیگری روش پارامتری و تصادفی است که روی تکنیک های اقتصادی بنا می شود. هر دو روند نواقصات مشترکی دارند وآن اینکه در هر روش معین کردن

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

نمرات کارایی دقیق آماری مشکل و یا غیر ممکن است. در مدل اقتصادی روش های غیر خطی زیادی برای محاسبه ی نمرات کارایی بکار برده می شود که اکثرا از روی تخمین مدل های پارامتری به دست می آیند. در روند برنامه ریزی ریاضی نیز از آنجایی که روش غیر پارامتری هست، توزیع نمرات کارایی نه شناخته شده است، و نه معین. در صورتی که مشاهده ی اندازه ی دقت آماری برای نمرات کارایی و حدود اطمینان آن ها برای تصمیم گیرنده خیلی مفید و سازنده است. حال نشان می دهیم که چگونه با استفاده از بوت استراپ می توان رتبه بندی نمرات کارایی تولید شده از روند برنامه ریزی خطی را انجام داد.

۳ روش بوت استرپ برای رتبه بندی

پشت پرده ی بوت استراپ بر این عقیده استوار است که از روی داده های اصلی، نمونه های جدید کاذب ایجاد می کند، تا توزیع نمونه را تخمین بزند. بوت استراپ به عوض تحلیل تئوری از قدرت محاسباتی استفاده می کند. برای بوت استراپ نمرات کارایی به طور ضمنی از برنامه ریزی خطی استفاده می کنیم. انگیزه ی استفاده ی ضمنی از برنامه ریزی خطی در این است که نمرات کارایی تولید شده از این طریق اندازه هایی نسبی هستند و چون مرز تابع تولید شناخته شده نیست، در عوض کارایی نسبت به بهترین نمونه ی مرزی به دست آمده، از داده های مشاهده شده، سنجیده می شود. و هر گونه تغییر در مشاهدات، متشابها مجموعه ی نمرات کارایی و در نتیجه مرز بهترین نمونه را تغییر می دهد. پس با استفاده از بوت استراپ می توان علاوه بر ساختن بازه های اطمینان، انحراف نمرات کارایی برنامه ریزی خطی، حدود مرز اقتصادی و یا مرز مجموعه ی امکان تولید را نیز به دست آورد. بوت استراپ یک روند غیر پارامتری برای نتایج آماری می باشد. و از آنجائیکه خودش شبیه روش برنامه ریزی خطی است لذا هیچگونه اعمال نفوذی روی قالب توزیع نمرات کارایی ندارد.

اگر $\{\rho_1^*,\rho_2^*,...,\rho_n^*\}$ مجموعه ی نمرات کارایی به دست آمده از حل مدل BCC فوق باشد، هدف به دست آوردن نمونه های بوت استراپ این نمرات کارایی، اندازه های دقت، چگونگی توزیع و رتبه بندی آن ها می باشد.

در این بحث نمرات کارایی به عنوان اندازه های ورودی اساسی مورد توجه قرار می گیرد و بوت استراپ روی نمرات کارایی اصلی اعمال می شود و فقط ورودیها هستند که در نمونه ی جدید تعدیل می شوند. در نمونه ی جدید، داده ها عبارتند از مقادیر خروجی اصلی برای همه n تا DMU و ورودیهای تعدیل شده ی تمام DMU ها به غیر از DMU ای که کارایی اش مورد بررسی است. (در این مورد ورودی اصلی را منظور می کنیم).

نمونه ی جدید از جابجایی n-1 نمره ی کارایی اصلی که از حل مدل BCC به دست آمده اند، حاصل می شود. به طوری که t امین نمره ی کارایی از مجموعه ی نمرات کارایی اصلی $P^* = \{\rho_1^*,...,\rho_t^*,...,\rho_n^*\}$ در جای خودش ثابت باقی می ماند. و مجموعه ی جدید نمرات کارایی $P^b = \{\rho_1^b,\rho_2^b,...,\rho_n^b\}$ که $\rho_j^b \in P^*$ $(j=1,...,n)$ برای ساختن یک تکنولوژی بازگشتی استفاده می شود. برای این منظور روند بوت استراپ را میتوان در چهار مرحله ی زیر اجرا کرد:

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

۱. حل مدل BCC برای ورودی و خروجی X و Y و به دست آوردن نمرات کارایی:

$$P^* = \{\rho_1^*,...,\rho_t^*,...,\rho_n^*\}$$

۲. تعدیل ماتریس ورودی X توسط ماتریس D به $X^* = D \times X$ (ماتریس D یک ماتریس قطری است که روی قطر اصلی آن به ترتیب نمرات کارایی اصلی قرار گرفته اند.)

