

الگوریتم نمونه اصلاحی مورچگان برای حل مساله چندین فروشنده دوره گرد

مجید یوسفی خوشبخت^{۱*}، محمد صدیق پور^۲

^۱ دانشگاه آزاد اسلامی، واحد همدان، باشگاه پژوهشگران جوان، همدان، ایران

^۲ مربی، دانشکده علوم پایه، واحد همدان، دانشگاه آزاد اسلامی، همدان، ایران

رسید مقاله: سی و یکم فروردین ماه ۱۳۹۰

پذیرش مقاله: بیست و هشتم مرداد ماه ۱۳۹۰

چکیده

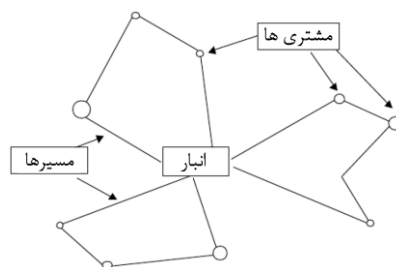
یکی از کاربردی ترین مسایل بهینه سازی ترکیباتی مساله چندین فروشنده دوره گرد است که در آن، $m > 1$ فروشنده از یک نقطه مشترک به نام انبار شروع به حرکت می کنند و بعد از ملاقات کردن $n > m$ مشتری به آن باز می گردند، به طوری که هر مشتری تنها یک بار به وسیله یک فروشنده مورد ملاقات قرار می گیرد. هدف در این مساله کمینه کردن مسیر کلی پیموده شده توسط همه فروشنده های دوره گرد است. در این مقاله، یک روش اصلاحی الگوریتم نمونه مورچگان برای این مساله به کار گرفته می شود که در ضریب تشویق بهترین مسیر با الگوریتم معمولی نمونه مورچگان تفاوت دارد. این ضریب سبب می شود که الگوریتم دارای قدرت بیشتری برای فرار از نقاط بهینه محلی شود و بتواند به جواب های با کیفیت تری دست یابد. نتایج محاسباتی روی مثال های استاندارد به وضوح کارایی الگوریتم جدید را نسبت به الگوریتم های دیگر فراابتکاری نشان می دهد.

کلمات کلیدی: مساله چندین فروشنده دوره گرد، الگوریتم نمونه مورچگان، ضریب فرمون، مسایل بهینه سازی ترکیباتی.

۱ مقدمه

مساله چندین فروشنده دوره گرد یکی از مهم ترین گسترش های مساله فروشنده دوره گرد است که از اهمیت بسیار زیادی در مسایل بهینه سازی ترکیباتی برخوردار است. در این مساله m فروشنده از گره ای به نام انبار شروع به حرکت کرده و بعد از ملاقات کردن n مشتری به محل حرکت خود باز می گردند. هدف در این مساله معین کردن مجموعه ای از مسیرها برای فروشنده ها است به طوری که هزینه کلی آن ها کمینه شده و هر مشتری فقط به وسیله یک فروشنده مورد ملاقات قرار گیرد (شکل ۱). بعضی از عللی که سبب شده است این مساله از جایگاه بسیار مهمی در مسایل بهینه سازی ترکیباتی برخوردار باشد عبارت است از:

۱. وجود چندین مساله گسترش یافته از آن مانند مساله مسیریابی چندین وسیله نقلیه و گسترش های آن.
۲. قابلیت تبدیل مسایل گوناگون به این مساله و حل کردن آنها به وسیله الگوریتم های موجود و تفسیر جواب های به دست آمده در مساله اصلی مانند مساله ترتیب دهی کارها.
۳. استاندارد بودن این مساله برای الگوریتم هایی که به طور موازی کار می کنند، زیرا این گونه از الگوریتم ها به راحتی در این مساله قابل اجرا هستند و می توان بدین وسیله کارایی الگوریتم های جدید موازی را بررسی کرد.



شکل ۱. نمونه ای از حل مساله چندین فروشنده دوره گرد با $m=3$ و $n=10$

اگر چه مساله فروشنده دوره گرد بسیار مورد توجه دانشمندان و محققین قرار می گیرد، اما مساله چندین فروشنده دوره گرد علیرغم جایگاه بسیار مهمی که دارد کمتر مورد بررسی قرار می گیرد و تحقیقات اندکی درباره آن انجام شده است [۱]. با این حال می توان روش های حل این مساله را به سه دسته الگوریتم های دقیق، تقریبی و ابتکاری تقسیم کرد. در الگوریتم های دقیق مانند روش تخفیف لاکرانژ یدلاپالی و همکارانش [۲]، روش شاخه و کران گاویش و اسریکانت [۳] و روش شبه تخصیص گرومیکو و همکارانش [۴] که بیشتر برای مسایل با اندازه تقریباً کوچک بکار می رود، جواب بهینه مساله به دست می آید علیرغم آنکه زمان زیادی برای به دست آمدن این جواب باید صرف شود. از طرف دیگر روش های دقیق دیگری نیز وجود دارند که ایده اصلی آنها تخفیف چندین محدودیت و ساده سازی مساله مربوطه است مانند روش ارایه شده در [۵] که بر اساس روش شاخه و کران می باشد.

