

# روش مستقل از معکوس وزن دار برای حل معادله مقدار ویژه تعمیم یافته

مرتضی کاردل<sup>۱</sup>، امیرحسین رفاهی شیخانی<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup>دانشگاه آزاد اسلامی، واحد زابل، گروه ریاضی، زابل، ایران  
<sup>۲</sup>دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لاهیجان، گروه ریاضی، لاهیجان، ایران

رسید مقاله: ۸۹/۳/۲۹

پذیرش مقاله: ۸۹/۱۰/۱۵

## چکیده

روش های زیادی برای حل معادله مقدار ویژه تعمیم یافته وجود دارد. برخی از روش ها کمتر از سطح انتظار مقادیر ویژه را تعیین می کنند و برخی دیگر بیش از تعداد مورد نیاز، مقادیر ویژه را محاسبه می کنند. در این مقاله به بیان روش مستقل از معکوس برای محاسبه مقدار ویژه تعمیم یافته پرداخته و با استفاده از روش های تصویرسازی و ترکیب آن ها با الگوریتم مستقل از معکوس دو روش جدید برای محاسبه مقادیر ویژه ارائه می دهیم. کارآیی این الگوریتم ها را با حل مثال های عددی نشان دادیم. نتایج نشان می دهند که روش های جدید از سرعت و دقت خوبی برخوردارند.

**کلمات کلیدی:** متقارن، مقدار ویژه، زیرفضای کرلیف، وزن دار.

## ۱ مقدمه

مساله مقدار ویژه تعمیم یافته برای ماتریس های مربعی  $A$  و  $B$  که حل معادله  $AX = \lambda BX$  است، یک موضوع متمرکز در جبر خطی عددی می باشد. محاسبه مقادیر ویژه از طریق حل صریح معادله مفسر  $\det(A - \lambda B) = 0$  به جز در موارد ویژه راه حل خوبی نمی باشد، چون که ضرایب معادله مفسر را نمی توان از طریق محاسبه دترمینان با روش های پایدار عددی محاسبه نمود. لذا حتی اگر معادله مفسر به طور دقیق تعیین شود، آن گاه محاسبه ریشه های آن با دقت زیاد ممکن است از ناپایداری بالایی برخوردار باشد. این مطلب هنگامی بیشتر نمود پیدا می کند که ماتریس های مربعی از نظر بعد بزرگ باشند. برخی از روش ها مانند روش تکرار خارج قسمت رایلی، کمتر از سطح انتظار مقادیر ویژه را تعیین می کنند و برخی دیگر مانند روش تکراری  $QZ$  بیش از تعداد مورد نیاز، مقادیر ویژه را محاسبه می کنند.

\*عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: ah\_refahi@yahoo.com

اما روش های ارایه شده در این مقاله این امکان را فراهم می سازد تا دقیقاً به تعداد مورد نیاز مقادیر ویژه را محاسبه نماییم. این کار علاوه بر افزایش دقت، هزینه و زمان محاسبات را کاهش می دهد. برای این منظور روش های تصویرسازی که از آن جمله روش لانزوس می باشد را بیان می کنیم. این روش زوج مربعی  $(A, B)$  را که از مرتبه  $n$  می باشد را با یک زوج مربعی از مرتبه  $m$  ( $m \leq n$ )، متشابه می سازد. این روش ها از این نظر حایز اهمیت هستند که در عمل ما به تمام مقادیر ویژه تعمیم یافته زوج  $(A, B)$  نیاز نداریم. بلکه فقط تعداد مشخصی از مقادیر ویژه مورد نظر است.

**تعریف ۱** فرض کنید  $A$  و  $B$  دو ماتریس  $n \times n$  باشند. عدد  $\lambda \in \mathbb{C}$  را یک مقدار ویژه تعمیم یافته زوج  $(A, B)$  می نامیم، هر گاه بردار  $x \neq 0$  یافت شود به طوری که  $AX = \lambda BX$ . بردار  $X$  بردار ویژه تعمیم یافته زوج  $(A, B)$  نامیده می شود.

مجموعه همه مقادیر ویژه طیف نامیده می شود.

$$AX = \lambda BX \rightarrow (A - \lambda B)X = 0 \quad \text{و} \quad X \neq 0$$

$$\det(A - \lambda B) = 0 \rightarrow (-1)^n \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0 \leftarrow (A, B)$$

بنابراین مقادیر ویژه زوج  $(A, B)$  ریشه های چند جمله ای مشخصه زوج  $(A, B)$  می باشند.