۳. برای هر $DMU_t \quad (t = 1,2,...,n)$

الف. جابجایی $n-1$ نمره ی کارایی از مجموعه ی P^* و به دست آوردن نمونه ی جدید از نمرات کارایی به صورت $P_t(b) = \{\rho_1^b, \rho_2^b,..., \rho_t^*,..., \rho_n^b\}$ که $\rho_j^b \in P^*$ یعنی تمام ρ_j^b ها از نمرات کارایی به دست آمده از مرحله ی اول هستند و به غیر از t امین نمره ، بقیه جابجا شده اند.

ب. ساختن ماتریس ورودی جدید $X_t(b) = [D_t(b)]^{-1} \times X^*$ که در آن $D_t(b)$ یک ماتریس قطری $n \times n$ میباشد که روی قطر اصلی آن مقادیر نمرات کارایی بوت استراپ شده به ترتیب زیر قرار دارند:

$$\{\rho_1^b, \rho_2^b,..., \rho_t^*,..., \rho_n^b\}$$

طبیعی است که در نمونه ی جدید بعضی از DMU ها کارا و برخی دیگر نا کارا خواهد بود. و بردار ورودی tامین DMU همان بردار اولیه ی x^t می باشد، یعنی در مولفه ی tام $X_t(b)$ همان x^t را خواهیم داشت. زیرا عملیاتی که روی این مولفه انجام می شود به صورت زیر است:

$$(1/\rho_t^*).(\rho_t^*.x^t) = x^t$$

ج . کارایی تکنیکی t امین DMU را نسبت به نمونه ی جدید با متغیرهای $X_t(b)$ و y و با استفاده از مدل BCC محاسبه می کنیم. و نمره ی بوت استراپ شده ی $\rho_t^*(b)$ را به دست می آوریم. حال اگر مراحل الف تا ج را B بار تکرار کنیم نمرات کارایی بوت استراپ شده ی $\{\rho_t^*(1),...,\rho_t^*(B)\}$ برای tامین DMU به دست می آید.

۴. توزیع تجربی نمرات کارایی اصلی $\rho_t^* \quad t = 1,...,n;$ می تواند با استفاده از توزیع نمرات کارایی بوت استراپ شده ی $\rho_t^*(B) = \{\rho_t^*(1),...\rho_t^*(B)\} \quad t = 1,...,n;$ تخمین زده شود.

اگر فرض کنیم بزرگترین تعداد نمونه های جدید B باشد و کارایی نسبت به هر نتیجه تکنولوژی بازگشتی محاسبه شده باشد، توزیع تجربی برای نمرات کارایی، از نتایج B نمره ی کارایی ساخته میشود. در کل تعداد $B \times n$ تکنولوژی بازگشتی و همین تعداد نمره ی کارایی بوت استراپ شده در این روند داریم. پس از نمایش توزیع تجربی نمرات کارایی بوت استراپ شده ی برنامه ریزی خطی میتوان از آن برای ساختن بازه های اطمینان استفاده کرد. به این ترتیب که با مرتب کردن نمرات کارایی بوت استراپ شده و پیدا کردن صدک های مورد نظر، فاصله ی اطمینان صدکی برای آن نمره ی کارایی را به دست آورد. برای به دست آوردن میانگین و انحراف معیار نمرات کارایی بوت استراپ شده می توان از روش مونت کارلو استفاده کرد. همچنین برای به دست آوردن اریبی نمرات کارایی، میتوان اختلاف بین نمرات کارایی اصلی و میانگین بوت استراپ شده ی آن ها را محاسبه کرد. باافزایش B میتوان میانگین نمرات کارایی بوت استرپ شده را به صورت مجزا به دست آورد و این نمرات

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

کارایی غیر یکسان، رتبه های واحدها را ممکن می سازد.

٤ مثال های عددی

حال با اجرای مدل های مطرح شده، برای داده های خاص، نتایج حاصل را با روش بوت استرپ مقایسه می کنیم.