به علاوه در روش های تقریبی اگر چه نمی توان مانند روش های دقیق به جواب بهینه مساله رسید اما می توان با یک کران بالای خطا برای جواب به دست آمده یا زمان اجرا به جواب رسید. برای نمونه از این گونه روش ها می توان به [۶] و [۷] مراجعه کرد. در مقابل، روش های ابتکاری روش هایی هستند که برخلاف روش های دقیق معمولاً به جواب بهینه مساله نمی رسند اما می توانند جواب زیر بهینه مساله را در یک زمان قابل قبول به دست آورند. این الگوریتم ها علی رغم اینکه در یک زمان اندک به جواب زیر بهینه می رسند دارای ساختار خوبی برای فرار از نقاط بهینه محلی نیستند و معمولاً به جواب خوبی همگرا نمی شوند. به طور نمونه از این روش ها می توان به موارد [۸] و [۹] اشاره کرد که از اولین الگوریتم های ابتکاری برای حل مساله چندین فروشنده دوره گرد هستند. از طرف دیگر در چندین دهه اخیر نسخه ای جدید از الگوریتم های ابتکاری پیشنهاد شدند که دارای ساختار تصادفی برای رسیدن به جواب هستند. این الگوریتم ها که فراابتکاری نامیده می شوند می توانند تا حد امکان از بهینه های محلی فرار کرده و به جواب های بسیار خوبی همگرا شوند. به طور مثال برای این گونه از روش ها می توان به روش های

شبکه‌های عصبی ماسوتی و همکارش [۱۰]، جستجوی ممنوع رایان و همکارانش [۱۱]، الگوریتم‌های مورچگان یوسفی خوشبخت و همکارش [۱۲] و همچنین غفوریان و همکارش [۱۳] و الگوریتم شبیه‌سازی آنیلی پایدار و همکارانش [۱۴] اشاره کرد.

در این مقاله در بخش دوم برای این مساله یک فرمول‌بندی بر اساس مساله فروشنده دوره‌گرد ارایه می‌شود و سپس در بخش‌های سوم و چهارم در ابتدا الگوریتم معمولی مورچگان (ACO) ارایه شده و سپس اصلاح انجام شده بر روی الگوریتم نمونه مورچگان (AS_{elite}) به طور مبسوط شرح داده می‌شود. تحلیل حساسیت پارامترهای روش پیشنهادی در بخش پنجم مورد آزمایش قرار می‌گیرد و مقدار بهینه پارامترها در این بخش به دست می‌آید. در بخش ششم بین الگوریتم پیشنهادی و الگوریتم‌های دیگر فراابتکاری مقایسه‌ای بر روی مثال‌های استاندارد انجام می‌شود، در حالی که در بخش هفتم نتیجه‌گیری و جهت‌گیری‌های آینده ذکر می‌گردد.

۲ فرمول‌بندی مساله

مساله چندین فروشنده دوره‌گرد روی گراف غیر جهت دار کامل $G(V,A)$ تعریف می‌شود که در آن $V=\{0,1,...,n\}$ مجموعه‌ای از n مشتری به همراه انبار و $A=\{(i,j): i,j \in V, i \neq j\}$ مجموعه‌ای از کمان‌ها است (اگر گراف کامل نبود آن گاه هر یال وجود نداشته به وسیله یالی با اندازه بی‌نهایت جایگزین می‌شود). فرض کنید $C=(c_{ij})_{(n+1) \times (n+1)}$ نشان‌دهنده ماتریس هزینه روی گراف G باشد. اگر برای هر $i,j,k \in V$ $c_{ij}=c_{ji}$ آن گاه ماتریس C را متقارن گویند. همچنین اگر برای هر $i,j,k \in V$ $c_{ik} \leq c_{ij} + c_{jk}$ باشد آن گاه ماتریس C در نامساوی مثلثی صدق می‌کند.

علیرغم اینکه مساله چندین فروشنده دوره‌گرد جزء مسایل NP-سخت محسوب می‌شود، می‌تواند به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی صحیح نمایش داده شود، برای این منظور فرض می‌شود که ماتریس هزینه C متقارن و در نامساوی مثلثی صدق می‌کند. همچنین اگر برای هر $(i,j=0,1,2,...,n; i \neq j)$ فروشنده به طور مستقیم از i به j حرکت کند $x_{ij}=1$ و در غیر این صورت $x_{ij}=0$ در نظر گرفته می‌شود. بنابراین مدل مساله چندین فروشنده دوره‌گرد عبارت است از:

$$\text{Min} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

s.t.

$$\sum_{i=0}^n x_{ij} = \begin{cases} 1 & j = 1, \dots, n \\ m & j = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\sum_{j=0}^n x_{ij} = \begin{cases} 1 & i = 1, \dots, n \\ m & i = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad (S \subset \{1, \dots, n\}, |S| \geq 2) \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j = 0, \dots, n. \quad (5)$$

در این مدل، (۱) تابع هدف مساله را نشان می دهد. در حالی که محدودیت (۲) نشان دهنده این است که علیرغم اینکه به هر مشتری j به غیر از انبار فقط یک یال وارد می شود، به گره انبار m یال وارد می شود. همچنین محدودیت (۳) مانند محدودیت (۲) به این نکته اشاره دارد که از هر مشتری i به غیر از انبار فقط یک یال خارج می شود در حالی که این تعداد یال برای گره انبار m می باشد. محدودیت (۴) محدودیت حذف زیرگذر استاندارد نامیده می شود که سبب می گردد جواب هایی که دارای زیر دوری هستند که شامل گره انبار نیست، مورد قبول قرار نگیرد. در نهایت محدودیت (۵) به شرایط دودویی متغیر x_{ij} اشاره می کند.