## ۲ روش مستقل از معکوس با استفاده از زیر فضای کرلیف

در این روش با یک زیر فضای کرلیف متغیر که در هر تکرار تغییر می کند به دنبال کوچکترین (بزرگترین) مقدار ویژه جفت زوج  $(A, B)$  هستیم که  $B_{n \times n}$ ، متقارن و  $A_{n \times n}$  معین مثبت می باشد. اساس این روش، روش تکرار خارج قسمت راییلی می باشد. به عبارت دیگر هدف مینیم کردن خارج قسمت راییلی روی یک زیر فضای کرلیف معین در هر تکرار می باشد که آن زیر فضای کرلیف معین نتیجه یک انتقال مناسب می باشد.

فرض کنید  $(\rho_0, X_0)$  یک تقریب اولیه برای کوچکترین مقدار ویژه و بردار ویژه متناظر با آن برای زوج  $(A, B)$  باشد.

بر اساس روش تکراری خارج قسمت راییلی تقریب بعدی و بهتر نسبت به  $x_0$ ، یعنی  $x_1$  از حل دستگاه:

$$(A - \rho_0 B)x_1 = Bx_0$$

پیدا می شود. اما یکی از روشهای موجود برای حل این دستگاه استفاده از روش های زیر فضای کرلیف می باشد. اساس کار یافتن یک پایه برای زیر فضای کرلیف.

$$K_m = K_m(A - \rho_0 B, x_0) = \text{Span}\{x_0, (A - \rho_0 B)x_0, \dots, (A - \rho_0 B)^m x_0\}$$

می باشد. که  $1 \leq m \leq n$  (به [۵] مراجعه شود).

لذا تلاش خود را برای یافتن یک پایه برای  $K_m$  متمرکز می کنیم. با ادامه روند بالا به الگوریتم زیر می رسیم که به آن روش مستقل از معکوس با استفاده از زیر فضای کرلیف می گوئیم.

### الگوریتم روش مستقل از معکوس

*Algorithm 1: Invers free Krylov Subspace method for  $(A, B)$*

*input  $m \geq 1$  and initial approximation  $x_0$  with  $\|x_0\| = 1$*

$$\rho_0 = \rho(x_0) = \frac{x_0^T A x_0}{x_0^T B x_0}$$

*For  $K = 0, 1, \dots$  until Convergence do*

*Construct a basis  $Z_m = [z_0, \dots, z_m]$  for  $K_m = \text{Span}\{x_k, (A - \rho_k B)x_k, \dots, (A - \rho_k B)^m x_k\}$*

*Form  $A_m = Z_m^T (A - \rho_k B) Z_m$  and  $B_m = Z_m^T B Z_m$*

*Find the Smallest eigenpair  $(u_1, v_1)$  for  $(A_m, B_m)$*

$$\rho_{k+1} = \rho_k + u_1 \text{ and } x_{k+1} = Z_m v_1$$

*end do*

در این الگوریتم محاسبات را بر روی زوج انتقال یافته  $(A - \rho_k B, B)$  انجام می دهیم و در هر تکرار  $\rho_{k+1}$  را از روی  $\rho_k$  محاسبه می کنیم. که این معادل است با محاسبه مستقیم  $\rho_{k+1}$  کوچکترین مقدار ویژه زوج  $(Z_m^T A Z_m, Z_m^T B Z_m)$  می باشد.

با توجه به الگوریتم ۱ ملاحظه می شود که در این الگوریتم یک تکرار اصلی یا خارجی وجود دارد که تا پیدا کردن یک تقریب خوب ادامه دارد. اما در هر تکرار خارجی یک تکرار داخلی وجود دارد که وابسته به  $m$  می باشد و منجر به ساختن یک پایه متعامد برای  $K_m$  در هر تکرار خارجی می شود. روش های متفاوتی برای ساختن یک پایه متعامد برای  $K_m$  وجود دارد. استفاده از این روش های متفاوت، تاثیری بر روی نتایج حاصل از الگوریتم (۱) ندارد. اما ممکن است پایداری عددی و پیچیدگی محاسباتی متفاوتی داشته باشند.

### ۳ همگرایی روش تکراری مستقل از معکوس

**قضیه ۱** فرض کنید  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  مقادیر ویژه تعمیم یافته زوج  $(A, B)$  باشد.  $(\rho_{k+1}, x_{k+1})$  یک زوج تقریب به دست آمده از  $(\rho_k, x_k)$  به وسیله الگوریتم (۱) باشد. همچنین فرض کنید  $\delta_1 < \delta_2 \leq \dots \leq \delta_n$  مقادیر ویژه ماتریس  $A - \rho_k B$  و  $u_1$  بردار یکه ویژه متناظر با  $\delta_1$  باشد و  $\lambda_1 < \rho_k < \lambda_2$ . در این صورت داریم

$$\rho_{k+1} - \lambda_1 \leq (\rho_k - \lambda_1) \varepsilon_m^2 + 2(\rho_k - \lambda_1)^{\frac{3}{2}} \varepsilon_m \left( \frac{\|B\|}{\delta_2} \right)^{\frac{1}{2}} + \delta_k$$

که

$$0 \leq \delta_k \equiv \rho_k - \lambda_1 + \frac{\delta_1}{u_1^T B u_1} = O((\rho_k - \lambda_1)^2)$$

و

$$\varepsilon_m = \min_{p \in P_m} \max_{\substack{m, p(\delta_i)=1 \\ i \neq 1}} |P(\delta_i)|$$

که  $P_m$  مجموعه همه چند جمله ای های حداکثر از درجه  $m$  می باشد.