جدول ۱. داده های ۹ واحد تصمیم گیرنده

DMU_S	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
Input(I_1)	۱/۵	۲	۱/۲	۳	۰/۵	۲	۳	۳	۴
Input(I_2)	۲	۱	۱/۵	۰	۳	۳	۲/۵	۴	۱
Output(o_1)	۳	۱/۵	۲/۵	۴	۳	۴/۸	۳/۵	۴	۵
Output(o_2)	۱	۳	۵/۵	۱	۵/۵	۴	۳	۴	۵

جدول ۲. نتایج مدل های AP ، مدل بهبود خروجی، روش بوت استرپ

DMU_S	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
AP	۰/۸۴	۰/۷۲	۱/۵۶	۱/۳۱	۲/۷۸	۰/۹۶	۰/۵۹	۰/۵۶	۱/۰۶
ranking	–	–	۲	۳	۱	–	–	–	۴
IM*	۱/۶۷	۱/۸۳	۱/۰۰	۱/۲۵	۰/۹۸	۱/۰۴	۱/۴۳	۱/۲۵	۰/۸۸
ranking	–	–	۳	–	۲	–	–	–	۱
SA**	۰/۸۲	۰/۷۱	۱/۵۴	۰/۷۸	۲/۶۸	۰/۹۴	۰/۵۹	۰/۵۶	۱/۰۴
ranking	–	–	۲	۴	۱	۵	–	–	۳
BS***	–	–	۰/۸۵۹۴	۱	۰/۸۷۶۲	۰/۸۵۷۱	–	–	۰/۸۶۱۵
ranking	–	–	۴	۱	۲	۵	–	–	۳

جدول ۳. داده های ۷ واحد تصمیم گیری

DMU_S	A_1	A_2	A_3	B	C	D	E
Input(I_1)	۲	۰/۱	۰	۵	۱۰	۱۰	۲
Input(I_2)	۸	۸	۸	۵	۴	۶	۱۲
Output(o_1)	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۱
Output(o_2)	۲	۲	۲	۱	۱	۱	۲

جدول ٤. نتایج حاصل از مدل ها بر روی داده ها

DMU_S	CCR	SuperSBM(I)	MAJ	MMAJ*	JHF	LJK	BS
A_1	۱	۱/۲۵	۱/۲۸	۱/۱۵	۰/۰۴۱	۱/۱۷	۰/۸۳۱۶
A_2	۱	Indefinable	۱/۳۱	۱/۱۷	۰/۰۶۲	۱/۲۷	۰/۸۹۵۵
A_3	۱	۱۰/۷۵	۱/۳۱	۱/۱۷	۰/۰۶۱	۱/۲۶	۱

همان طور که از جدول بالا مشاهده می شود، مدل رتبه بندی SuperSBM(I) در ارزیابی واحد A_2 ناتوان است، همچنین مدل های MAJ وMAJ اصلاح شده رتبه ی یکسانی را برای A_2 و A_3 به دست می دهند. با اینکه مدل JHF واحدهای فوق را به صورت کامل رتبه بندی می کند، ولی با توجه به نوع وزن ها، ممکن است برای داده های بزرگ منجربه خطاهای عددی شود. مدل LJK با اینکه رتبه بندی را انجام می دهد ولی مقادیر

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

مربوط به A_1 و A_2 خیلی نزدیک به هم هستند و این پایداری مدل را زیر سوال می برد. برای داده های مذکور مدل BS بهترین عملکرد را از خود نشان می دهد، این مدل با به دست دادن نمرات کارایی متمایز، واحدهای تصمیم گیرنده را به طور کامل رتبه بندی می کند.

مثالی برای مقایسه ی مدل های نرم یک، نرم بینهایت، مدل غیر شعاعی MAJ ، مدل شعاعی AP و روش بوت استرپ (BS) با داده های زیر را در نظر می گیریم:

جدول ۵. داده های ۶ واحد تصمیم گیری

DMU_S	۱	۲	۳	۴	۵	۶
I_1	۱۳	۶	۲	۱	۹	۴
I_2	۱	۳	۶	۱۰	۵	۸
O	۱	۱	۱	۱	۱	۱

همان طور که مشاهده می شود، واحدهای تصمیم گیرنده ی جدول بالا با دو ورودی مجزا، خروجی یکسان یک را تولید می کنند.