۳ الگوریتم مورچگان

بهینه سازی جمعیت مورچگان نوعی روش فراابتکاری است که در حل تعداد زیادی از مسایل بهینه سازی ترکیباتی کاملاً موفق عمل کرده است. ACO به عنوان یک ابزار جهت حل مساله فروشنده دوره گرد توسط دوریگو و همکارانش در سال ۱۹۹۲ مطرح شد [۱۵]. این الگوریتم که نوعی از سیستم های چندعامله ای است، از رفتار غذایی مورچه های واقعی الهام گرفته شده است به طوری که هر عامل، یک مورچه مصنوعی می باشد. همچنین این الگوریتم نمونه موفق از سیستم های هوشمند گروهی است، که در آن هر عامل، عمل ساده ای را انجام می دهد ولی انجام این عمل ساده در کل باعث حل شدن مسایل NP-سخت می شود. گروهی از مهم ترین مسایلی که در آن از این روش استفاده شده است مسایل کلاسیک فروشنده دوره گرد، تخصیص، ترتیب دهی کارها و مسیریابی در شبکه های ارتباطی از راه دور می باشند.

آزمایشات زیست شناسان بر روی مورچه های آرژانتینی نشان داد که اگر دو راه برای مورچه ها از لانه تا منبع غذایی در نظر گرفته شود، اغلب مورچه ها بعد از مدتی ناپایداری (در حدود چند دقیقه) مسیر کوتاه تر را انتخاب می کنند و این نسبت مورچه ها با افزایش تفاوت طول دو مسیر، افزایش می یابد. این عمل از این ناشی می شود که مورچه ها در طول مسیر رفت و برگشت ماده شیمیایی به نام فرمون آزاد می کنند، که تبخیر پذیر می باشد. به عبارت دیگر وقتی مورچه ها به نقطه تصمیم گیری می رسند، مسیر را در ابتدا به صورت تصادفی انتخاب می کنند زیرا هیچ فرمونی بر روی مسیرها موجود نمی باشد. اما بعد از مدتی که مورچه های قبلی بر اساس مسیر کوتاه تر و منبع غذایی بهتر فرمون ریزی کردند آن گاه انتخاب در این زمان به صورت احتمالی صورت می گیرد. یعنی مسیر دارای فرمون بیشتر، مورد انتخاب تعداد بیشتری از مورچه ها قرار می گیرد. این رفتار در حقیقت یک اثر تحریک کننده دارد، زیرا انتخاب یک مسیر در تکرار جاری، احتمال انتخاب دوباره آن را در آینده افزایش خواهد داد. به این ترتیب با تکرار این عمل به وسیله مورچه ها، فرمون آزاد شده روی مسیر کوتاه تر با مقدار بالاتری ذخیره می شود تا مسیر کوتاه تر نسبت به مسیر بلندتر دارای جذابیت بیشتری باشد.

دوریگو این ایده ساده را برای یافتن راه‌حل‌های خوب در مسایل بهینه‌سازی سخت مورد استفاده قرار داد و روش الگوریتم سیستم مورچگان (AS) را به عنوان اولین نسخه از الگوریتم ACO ارائه کرد. در این الگوریتم وظیفه اصلی هر مورچه مصنوعی مانند همتای طبیعی خود، یافتن کوتاه‌ترین مسیر بین یک جفت گره در یک گراف است که در آن، مساله به نحو مناسبی روی آن نگاشته شده است. بنابراین مساله به زیر مساله‌هایی تبدیل می‌شود که در آن مورچه‌های مصنوعی وظیفه دارند که انتخاب گره بعدی را بر اساس فرمون ریخته شده و فاصله تا گره بعدی، انجام دهند. قانون تصمیم برای مورچه k واقع در گره i که می‌خواهد یکی از گره‌ها را از مجموعه گره‌های ملاقات نشده N_i انتخاب کند از فرمول (۶) به دست می‌آید. در اینجا τ_{ij} نشان دهنده مقدار فرمون روی یال (i,j) بوده، در حالی که η_{ij} نشان دهنده عکس مقدار فاصله بین دو گره i و j است. البته هر کدام از این دو دارای توانی هستند که می‌توان با تغییر آن‌ها میزان اهمیت هر یک را نسبت به دیگری تغییر داد.

$$P_{ij}^k = \begin{cases} \frac{\tau_{ij}^\alpha \eta_{ij}^\beta}{\sum_{j \in N_i} \tau_{ij}^\alpha \eta_{ij}^\beta} & \text{if } j \in N_i \\ 0 & \text{if } j \notin N_i \end{cases} \quad (6)$$

همچنین مورچه‌ها در حالی که از یک گره i به گره دیگر j می‌روند، اطلاعات فرمون $\Delta\tau_{ij}$ ، معمولاً به اندازه عکس مقدار یال (i,j) ، را روی یال مربوطه می‌ریزند. این عمل با استفاده از فرمول (۷) انجام می‌شود.

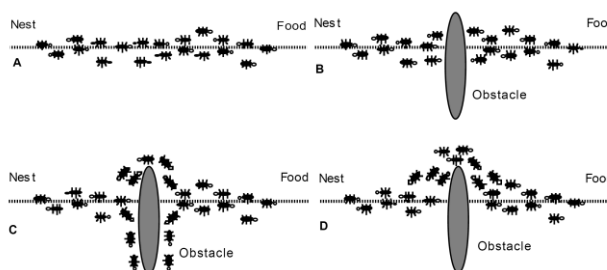
$$\tau_{ij}(t) \leftarrow \tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij} \quad (7)$$

به علاوه الگوریتم مانند نسخه طبیعی آن و برای اجتناب از همگرایی سریع همه مورچه‌ها به یک مسیر زیر بهینه، از مکانیزم تبخیر فرمون استفاده می‌کند. یعنی غلظت فرمون به طور خودکار و در هر تکرار به مقدار ρ کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر اگر τ ماتریس فرمون موجود بر روی یال‌های گراف مربوطه باشد، آن گاه این ماتریس در هر تکرار به وسیله فرمول (۸) بروز می‌شود.