**برهان** قرار می دهیم  $C = A - \rho_k B$  و  $K_m = \{p(c)x_k, p \in P_m\}$  در تکرار  $k$  ام از الگوریتم (۱) داریم:

$$\rho_{k+1} = \min_{0 \neq u \in K_m} \frac{u^T A u}{u^T B u} = \rho_k + \min_{0 \neq u \in K_m} \frac{u^T (A - \rho_k B) u}{u^T B u}$$

$$\rho_k + \min_{p \in P_m, p(c)x_k \neq 0} \frac{x_k^T p(C) C p(C) x_k}{x_k^T p(C) B p(C) x_k}$$

اما چون  $A - \rho_k B$  متقارن است، لذا قطری شدنی است. یعنی ماتریس متعامد  $U$  چنان موجود است که  $A - \rho_k B = U \Sigma U^T$ . اما چون مقادیر ویژه  $A - \rho_k B$ ،  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  می باشد. لذا  $\Sigma$  یک ماتریس قطری با درایه های روی قطر  $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$  می باشد.

همچنین فرض کنید  $q$  مینیم چند جمله ای هایی در  $P_m$  باشد که  $q(\delta_1) = 1$  (چنین چند جمله ای هایی وجود دارند زیرا اگر  $P(x)$  چند جمله ای مشخصه  $A - \rho_k B$  باشد آن گاه کافی است قرار دهیم  $q(x) = P(x) + I$  در این صورت  $q(\delta_1) = 1$ ). قرار می دهیم  $\varepsilon_m = \max_{i \neq 1} |q(\delta_i)|$ . بنابراین  $\varepsilon_m < 1$  می باشد. زیرا در غیر این صورت چند جمله ای با درجه کمتر از درجه  $q$  وجود دارد که  $q(\delta_1) = 1$  باشد و این یک تناقض است. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \rho_{k+1} &\leq \rho_k + \frac{x_k^T q(C) C q(C) x_k}{x_k^T q(C) B q(C) x_k} \\ &= \rho_k + \frac{x_k^T q(U \Sigma U^T) U \Sigma U^T q(U \Sigma U^T) x_k}{x_k^T q(U \Sigma U^T) B q(U \Sigma U^T) x_k} \\ &= \rho_k + \frac{x_k^T U q^2(\Sigma) \Sigma U^T x_k}{x_k^T U q(\Sigma) B_1 q(\Sigma) U^T x_k} \\ &= \rho_k + \frac{y^T q^2(\Sigma) \Sigma y}{y^T q(\Sigma) B_1 q(\Sigma) y} \end{aligned} \quad (۱)$$

که در رابطه فوق:

$$B_1 = U^T B U \quad \text{و} \quad y = U^T x_k$$

فرض کنید  $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$  و  $\hat{y} = [0, y_2, \dots, y_n]^T$  و  $e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$  آن گاه داریم:

$$\begin{aligned} y^T q(\Sigma) B_1 q(\Sigma) y &= (y_1 e_1 + \hat{y})^T q(\Sigma) B_1 q(\Sigma) (y_1 e_1 + \hat{y}) \\ &= y_1^2 q(\delta_1)^2 e_1^T B_1 e_1 + 2 y_1 q(\delta_1) e_1^T B_1 q(\Sigma) \hat{y} \\ &\quad + \hat{y}^T q(\Sigma) B_1 q(\Sigma) \hat{y} = y_1^2 \beta_1^2 + 2 y_1 \beta_2 + \beta_3^2 \end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned}\beta_1^2 &= e_1^T B_1 e_1 = u_1^T B u_1 \\ \beta_3^2 &= \hat{y}^T q(\Sigma) B_1 q(\Sigma) \hat{y} \leq \max_{i \neq 1} q(\delta_i)^2 \|B_1\| \|\hat{y}\|^2 \\ &= \varepsilon_m^2 \|B\| \|\hat{y}\|^2\end{aligned}$$

$$\beta_2 = e_1^T B_1 q(\Sigma) \hat{y} \text{ و}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\beta_1^2 \beta_3^2 &= e_1^T B_1 e_1 \hat{y}^T q(\Sigma) B_1 q(\Sigma) \hat{y} \\ (\beta_1 \beta_3)^2 &= |(\beta_1 \beta_3)^2| \geq |e_1^T B_1 e_1 \hat{y}^T q(\Sigma) B_1 q(\Sigma) \hat{y}| \\ &\geq |e_1^T B_1 q(\Sigma) \hat{y}|^2 = |\beta_2|^2 \\ \Rightarrow |\beta_2| &\leq \beta_1 \beta_3 \\ 0 &= x_k^T (A - \rho_k B) x_k = y^T U^T (A - \rho_k B) U y \\ &= y^T \Sigma y\end{aligned}$$