جدول ٦. نتایج رتبه بندی

DMU_S	۱	۲	۳	۴	۵	۶
L_1	۰/۲۰	۰/۱۲	۰/۱۴	۰/۰۷	inefficient	inefficient
ranking	۱	۳	۲	۴	–	–
L_∞	۰/۱۵	۰/۰۵	۰/۰۷	۰/۰۷	inefficient	inefficient
ranking	۱	۴	۳	۲	–	–
MAJ	۱/۲۰	۱/۰۷	۱/۰۹	۱/۰۸	inefficient	inefficient
ranking	۱	۴	۲	۳	–	–
AP	۲/۹۹	۱/۲۱	۱/۲۹	۱/۹۹	inefficient	inefficient
ranking	۱	۴	۳	۲	–	–
BS	۱	۰/۹۵۳۰	۰/۹۶۷۶	۰/۹۵۳۲	inefficient	inefficient
ranking	۱	۴	۳	۲	–	–

جالب اینکه رتبه بندی روش بوت استرپ و AP دقیقا یکسان هستند.

جدول ۷. داده های ۷ واحد تصمیم گیری

DMU_S	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
Input(I_1)	۱۶۲۱	۲۷۱۸	۱۵۲۳	۵۵۱۴	۱۹۴۱	۱۴۹۶	۹۳۲	۲۰۱۳	۱۸۹۱	۲۲۷۷	۱۹۹۵
Input(I_2)	۴۳۶	۳۱۴	۳۴۵	۱۳۱۴	۵۰۷	۳۲۱	۱۵۸	۱۰۳۷	۹۷۶	۸۹۱	۶۹۳
Input(I_3)	۲۰۵	۲۲۱	۲۱۵	۵۵۳	۳۰۹	۳۳۹	۲۰۰	۴۱۲	۳۹۹	۴۱۸	۳۴۹
Output(o_1)	۱۷۴	۱۷۲	۱۶۰	۴۸۷	۲۲۰	۱۰۹	۳۷	۱۹۸	۱۹۱	۲۴۱	۱۶۷
Output(o_2)	۴۹۷	۴۹۷	۴۴۳	۱۹۲۵	۵۲۱	۶۹۹	۴۳۱	۴۷۱	۴۹۱	۳۷۹	۴۱۲
Output(o_3)	۲۲	۲۲	۲۲	۶۳	۳۶	۳۸	۱۹	۳۲	۲۲	۲۸	۳۱

روش های رتبه بندی با مجموعه وزن های مشترک را با روش بوت استرپ مقایسه می کنیم:

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

جدول ۸. روش رتبه بندی با مجموعه وزن های مشترک با روش بوت استرپ

DMU_S	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
$Efficiency\ (\theta^*)$	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰/۸۷	۰/۹۱	۰/۹۳	۰/۷۹
CSW_1	۰/۹۷	۰/۸۴	۰/۹۸	۱	۱	۱	۰/۸۶	۰/۶۲	۰/۵۷	۰/۶۴	۰/۶۹
ranking	۳	۵	۲	۱	۱	۱	۴	۸	۹	۷	۶
CSW_2	۱/۲۹	۰/۷۱	۱/۳۵	۰/۸۷	۱/۲۹	۰/۸۵	۰/۷۱	۰/۷۱	۰/۷۱	۰/۷۷	۰/۷۲
ranking	۲	۷	۱	۳	۲	۴	۷	۷	۷	۵	۶
CSWA	۱	۰/۶۹	۰/۹۹	۰/۹۷	۱	۱	۰/۸۲	۰/۷۲	۰/۷۳	۰/۷۴	۰/۷۱
ranking	۱	۱۱	۴	۵	۳	۲	۶	۷	۸	۹	۱۰
AP	۱/۰۸	۱/۲۰	۱/۰۷	۱/۴۴	۱/۱۴	۱/۲۷	۱/۲۵	۰/۸۷	۰/۹۱	۰/۹۳	۰/۷۹
ranking	۶	۴	۷	۱	۵	۲	۳	–	–	–	–
BS	۰/۹۷۶۹	۰/۹۹۷۰	۰/۹۷۲۱	۱	۰/۹۸۳۲	۰/۹۹۹۰	۰/۹۹۸۴	–	–	–	–
ranking	۶	۴	۷	۱	۵	۲	۳	–	–	–	–