$$\tau \leftarrow (1-\rho)\tau \quad \rho \in (0,1] \quad (8)$$

اولین مساله‌ای که با AS حل شد، مساله فروشنده دوره گرد بود زیرا به راحتی با این الگوریتم تطبیق یافته و از مسایلی است که بسیار به آن پرداخته می‌شود. به علاوه چون توضیح و درک آن ساده است، تاکنون الگوریتم‌های زیادی بر روی آن اجرا شده است. از طرف دیگر الگوریتم AS اولین نسخه از الگوریتم ACO بود که برای این مساله مورد استفاده قرار گرفت و متأسفانه نتایج خوبی را در مقایسه با سایر الگوریتم‌های فراابتکاری آن زمان تولید نکرد. در نتیجه دانشمندان به تکاپو افتادند که نسخه‌های جدیدتری از الگوریتم را ایجاد کنند که بتواند در مقایسه با سایر الگوریتم‌های فراابتکاری نتایج بهتری را به دست آورد. تلاش‌ها سبب شد که الگوریتم‌هایی مانند AS_{elite} ، رتبه بندی مورچگان (AS_{rank}) ، جمعیت مورچگان (ACS) و ماکزیمم - مینیمم

مورچگان (MMAS) ارایه شوند که همگی نسخه‌هایی اصلاح شده از این الگوریتم بودند که در ریختن و بروز کردن فرمون با یکدیگر تفاوت دارند.



شکل ۲. A: مورچه‌های واقعی که بین لانه و منبع غذایی حرکت می‌کنند. B: یک مانع بر روی مسیر بوجود می‌آید. C: مورچه‌ها با احتمال یکسان مسیرهای چپ و راست را انتخاب می‌کنند. D: فرمول بیشتر روی مسیر کوتاه‌تر سبب می‌شود که مورچه‌ها با احتمال بیشتری آن را انتخاب کنند.

۴ الگوریتم اصلاحی نمونه مورچگان

اولین بهبود از الگوریتم AS، استراتژی نخبه‌گرایی AS_{elite} بود که در سال ۱۹۹۶ به وسیله دوریگو، منیزو و کلورنی معرفی شد [۱۶]. این الگوریتم به دلیل معرفی مکانیسم‌هایی جدید از لحاظ کارایی نسبت به AS به بهبودهایی دست یافته بود. باید توجه کرد که روند استراتژی نخبه بدین صورت است که یکی از مورچه‌ها، بهترین مورچه‌ای که تاکنون توانسته است بهترین جواب را به دست آورد، بتواند در هر تکرار مسیر خود را دوباره فرمون‌ریزی کند و یا به عبارت دیگر در هر تکرار بهترین جواب تا سفر حاضر مورد تشویق قرار گیرد. این کار باعث می‌شود تا محدودی کارایی الگوریتم بهتر شود زیرا در روش AS تمام مورچه‌ها بعد از مدتی تورهای یکسانی تولید می‌کردند و این کار باعث می‌شد که اگر این تور مطلوب نباشد عملاً الگوریتم توانایی خود را برای یافتن جواب بهتر از دست داده و روند جستجو و استخراج جواب متوقف شود. در نتیجه الگوریتم برای مسایل نسبتاً بزرگ، کارایی خود را از دست می‌دهد.

تفاوت عمده‌ای که AS_{elite} نسبت به الگوریتم AS دارد عبارت است از: فرض کنید که S_{gb} بهترین جوابی است که تاکنون در اجرای کامل الگوریتم به دست آمده است بنابراین در هنگام به‌روزرسانی فرمون، مسیر طی شده به وسیله مورچه‌ای که مسیر S_{gb} را تولید کرده است یک مقدار اضافی از فرمون با مقدار $e \cdot \Delta \tau_{ij}^{gb}(t)$ را جذب می‌کند. بنابراین معادله بروز رسانی فرمون به صورت (۹) اصلاح می‌شود.

$$\tau_{ij}(t+1) = (1-\rho) \cdot \tau_{ij}(t) + \sum_{k=1}^m \Delta \tau_{ij}^k(t) + e \cdot \Delta \tau_{ij}^{gb}(t) \quad (9)$$

که در آن

e : وزن تور S_{gb} بوده و دارای یک مقدار ثابت است که توسط کاربر تعیین می‌شود.

$L^k(t)$: طول توری است که مورچه k ام پیموده است.

ρ : نرخ تبخیر ثابت در دامنه $[0,1]$ می‌باشد که کاربر بدین وسیله کاهش فرمون روی یال‌ها را تنظیم می‌کند.

$$\Delta \tau_{ij}^k(t) = \begin{cases} 1/L^k(t) & (i, j) \in T^k \\ 0 & (i, j) \notin T^k \end{cases} \quad (10)$$

T^k : مجموعه یال‌هایی که توسط مورچه k ام مورد ملاقات قرار گرفته است.

$\Delta \tau_{ij}^k(t)$: مقدار فرمون‌ریزی محلی است که در آن مورچه‌ها در حین حرکت مابین هر گره i و j ، مقداری فرمون، به اندازه عکس اندازه‌ای که هر کدام تاکنون پیموده‌اند، را روی یال مربوطه می‌ریزند.

$\Delta \tau_{ij}^{gb}(t)$: مقدار فرمون سراسری است که روی یال‌های متعلق به بهترین تور تاکنون شناخته شده ریخته می‌شود و برابر $1/f(s_{gb})$ می‌باشد که در آن $f(s_{gb})$ مقدار طول بهترین مسیر به دست آمده است.