لذا داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \delta_i y_i^2 &= 0 \\ |\delta_1| y_1^2 &\geq -\delta_1 y_1^2 = \sum_{i \neq 1} \delta_i y_i^2 \geq \delta_2 \|\hat{y}\|^2\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\beta_3 \leq \varepsilon_m \|B\|^{\frac{1}{2}} \left( \frac{|\delta_1|}{\delta_2} \right)^{\frac{1}{2}} |y_1| \quad (۲)$$

از طرف دیگر داریم:

$$y^T q^2(\Sigma) \Sigma y = \sum_i \delta_i q^2(\delta_i) y_i^2 \leq \sum_i \delta_i y_i^2 = y^T \Sigma y = 0$$

و

$$\begin{aligned}\hat{y}^T q^2(\Sigma) \Sigma \hat{y} &= \sum_{i \neq 1} \delta_i q^2(\delta_i) y_i^2 \leq \varepsilon_m^2 \sum_{i \neq 1} \delta_i y_i^2 \\ &= \varepsilon_m^2 |\delta_1| y_1^2\end{aligned} \quad (۳)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\frac{y^T q^2(\Sigma) \Sigma y}{y^T q(\Sigma) B_1 q(\Sigma) y} &\leq \frac{y_1^2 \delta_1 + \hat{y}^T q^2(\Sigma) \Sigma \hat{y}}{y_1^2 \beta_1^2 + 2 |y_1| \beta_1 \beta_3 + \beta_3^2} \\ &= \frac{\delta_1}{\beta_1^2} - \frac{\delta_1}{\beta_1^2} \frac{2 |y_1| \beta_1 \beta_3 + \beta_3^2}{y_1^2 \beta_1^2 + 2 |y_1| \beta_1 \beta_3 + \beta_3^2} + \frac{\hat{y}^T q^2(\Sigma) \Sigma \hat{y}}{y_1^2 \beta_1^2 + 2 |y_1| \beta_1 \beta_3 + \beta_3^2} \\ &\leq \frac{\delta_1}{\beta_1^2} + \frac{\delta_1}{\beta_1^2} \frac{2 |y_1| \beta_1 \beta_3}{y_1^2 \beta_1^2} + \frac{\hat{y}^T q^2(\Sigma) \Sigma y}{y_1^2 \beta_1^2}\end{aligned}$$

حال با توجه به روابط (۲) و (۳) داریم:

$$\leq \frac{\delta_1}{\beta_1^2} + \frac{\delta_1}{\beta_1^2} \frac{2|y_1|\beta_1 \varepsilon_m \|B\|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{|\delta_1|}{\delta_2}\right)^{\frac{1}{2}} |y_1|}{y_1^2 \beta_1^2} \quad (4)$$

$$+ \frac{\varepsilon_m^2 |\delta_1| y_1^2}{y_1^2 \beta_1^2} \leq \frac{\delta_1}{\beta_1^2} + 2 \left(\frac{|\delta_1|}{\beta_1^2}\right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon_m \left(\frac{\|B\|}{\delta_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{|\delta_1|}{\beta_1^2} \varepsilon_m^2$$

حال با ترکیب روابط (۱) و (۴) داریم:

$$0 \leq \rho_{k+1} - \lambda_1 \leq \rho_k - \lambda_1 + \frac{\delta_1}{\beta_1^2} + 2 \left(\frac{|\delta_1|}{\beta_1^2}\right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon_m \left(\frac{\|B\|}{\delta_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{|\delta_1|}{\beta_1^2} \varepsilon_m^2$$

$$\leq \rho_k - \lambda_1 + \frac{\delta_1}{\beta_1^2} + 2 (\rho_k - \lambda_1)^{\frac{3}{2}} \varepsilon_m \left(\frac{\|B\|}{\delta_2}\right)^{\frac{1}{2}} (\rho_k - \lambda_1) \varepsilon_m^2$$

حال با قرار دادن  $\rho_k - \lambda_1 + \frac{\delta_1}{\beta_1^2} + \delta_k = O((\rho_k - \lambda_1)^2)$  اثبات کامل می شود.