همان طور که از نتایج مدل CWA برمی آید، بعضی از واحدهای ناکارا دارای رتبه ی بالاتری نسبت به واحدهای کارا هستند، اینگونه واحدها، هر چند ممکن است در مولفه هایی از ورودی (خروجی) دارای کمترین (بیشترین) مقدار باشند، ولی در عمل، در سطح واحدهای ناکارا و یا حتی کمتر از آن ها بازدهی دارند. در صورتی که چنین مشکلی در روش بوت استرپ وجود ندارد و نتایج رتبه بندی حاصل از روش بوت استرپ و AP دقیقا یکسان هستند.

با استفاده از داده های زیر روش بوت استرپ (BS)، را با مدل های AP، MAJ، و مدل مونت کارلو مقایسه می کنیم:

جدول ۹. داده ها

DMU_S	A	B	C	D	E	F
Input	۱	۳	۴	۹	۳	۶
Output	۱	۳	۴	۷	۲	۵

جدول ۱۰. رتبه بندی بر روی داده های جدول ۹

DMU_S	A	B	C	D	E	F
AP	۲/۲۹	۱/۰۰	۱/۱۳	۱/۰۰	۰/۶۷	۰/۹۴
ranking	۱	۳	۲	۳	–	–
MAJ	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۰/۷۸	۰/۸۹	۰/۸۹
ranking	۱	۱	۱	–	–	–
Montcarlo(N_H)	۱۴۲۰	۷۱۶۸	۱۴۲۰۱	۲۸۵۰۴	Inefficient	Inefficient
ranking	۴	۳	۲	۱	–	–
BS	۰/۷۹۳۰	۰/۷۷۹۱	۰/۷۸۷۶۱	Inefficient	Inefficient	Inefficient
ranking	۱	۳	۲	–	–	–

روشن است که در این مثال روش MAJ قادر به رتبه بندی نیست. و نتایج حاصل از روش بوت استرپ و AP

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

دقیقا یکسان هستند.

۵ نتیجه گیری

روش های رتبه بندی مطرح شده در این مقاله معایب و محاسنی داشتند که به طور خلاصه در ذیل می آوریم. مدل AP کمکی برای رتبه بندی واحدهای کارای غیر راسی نمی نماید. در ماهیت ورودی برای DMUهای با ورودی های خاص، ممکن است نشدنی گردد و همچنین در بعضی از موارد ممکن است، تغییرات کوچکی در داده ها، تغییرات زیادی را در θ^* حاصل کند. در این مدل حرکت به سوی مرز در امتداد شعاعی صورت می گرفت که ممکن بود سطح پوششی PPS را قطع نکند. در این صورت مساله جواب شدنی ندارد و یا ممکن است در فاصله ی بسیار دور، سطح پوششی PPS را قطع نماید. در این صورت مساله ناپایدار خواهد بود.

در مدل MAJ حرکت به سوی مرز در امتداد محورهای ورودی –در ماهیت ورودی- و با قدم های مساوی انجام می شود. ممکن است در بعضی حالات مدل MAJ نشدنی شود. و این مدل نیز برای واحدهای کارای غیر راسی پیشنهادی نمی دهد.

مدل SBM هم برای واحدهای کارای غیر راسی پیشنهادی ندارد. از مهمترین خصوصیت این مدل آن است که اندازه ی ابر کارایی δ^* نسبت به تغییر واحد پایدار است.

مدل LJK هم در ارزیابی عملکرد واحد های تصمیم گیرنده در مقابل تغییر واحد پایدار است. مانند مدل های نرم یک نرم بینهایت و بقیه مدل ها برای رتبه بندی واحدهای کارای غیر راسی پیشنهادی ندارد. در صورتی که روش بوت استرپ مطرح شده در این مقاله می تواند رتبه بندی واحدهای کارای راسی و غیر راسی را انجام دهد. روند بوت استرپ به عوض تحلیل تئوری از قدرت محاسباتی استفاده می کند. برای بوت استرپ نمرات کارایی به طور ضمنی از برنامه ریزی خطی استفاده می کند. و به همین دلیل هیچکدام از مشکلات روش های قبلی را ندارد. تنها ایرادی که می توان به این روش گرفت آن است که حجم محاسبات خیلی زیاد است، که این نیز به کمک کامپیوترهای پر سرعت قابل رفع می باشد.