از طرف دیگر لازم به ذکر است که ساختار الگوریتم AS_{elite} به نحوی است که دقت جواب‌ها در ابتدا بسیار پایین است اما به تدریج با افزایش تکرارها و ریختن فرمون توسط مورچه‌ها دقت جواب‌ها افزایش پیدا می‌کند. بنابراین ضریب ثابت e نمی‌تواند ضریب مناسبی برای تشویق بهترین مسیر تاکنون به دست آمده، باشد زیرا تفاوتی در اینکه بهترین جواب در چه تکراری و با چه دقتی به دست آمده، نمی‌گذارد. در روند بهبود AS_{elite} مشخص شد که استفاده از تابع چند جمله‌ای k, k^2 عددی صحیح و در ابتدا دارای مقدار ۱ است و هر زمانی که الگوریتم جوابی بهتر را به دست آورد یک واحد افزایش پیدا می‌کند، سبب می‌شود که نتایج بهتری برای الگوریتم به دست آید که در بخش بعدی به تفصیل شرح داده می‌شود.

علاوه بر این، این تابع چند جمله‌ای از آن جهت انتخاب نسبتاً مناسبی به نظر می‌آید که اولاً یک تابع صعودی است و ثانیاً دارای یک شیب متغیر است، به عبارت دیگر با افزایش تکرارها و به دست آمدن جواب‌های بهتر، تابع مربوطه رشد کرده و بهترین مسیر به دست آمده با قدرت بیشتری نسبت به جواب‌های قبلی تشویق می‌شود. توجه به این نکته ضروری است که مقدار کم تابع در ابتدای الگوریتم باعث می‌شود که فرمون ریخته شده بر روی بهترین مسیر تأثیر کمتری بر روی انتخاب مسیرها در تکرارهای بعدی الگوریتم داشته باشد و مورچه‌ها نوعی از فراموشی را به اجرا بگذارند، به عبارت دیگر این کار باعث می‌شود که اگر مورچه‌ها جواب‌های ضعیفی را در ابتدای الگوریتم به دست آوردند، این جواب‌ها را به فراموشی بسپارند، اما با گذشت زمان که الگوریتم به جلو می‌رود و جواب‌ها با دقت بیشتری به دست می‌آیند این مقدار چند جمله‌ای نیز به سرعت افزایش پیدا کرده و یال‌های متعلق به بهترین جواب، فرمون بیشتری را جذب کنند.

۵ تحلیل حساسیت پارامترها

برای یافتن مقادیر بهینه برای پارامترهای روش پیشنهادی، چندین نمونه از مسایل مسیریابی وسیله نقلیه از کتابخانه مساله فروشنده دوره گرد (TSPLIB) در نظر گرفته شده [۱۷] و مقادیر تقاضا برای هر کدام از مشتری‌ها حذف می‌شوند تا این مثال‌ها تبدیل به مثال‌هایی قابل استفاده برای چندین فروشنده دوره گرد شوند. خصوصیات این مثال‌ها در جدول ۱ نشان داده شده است. در این جدول به ترتیب ستون‌های اول و دوم مثال‌های مورد آزمایش به همراه تعداد گره‌های هر کدام از مثال‌ها (n) را نشان می‌دهد در حالی که ستون‌های سوم و

چهارم تعداد فروشنده‌های هر کدام از مثال‌ها (m) به همراه تعداد مورچه‌های مورد استفاده در الگوریتم (I) را ارائه می‌کند. باید توجه کرد که در این مثال‌ها تعداد مورچه‌های مورد استفاده برابر تعداد فروشنده‌های دوره‌گرد در نظر گرفته شده است. سرانجام ستون پنجم تعداد اجرای الگوریتم را به طور مستقل نشان می‌دهد (t) که در آن بهترین جواب به دست آمده به وسیله الگوریتم به عنوان جواب نهایی نشان داده می‌شود.

جدول ۱. خصوصیات مسایل				
نمونه	تعداد مشتری‌ها	تعداد فروشنده دوره‌گرد	تعداد مورچه‌های مورد استفاده	تعداد اجرای الگوریتم
E-۰۲۳-۰۳	۲۲	۳	۳	۱۰
E-۰۳۱-۰۹	۳۰	۹	۹	۱۰
E-۰۴۱-۱۴	۴۰	۱۴	۱۴	۱۰
E-۰۴۵-۰۴	۴۴	۴	۴	۱۰
E-۰۵۱-۰۵	۵۰	۵	۵	۱۰
E-۰۷۶-۰۷	۷۵	۷	۷	۱۰
E-۱۰۱-۰۸	۱۰۰	۸	۸	۱۰

برای بررسی تأثیر پارامترهای روش الگوریتم مورچگان بر روی جواب‌های مسایل، سه پارامتر این الگوریتم به طور مجزا در نظر گرفته شده و با ثابت گرفتن بقیه پارامترها مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند. باید توجه کرد که α و β به ترتیب توان‌های میزان تأثیر فرمون و اطلاعات ابتکاری مساله در فرمول (۶) و w میزان تکرار بهترین جواب الگوریتم در یک‌بار تکرار الگوریتم می‌باشند.

در جدول ۲ تغییرات پارامتر α نشان داده شده است. در این جدول مقدار پارامتر β برابر ۴ و تعداد تکرار بهترین جواب الگوریتم، به عنوان شرط پایانی، برابر ۱۲ در نظر گرفته شده است. همان‌طور که مشخص است بهترین جواب‌ها برای مقادیر مختلف α برای مقدار ۱ به دست آمده است. همچنین اگر جواب‌های مسایل برای مقادیر آلفای بزرگ‌تر یا مساوی یک در نظر گرفته شود آن گاه رابطه معناداری بین افزایش مقدار α و کیفیت جواب‌های به دست آمده به وجود دارد. در این مسایل هر چه مقدار آلفا افزایش پیدا می‌کند مقادیر جواب‌ها نیز افزایش پیدا می‌کند. بنابراین با افزایش α در ۷ مثال مربوطه، کیفیت جواب‌ها کاهش می‌یابد.