لازم به ذکر است که می توان برای  $\varepsilon_m$  که در قضیه (۱) بیان شد، یک کران بالا به صورت زیر بر حسب  $\delta_i$  ها بیان کرد. (به [۶] مراجعه کنید):

$$\varepsilon_m \leq 2 \left( \frac{1 - \sqrt{\psi}}{1 + \sqrt{\psi}} \right)^m \quad (5)$$

که:

$$\psi = \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_n - \delta_1}$$

بنابراین سرعت همگرایی الگوریتم (۱) به میزان پراکندگی مقادیر ویژه  $(A - \rho_k B)$  که همان  $\delta_i$  ها هستند بستگی دارد. این برجستگی اساسی و مهم این الگوریتم به ما این اجازه را می دهد که سرعت همگرایی را با استفاده از تبدیلات معادل (پیش شرط) بالا ببریم. این تبدیلات  $\delta_i$  ها را تغییر می دهند اما مقادیر ویژه زوج  $(A, B)$  هیچ تغییری نمی کنند. نکته قابل توجه دیگر که در رابطه (۵) ملاحظه می شود این است که با افزایش  $m$  سرعت همگرایی افزایش پیدا می کند و آزمایش های عددی، نیز بیانگر همین مطلب می باشد. همچنین می توانیم کران بالای رابطه (۵) را نیز بر حسب مقادیر ویژه  $A - \lambda_1 B$  به جای مقادیر ویژه  $(A - \rho_k B)$  بیان کنیم که منجر به شکل گیری لم زیر می شود.

**لم ۱** فرض کنید  $0 = \gamma_1 < \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n$  مقادیر ویژه  $(A - \lambda_1 B)$  باشد، آنگاه داریم:

$$\rho_{k+1} - \lambda_1 \leq 4 \left( \frac{1 - \sqrt{\psi_0}}{1 + \sqrt{\psi_0}} \right)^{2m} (\rho_k - \lambda_1) + 4 \left( \frac{1 - \sqrt{\psi_0}}{1 + \sqrt{\psi_0}} \right)^m \left( \frac{\|B\|}{\gamma_2} \right)^{\frac{1}{2}} (\rho_k - \lambda_1)^{\frac{3}{2}} + O((\rho_k - \lambda_1)^2)$$

در آن  $\psi_0 = \frac{\gamma_2}{\gamma_n}$  می باشد.

#### ۴ محاسبه $P$ کوچکترین (بزرگترین) مقدار ویژه زوج $(A, B)$ با استفاده از روش تهی سازی

واضح است که برای پیدا کردن بزرگترین مقدار ویژه تعمیم یافته زوج  $(A, B)$  کافی است روش مستقل از معکوس زیر فضای کرلیف را برای زوج  $(-A, B)$  اجرا کنیم.

فرض کنید  $P$  زوج ویژه  $(A, B)$  محاسبه شده باشد.  $(I < P < n)$  همچنین فرض کنید  $V_P$  ماتریسی باشد که ستونهای آن  $P$  بردار ویژه محاسبه شده  $(A, B)$  و  $A_p$  یک ماتریس قطری باشد که عناصر روی قطر آن  $P$  مقدار ویژه زوج  $(A, B)$  باشد. از طرفی می دانیم که بردارهای ویژه زوج  $(A, B)$  متعامدند. لذا داریم:

$$V_P^T B V_P = I \quad (۶)$$

$$A V_P = B V_P A_P \quad (۷)$$

حال اگر قرار دهیم:

$$(A_p, B) = (A + (B V_P) \Sigma (B V_P)^T, B) \quad (۸)$$

$$\text{که } \delta_i \geq \lambda_{p+2} \text{ و } \Sigma = \text{diag}\{\delta_i - \lambda_i\} i=1, \dots, p$$

حال با توجه به روابط (۶) و (۷) واضح است که مقادیر ویژه (۸) اجتماع ۲ مجموعه  $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  و  $\{\delta_1, \dots, \delta_p\}$  می باشد، بنابراین کوچکترین مقدار ویژه (۸)،  $\lambda_{p+1}$  می باشد. لذا با بکار بردن الگوریتم مستقل از معکوس پیش شرط شده زیر فضای کرلیف (الگوریتم (۱)) بر روی زوج (۳-۴)،  $\lambda_{p+1}$  مشخص می شود. یعنی با فرض داشتن  $P$  کوچکترین مقدار ویژه زوج  $(A, B)$  می توان  $P+1$  امین مقدار ویژه را محاسبه کرد.

مثال ۱ ماتریس های  $A$  و  $B$  را به صورت زیر در نظر بگیرید.