منابع

[1] Anderson P., Peterson N. C., (1993), *A pdrocedure for ranking efficient units in data envelopment analysis*. Management science. 39 (10), 1261-1264.

[2] Banker R. D., Charnse A., Cooper, W. W., (1984). *Models for the estimation of thechnical and scale inefficiencies in data envelopment analysis*. Management science. 30, 1078-1092.

[3] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes E., (1978). *Measuring the efficiency of desicio making units*. European Journal of Operation Research. 2, 429-444.

[4] Cooper, W. W., Park, K. S., Pastor J.T., (1999). *RAM: a range adjusted measure of inefficiency for use with additive woodless, and relations to other models and measures in DEA*. Journal of Productivity Analysis. 11, 5-24.

[5] Hosseinzadeh Lotfi, F., Jahanshahloo, G.R., Memariani, A., (2000). *A method for finding common set of weights by multiple objective programming in data envelopment analysis*. South West jurnal of pure and applied mathematics. 1, 44-54.

[6] Jahanshahloo, G.R., Afzalinejad, M., (2006). *A ranking method based on a full inefficient frontier"*. Applied Mathematical modeling. 30, 248-260.

[7] Jahnshahloo, G.R., Hosseinzadeh Lotfi, F., Rezaie, V., Khanmohamadi M., (2011). *Ranking DMUs by ideal points with interval data in DEA*. Applied Mathematical Modeling. 35, 218-229.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]

[8] Jahanshahloo, G.R., Hosseinzadeh Lotfi, F., Rezai Balf F., Zhiani Rezai H., (2008). *Using mont carlo method for ranking efficient units"*. Applied Mathematics and Computation. 201, 613-620.
[9] Jahanshahloo G. R., Hosseinzadeh Lotfi, F., Rezai Balf F., Zhiani Rezai, H., Akbarian D. (2004). *Ranking efficient DMUs using tchebycheff norm.* Working Paper.
[10] Jahanshahloo, G. R., Hosseinzadeh Lotfi, F., Sanaei, M., Fallah Jelodar, M., (2008). *Review of ranking models in the data envelopment analysis ".* Appplied Mathematical Sciences, Vol. 2, no. 29, 1431-1448.
[11] Jahanshahloo, G. R., Memariani, A., Hosseinzadeh Lotfi, F., Rezai, H. Z., (2005). *A note on som DEA models and finding efficiency and complete ranking using common set of weights.* Applied Mathematics and Compiotation. 166, 265-281.
[12] Jahanshahloo, G. R., Hosseinzadeh Lotfi, F., Shoja, N., Tohidi, G., Razavian, S. (2004). *Ranking using l1-norm in data envelopment analysis*. Applied Mathematics and Compotation. 153, 215-224.
[13] Jie W., Feng Y., Liang L., (2010). *A modified complete ranking of DMUs using restrections in DEA models*. Applied Mathematcsand ComputationI. 217, 745-751.
[14] Li S., Jahanshahloo, G. R., Khodabakhshi, M. (2007). *A super-efficiency model for ranking units in data envelopment analysis*. Applied Mathematics and Computation. 184, 638-648.
[15] Liu, F-H-F., Peng, H -H. (2006). *Ranking of units on the DEA frontier with common weights.* Computers and operations Research. 35 (5), 1624-1637.
[16] Mehrabian, S., Alirezaee, M. R., Jahanshahloo, G. R., (2002)*," A complete efficiency ranking of decision making units in data envelopment analysis*. Computational optimization and application 4, 261-266.
[17] Saati, M. S., Zarafat Angiz, M., Jahanshahloo, G. R., (1999). *A model for ranking decision making units in data envelopment analysis.* Recrca Oprerativa vol.31, no 97, 47-59.
[18] Sueyoshy, T., (1999). *DEA nonparametric ranking test and index measurment: Slack Adjusted DEA and an application to Jpanese agriculture cooperative.* Omega, INT .J. MGMT. SCI 27, 315-326.

[Downloaded from jorlu.ir on 2026-11-29]