جدول ۲. جواب‌های الگوریتم برای آلفاهای متفاوت					
نمونه	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1.6$	$\alpha = 2.2$	$\alpha = 2.8$
E-۰۲۳-۰۳	۵۱۷,۴۲	۵۱۶,۴۲	۵۱۹,۶۵	۵۳۱,۴۵	۵۵۰,۲۴
E-۰۳۱-۰۹	۴۴۱,۵۲	۴۳۹,۹۶	۴۴۵,۳۴	۴۴۹,۵۲	۴۶۸,۲۵
E-۰۴۱-۱۴	۷۲۵,۹۶	۷۲۱,۹۹	۷۲۹,۲۵	۷۴۵,۱۸	۷۶۹,۳۶
E-۰۴۵-۰۴	۶۴۴,۹۷	۶۴۴,۲۱	۶۴۳,۱۵	۶۵۸,۶۹	۶۶۴,۲۵
E-۰۵۱-۰۵	۴۷۶,۲۱	۴۷۳,۵۲	۴۷۶,۳۸	۴۷۹,۲۴	۴۸۷,۹۸
E-۰۷۶-۰۷	۶۲۵,۳۱	۶۱۸,۴۸	۶۱۶,۱۷	۶۱۹,۶۸	۶۳۶,۱۴
E-۱۰۱-۰۸	۷۷۱,۲۸	۷۵۸,۱۲	۷۶۰,۱۲	۷۶۵,۹۸	۸۰۲,۶۴

در جدول ۳ میزان تغییرات پارامتر β نشان داده شده است. در اینجا مقدار α برابر ۱، به علت به دست آمدن بهترین جواب‌ها در جدول ۲، و مقدار تکرار بهترین جواب الگوریتم برابر ۱۲ در نظر گرفته شده است. همچنین در این جدول مقدار تغییر پارامتر β ما بین ۰,۲ تا ۳,۲ در نظر گرفته شده است. باید توجه کرد با تنظیم مقدار β به اندازه ۳,۲ بهترین جواب‌ها و به اندازه ۱ بی کیفیت‌ترین جواب‌ها به دست آمده است. همچنین هر چه مقدار بتا افزایش می‌یابد. تقریباً کیفیت جواب‌های الگوریتم با یک شیب صعودی افزایش پیدا می‌کند. بنابراین برعکس پارامتر α ، پارامتر β دارای یک رابطه مستقیم با کیفیت جواب‌ها بوده و افزایش آن باعث افزایش کیفیت جواب‌ها می‌شود.

جدول ۳. جواب‌های الگوریتم برای بتاهای متفاوت

نمونه	$\beta = 0.2$	$\beta = 1$	$\beta = 1.8$	$\beta = 2.6$	$\beta = 3.2$
E-۰۲۳-۰۳	۸۲۴,۹۴	۵۲۴,۸۴	۵۲۰,۴۵	۵۱۸,۲۱	۵۱۵,۲۴
E-۰۳۱-۰۹	۴۴۶,۱۲	۴۴۵,۵۴	۴۴۵,۳۱	۴۴۱,۹۸	۴۴۰,۰۱
E-۰۴۱-۱۴	۷۲۳,۴۵	۷۲۵,۱۴	۷۲۱,۶۴	۷۱۹,۹۵	۷۲۰,۱۲
E-۰۴۵-۰۴	۶۶۲,۴۵	۶۶۰,۸۷	۶۵۳,۱۲	۶۴۷,۵۴	۶۴۲,۶۴
E-۰۵۱-۰۵	۵۰۳,۱۲	۵۰۱,۹۶	۴۸۹,۳۴	۴۸۰,۲۱	۴۷۵,۹۶
E-۰۷۶-۰۷	۶۵۹,۱۲	۶۵۴,۱۲	۶۳۰,۵۴	۶۱۵,۵۳	۶۱۶,۵۴
E-۱۰۱-۰۸	۸۳۲,۱۵	۸۱۲,۱۳	۷۹۶,۱۵	۷۶۵,۴۲	۷۵۷,۵۵

نهایتاً در جدول ۴ میزان تغییرات تکرارهای بهترین جواب الگوریتم، که شرط اصلی برای پایان الگوریتم است، نشان داده شده است. در این جدول تعداد تکرارهای بهترین جواب در بازه‌ای بین ۳ تا ۲۰ در نظر گرفته شده است. همچنین برای این جدول $\alpha = 1$ و $\beta = 3.2$ در نظر گرفته شده است. نتایج الگوریتم در این جدول به این نکته اشاره دارد که علیرغم اینکه تصور می‌شود که تکرار بیشتر بهترین جواب الگوریتم در مدت طولانی سبب به دست آمدن جواب‌های بهتر می‌شود، اما در اینجا این فرضیه صادق نمی‌باشد. در این جدول برای سه مثال ۰۳-، E-۰۲۳، E-۰۴۱-۱۴ و E-۰۵۱-۰۵ مقدار $\omega = 10$ ، برای مثال E-۰۴۵-۰۴ مقدار $\omega = 7$ و برای بقیه مثال‌ها مقدار $\omega = 20$ بهترین جواب‌ها را پیدا کرده‌اند. علت این امر را باید در تعداد زیاد متغیرها و پارامترهای زیادی که در الگوریتم مورچگان وجود دارد جستجو کرد. بنابراین برای به دست آوردن جواب‌های باکیفیت‌تر برای این مساله به وسیله الگوریتم مورچگان بهتر است که تعداد انجام آزمایش الگوریتم را افزایش داد تا اینکه تعداد تکرار بهترین جواب الگوریتم زیاد شود. بنابراین میزان نرخ بهینه برای پارامترهای β, α و ω به ترتیب ۱، ۲، ۳ و ۱۰ در نظر گرفته می‌شود زیرا زمان مصرفی برای $\omega = 10$ کمتر از $\omega = 20$ است.