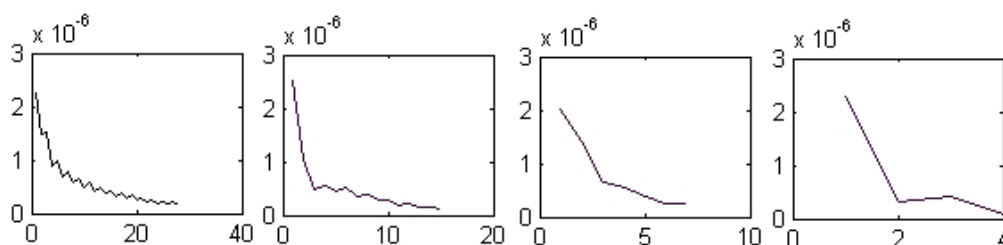
جدول ۱. نحوه عملکرد الگوریتم مستقل از معکوس (Arnoldi) برای پیدا کردن کوچکترین مقدار ویژه زوج  $(A, B)$  به ازای مقادیر مختلف  $m$

| m  | Inner iteration | Outer iteration | Total of inner iteration | Time  |
|----|-----------------|-----------------|--------------------------|-------|
| ۴  | ۲۸              | ۴۸              | ۱۱۲                      | ۱۹/۸۶ |
| ۶  | ۱۵              | ۴۷              | ۹۰                       | ۱۳/۷۰ |
| ۸  | ۷               | ۴۷              | ۵۶                       | ۹/۳۶  |
| ۱۰ | ۵               | ۴۷              | ۵۰                       | ۹/۰۴  |
| ۱۲ | ۴               | ۴۵              | ۴۸                       | ۸/۰۶  |

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1.2 & 0.42 & 0.8 & 0.3 & 0.8 \\ 1.2 & 4 & 1.2 & 0.42 & 0.8 & 0.3 \\ 0.42 & 1.2 & 5 & 1.2 & 0.42 & 0.8 \\ 0.8 & 0.42 & 1.2 & 6 & 1.2 & 0.42 \\ 0.3 & 0.8 & 0.42 & 1.2 & 7 & 1.2 \\ 0.8 & 0.3 & 0.8 & 0.42 & 1.2 & 8 \\ & 0.8 & 0.3 & 0.8 & 0.42 & 1.2 \\ & & 0.8 & 0.3 & 0.8 & 0.42 \\ & & & 0.8 & 0.3 & 0.8 \\ & & & & 0.8 & 0.3 \\ & & & & & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$B = \text{Diag}(2, 3, \dots, 1000, 1001)_{1000 \times 1000}$$

کوچکترین مقدار ویژه زوج  $(A, B)$  را با به کارگیری الگوریتم مستقل از معکوس با شرط توقف  $\|r_k\| \leq 10^{-7}$  که  $r_k = (Ax_k - \lambda_k Bx_k) / \|x_k\|$  محاسبه کردیم. در شکل (۱) تعداد تکرارهای داخلی مورد نیاز برای رسیدن به دقت مطلوب به ازای  $m=4, 6, 8, 12$  نشان داده شده است.



شکل ۱. تعداد تکرارهای داخلی مورد نیاز برای رسیدن به دقت مطلوب به ازای  $m=4, 6, 8, 12$  از چپ به راست

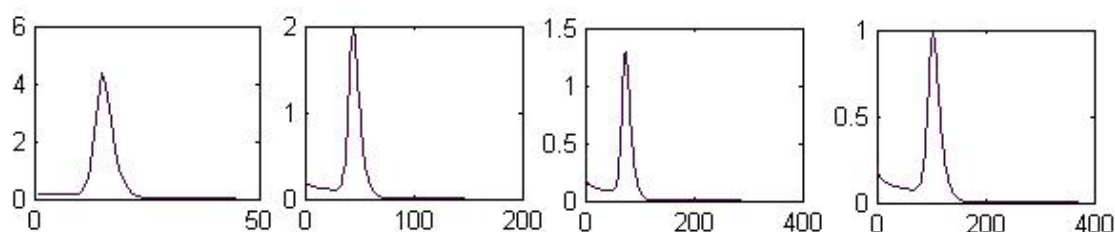
مشاهده می کنید که با افزایش  $m$ ، تعداد تکرارهای داخلی کاهش می یابد. اما این بدین معنی نیست که  $m$  را هر چقدر که بخواهیم، افزایش دهیم. زیرا در این صورت تعامد موجود بین اعضای پایه از بین می رود و تکرارهای داخلی افزایش می یابد. جدول (۱) را ببینید.

مشاهده می کنید که  $m=12$ ، مناسب ترین  $m$  می باشد. حال با به کارگیری الگوریتم مستقل از معکوس و تهی سازی چهار تا کوچکترین مقدار ویژه زوج  $(A, B)$  را محاسبه می کنیم. نتایج در جدول (۲-۴) نشان داده شده است.