جدول ۴. جواب‌های الگوریتم برای W های متفاوت

نمونه	۳	۷	۱۰	۱۵	۲۰
E-۰۲۳-۰۳	۵۲۰,۱۴	۵۱۶,۶۴	۵۱۴,۹۸	۵۱۵,۱۴	۵۱۶,۳۴
E-۰۳۱-۰۹	۴۴۲,۲۵	۴۳۹,۶۸	۴۴۲,۸۵	۴۴۰,۴۵	۴۳۹,۲۴
E-۰۴۱-۱۴	۷۲۵,۲۱	۷۲۰,۲۱	۷۱۹,۹۴	۷۲۱,۵۴	۷۲۰,۰۰
E-۰۴۵-۰۴	۶۵۲,۱۴	۶۴۲,۱۵	۶۴۲,۲۵	۶۴۴,۵۶	۶۴۵,۹۷
E-۰۵۱-۰۵	۴۷۹,۱۲	۴۷۵,۹۹	۴۷۵,۹۳	۴۷۶,۰۱	۴۷۷,۷۹
E-۰۷۶-۰۷	۶۲۵,۱۴	۶۲۰,۵۴	۶۱۶,۹۷	۶۱۵,۹۶	۶۱۵,۷۳
E-۱۰۱-۰۸	۷۶۹,۱۵	۷۵۹,۶۴	۷۵۷,۹۸	۷۵۹,۱۲	۷۵۷,۴۵

۶ نتایج محاسباتی

برای بررسی کارایی الگوریتم پیشنهادی تعدادی از مثال‌های استاندارد مساله چندین فروشنده دوره‌گرد در نظر گرفته شده است تا بدین وسیله مقایسه کاملی بین الگوریتم اصلاحی، الگوریتم قدیمی و دو نوع از الگوریتم‌های فراابتکاری انجام شود. این دسته از مثال‌ها از کتابخانه مساله فروشنده دوره‌گرد در نظر گرفته شده است با این تفاوت که تعداد فروشنده دوره‌گرد در هر کدام از مثال‌ها برابر ۵ در نظر گرفته می‌شود. همچنین باید اضافه کرد که تمام کدهای الگوریتم پیشنهادی به زبان ++C نوشته شده است و کامپیوتری که این برنامه‌ها بر روی آن اجرا شده از نوع پنتیوم ۴ با قدرت 3GHz و با یک گیگا بایت حافظه می‌باشد.

این دسته از مثال‌ها که شامل $pr152$, $pr176$, $pr226$, $pr229$, $pr439$ و $pr1002$ می‌باشند دارای بازه بسیار خوبی از تعداد گره‌ها می‌باشند که مقادیر بین ۷۶ تا ۱۰۰۲ را اختیار می‌کنند. از طرف دیگر بهترین مقدار پیدا شده برای هر کدام از الگوریتم‌ها در ۱۰ تکرار الگوریتم در جدول ۵، میانگین مقادیر پیدا شده برای هر کدام از مثال‌ها در جدول ۶ و در نهایت مقدار زمان مصرفی برای یافتن جواب‌ها برای هر کدام از الگوریتم‌ها در جدول ۷ نشان داده شده است.

در جدول ۵ خصوصیات کامل مثال‌های مورد آزمایش و همچنین نتایج الگوریتم‌های فراابتکاری برای این مثال‌ها آورده شده است. در این جدول همانند جدول ۱، ستون دوم نشان دهنده تعداد گره‌های هر مثال (m) می‌باشد در حالی که ستون سوم تعداد فروشنده‌های مورد استفاده برای هر مثال (n) را ارایه می‌کند. برای اینکه یک تعادل بین تعداد گره‌های ملاقات شده توسط هر فروشنده برقرار باشد، برای حداکثر تعداد گره‌های قابل ملاقات برای هر فروشنده مقداری تعیین شده است. ستون چهارم در جدول ۵ نشان دهنده همین تعداد یعنی حداکثر گره‌های قابل ملاقات توسط هر فروشنده می‌باشد (l). از طرف دیگر ستون‌های پنجم و ششم جواب‌های الگوریتم پیشنهادی برای این مساله را ارایه می‌کنند. باید توجه کرد که در ستون پنجم الگوریتم نمونه مورچگان معمولی برای مساله ارایه شده است در حالی که در ستون ششم الگوریتم پیشنهادی یعنی الگوریتم اصلاحی نمونه مورچگان برای مساله نشان داده شده است. برای اینکه یک مقایسه کامل بین الگوریتم پیشنهادی و الگوریتم‌های دیگر فراابتکاری صورت گیرد در ستون‌های هفتم و هشتم به ترتیب الگوریتم‌های اصلاحی ژنتیک (MGA) و

اصلاحی مورچگان (MACO) از ادبیات موضوع آورده شده است. باید توجه کرد که الگوریتم اصلاحی ژنتیک توسط تانگ و همکارش ارائه شده [۱۸] در حالی که الگوریتم اصلاحی مورچگان توسط جانجیل و دینگوی پیشنهاد شده است [۱۹].