جدول ۲. نحوه عملکرد الگوریتم مستقل از معکوس (Arnoldi) برای پیدا کردن چهار تا کوچکترین مقدار ویژه زوج  $(A, B)$  با دقت  $10^{-7}$

| $p$ | $m$ | Inner iteration | Outer iteration | Time   | $\lambda_p$ |
|-----|-----|-----------------|-----------------|--------|-------------|
| ۱   | ۱۲  | ۴               | ۴۷              | ۸/۰۶   | ۰/۵۸۲۱۵     |
| ۲   | ۱۲  | ۴               | ۱۴۹             | ۷۲/۶۷  | ۰/۸۲۶۶۷     |
| ۳   | ۱۲  | ۴               | ۲۸۹             | ۱۴۱/۱۸ | ۰/۸۹۱۵۱     |
| ۴   | ۱۲  | ۴               | ۳۷۴             | ۱۷۷/۱۱ | ۰/۹۲۱۱۶     |

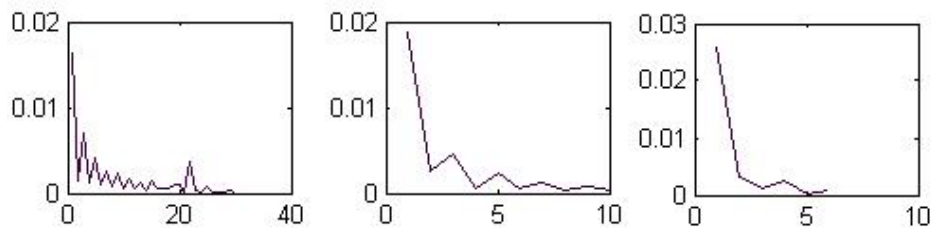
در شکل (۲)، تعداد تکرارهای خارجی مورد نیاز برای محاسبه چهار تا کوچکترین مقدار ویژه زوج  $(A, B)$  با دقت  $10^{-7}$  نشان داده شده است.



شکل ۲. تعداد تکرارهای خارجی مورد نیاز برای محاسبه چهار تا کوچکترین مقدار ویژه زوج  $(A, B)$  با دقت  $10^{-7}$

### ۵ روش مستقل از معکوس وزن دار

حال برای ساختن یک پایه متعامد در الگوریتم مستقل از معکوس از روش  $W$ -Arnoldi [1]، که یکی از روش های زیر فضای کرلیف می باشد، استفاده می کنیم. کوچکترین مقدار ویژه زوج  $(A, B)$  را با به کارگیری الگوریتم مستقل از معکوس با شرط توقف  $\|r_k\| \leq 10^{-7}$  که  $r_k = (Ax_k - \lambda_k Bx_k) / \|x_k\|$  محاسبه کردیم. در شکل (۳) تعداد تکرارهای داخلی مورد نیاز برای رسیدن به دقت مطلوب به ازای  $m=2,4,6$  نشان داده شده است.



شکل ۳. تعداد تکرارهای داخلی مورد نیاز برای رسیدن به دقت مطلوب به ازای  $m=2,4,6$  از چپ به راست

جدول ۳. نحوه عملکرد الگوریتم مستقل از معکوس (w-Arnoldi) برای پیدا کردن کوچکترین مقدار ویژه زوج  $(A, B)$  به ازای مقادیر مختلف  $m$

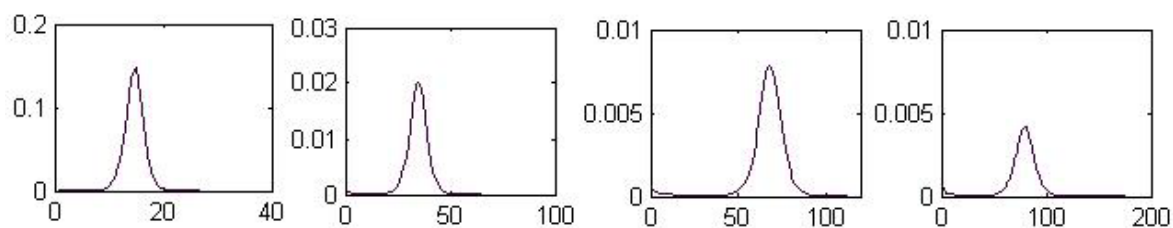
| m | Inner iteration | Outer iteration | Total of inner iteration | Time  |
|---|-----------------|-----------------|--------------------------|-------|
| ۲ | ۳۰              | ۲۹              | ۶۰                       | ۵۳/۰۴ |
| ۴ | ۱۰              | ۲۸              | ۴۰                       | ۱۸/۸۷ |
| ۶ | ۶               | ۲۷              | ۳۶                       | ۱۲/۴۹ |

مشاهده می کنید که  $m=6$ ، مناسب ترین  $m$  می باشد. حال با به کارگیری الگوریتم مستقل از معکوس و تهی سازی چهار تا کوچکترین مقدار ویژه زوج  $(A, B)$  را محاسبه می کنیم. نتایج در جدول (۴) نشان داده شده است.

جدول ۴. نحوه عملکرد الگوریتم مستقل از معکوس (w-Arnoldi) برای پیدا کردن چهار تا کوچکترین مقدار ویژه زوج  $(A, B)$  با دقت  $10^{-7}$

| $p$ | $m$ | Inner iteration | Outer iteration | Time   | $\lambda_p$ |
|-----|-----|-----------------|-----------------|--------|-------------|
| ۱   | ۶   | ۶               | ۲۷              | ۱۲/۴۹  | ۰/۵۸۲۱۵     |
| ۲   | ۶   | ۶               | ۶۵              | ۴۶/۰۹  | ۰/۸۲۶۶۷     |
| ۳   | ۶   | ۶               | ۱۱۳             | ۸۰/۵۷  | ۰/۸۹۱۵۱     |
| ۴   | ۶   | ۶               | ۱۷۷             | ۱۲۵/۶۷ | ۰/۹۲۱۱۶     |

در شکل ۴، تعداد تکرارهای خارجی مورد نیاز برای محاسبه چهار تا کوچکترین مقدار ویژه زوج  $(A, B)$  با دقت  $10^{-7}$  نشان داده شده است.



شکل ۴. تعداد تکرارهای خارجی مورد نیاز برای محاسبه چهار تا کوچکترین مقدار ویژه زوج  $(A, B)$  با دقت  $10^{-7}$

مقایسه جدول های ۲ و ۳ نشان می دهد که تعداد تکرارها و زمان محاسبات روش مستقل از معکوس (w-Arnoldi) به مراتب کمتر از روش مستقل از معکوس (Arnoldi) است. جدول ۵ را ببینید.

جدول ۵. مقایسه روش های Arnoldi-inverse free method و W-Arnoldi-inverse free method برای محاسبه چهارتا کوچکترین مقدار ویژه

| تعمیم یافته زوج $(A, B)$ با دقت $10^{-7}$ |    |                    |        |
|-------------------------------------------|----|--------------------|--------|
|                                           | m  | Outer<br>iteration | Time   |
| Arnoldi-inverse free<br>method            | ۱۲ | ۸۵۹                | ۳۹۸/۹۱ |
| W-Arnoldi-inverse free<br>method          | ۶  | ۳۸۲                | ۲۶۵/۶۳ |

## ۶ نتیجه گیری

روش های ارایه شده در ([2],[3],[4]) دارای کاستی هایی می باشند، بدین معنا که بعضی از آن ها کمتر از حد انتظار و بعضی دیگر بیش از حد انتظار مقادیر ویژه را محاسبه می کنند. لذا در این مقاله برای حل این شکل به بیان روش های زیر فضای کرلیف پرداختیم. مشاهده نمودیم که در روش مستقل از معکوس با محاسبه صریح زوج نرمال، این مشکل برطرف شد و در نهایت با استفاده از معادلات تبدیل مناسب در روش مستقل از معکوس، مرتبه ی همگرایی روش را که قبلا یک بود به دو افزایش پیدا کرد و مقادیر ویژه ی زوج  $(A, B)$  با دقت بسیار بالایی محاسبه شد. اما دیدیم که در بین روش های مستقل از معکوس، روش مستقل از معکوس وزن دار مقادیر ویژه را با سرعت بیشتری محاسبه می کرد. لذا در حالت کلی که ماتریس های  $A, B$  بزرگ و Sparse می باشند، روش مستقل از معکوس وزن دار برای محاسبه مقادیر ویژه تعمیم یافته توصیه می شود.

## منابع

- [1] Essai, A., (1998). Weighted Fom and GMRES for solving nonsymmetric linear systems, Numer. Algorithm 18.277-292.
- [2] Morgen, B., (1996). Restarting the Arnoldi method for large nonsymmetric eigenvalue problems, math. Compute. 1213-1230.
- [3] Stathopoulos, A., Saad, Y., K.WU, (1998). Dynamic thick Restarting of the Daridson and the implicitly restarted Arnoldi Algorithm, SIAM J.Sci. Compute. 19. 227-245.
- [4] Lehoucq, R. B., (1995). Analysis and implementation of an implicitly restarted Arnoldi iteration. Ph. D. thesis, Department of computational and Applied Mathematics, Ric University, TR 95-13.
- [5] Golub, H., YE, Q., An Inverse Free Preconditioned Krylov Subspace Method for Symmetric Generalized Eigenvalue problems, SIAM J. SCI. compute, Vol.24, No.1, pp.312-334
- [6] Meurant, G., (1999). Computer Solution of Large Linear System, Elsevier, Armsterdam.