با مقایسه نتایج به دست آمده در جدول ۵ می توان نتیجه گرفت که الگوریتم پیشنهادی نسبت به الگوریتم نمونه مورچگان معمولی از کارایی بسیار خوبی برخوردار است به طوری که توانسته است به جز مثال $Pr229$ در بقیه مثال ها کیفیت مقادیر جواب ها را به مقدار قابل قبولی افزایش دهد. البته شایان به ذکر است که الگوریتم نمونه مورچگان نیز در مقایسه با دو الگوریتم دیگر دارای رقابت خوبی بوده و به طور متوسط با مقدار 186260.7 برای شش مثال در مقایسه با مقدار 189232.3 برای الگوریتم ژنتیک اصلاحی و مقدار 183909.2 برای الگوریتم اصلاحی مورچگان، جواب های با کیفیتی را ارائه کرده است. بنابراین الگوریتم نمونه معمولی دارای مقادیری بهتر نسبت به الگوریتم ژنتیک اصلاحی است اما در مقایسه با الگوریتم اصلاحی مورچگان نتوانسته است که برتری خود را به اثبات برساند و به جواب های بی کیفیت تری رضایت داده است. از طرف دیگر با مقدار متوسط 179886.5 که به وسیله الگوریتم پیشنهادی به دست آمده است می توان نتیجه گرفت که این الگوریتم اصلاحی از قدرت بسیار خوبی برای فرار از نقاط بهینه محلی برخوردار بوده و بدین علت توانسته است که بهترین جواب ها را برای این مثال ها به دست آورد. باید توجه کرد که از نظر قدرت یافتن بهترین جواب ها می توان الگوریتم های جدول ۵ را به ترتیب از ضعیف به قوی به صورت الگوریتم اصلاحی ژنتیک، الگوریتم نمونه مورچگان معمولی، الگوریتم اصلاحی مورچگان و الگوریتم نمونه مورچگان اصلاح شده ترتیب بندی نمود.

جدول ۵. مقایسه بین الگوریتم های فراابتکاری

نمونه	n	v	l	AS_{elite}	MAS_{elite}	MGA	$MACO$
Pr176	76	5	20	163257	156982	157444	178597
Pr152	152	5	40	143231	130832	127839	130953
Pr226	226	5	50	167512	167439	166827	167646
Pr299	299	5	70	82231	82321	82176	82106
Pr439	439	5	100	163872	160989	173839	161955
Pr1002	1002	5	220	385461	380756	427269	382198

جدول ۶ نشان دهنده مقایسه الگوریتم های ذکر شده از جنبه ای دیگر است. در این جدول مقادیر متوسط به دست آمده برای هر الگوریتم نشان داده شده است. چون برای یافتن بهترین جواب برای هر مثال طبق روش گفته شده الگوریتم ده بار مورد آزمایش قرار می گیرد بنابراین می توان الگوریتم ها را از جهتی دیگر نیز مورد مقایسه قرار داد. نتایج این جدول نیز حاکی است که الگوریتم در مقایسه با نسخه عادی خود دارای پیشرفت خوبی بوده است و در هر ۶ مثال، مقدار به دست آمده از کیفیت بالاتری برخوردار است. نکته قابل توجهی که وجود دارد این است که با وجود آن که مقادیر به دست آمده برای الگوریتم نمونه معمولی برای بهترین جواب در جدول ۵ دارای کیفیت کمتری نسبت به الگوریتم MACO است اما از نظر متوسط مقادیر الگوریتم برای ۱۰ بار آزمایش،

الگوریتم نمونه معمولی توانسته است که کارایی بیشتری از خود نشان دهد و به جواب‌های باکیفیت‌تری دست پیدا کند. در آخر باید توجه کرد که نتایج به دست آمده در جدول ۶ برای الگوریتم پیشنهادی نیز به این نکته تاکید دارد که کارایی الگوریتم در مقایسه با سه الگوریتم دیگر از کیفیت بیشتری برخوردار است.

جدول ۶. متوسط مقادیر برای ۱۰ بار اجرا الگوریتم‌ها

نمونه	AS_{elite}	MAS_{elite}	MGA	$MACO$
Prv6	۱۵۷۳۴۲	۱۵۷۱۲۱	۱۶۰۵۷۴	۱۸۰۶۹۰
Pr152	۱۳۵۹۸۲	۱۳۲۶۷۱	۱۳۳۳۳۷	۱۳۶۳۴۱
Pr226	۱۷۱۲۶۵	۱۶۹۷۴۵	۱۷۸۵۰۱	۱۷۰۸۷۷
Pr299	۸۳۱۱۱	۸۲۹۹۴	۸۵۷۹۶	۸۳۸۴۵
Pr439	۱۶۲۹۷۳	۱۶۲۷۷۴	۱۸۳۶۹۸	۱۶۵۰۳۵
Pr1002	۳۸۸۷۴۱	۳۸۲۰۰۵	۴۵۹۱۷۹	۳۸۷۲۰۵

در جدول ۷ میزان زمان مصرفی برای یافتن جواب هر الگوریتم برای مثال‌های داده شده، آورده شده است. باید توجه کرد که این نتایج بر حسب ثانیه می‌باشند. همچنین توجه به این نکته ضروری است که شرط پایان الگوریتم در دو روش پیشنهادی برای این مساله ۱۰ بار تکرار شدن بهترین جواب در حین اجرای الگوریتم است. با توجه به نتایج به دست آمده در جدول ۷ می‌توان نتیجه گرفت که از لحاظ زمان مصرفی، الگوریتم نمونه مورچگان معمولی دارای بهترین جواب است و بعد از آن الگوریتم نمونه مورچگان اصلاحی، الگوریتم اصلاحی مورچگان و الگوریتم اصلاحی ژنتیک قرار دارند. نکته قابل توجهی که در این جدول وجود دارد در این است که علیرغم اینکه الگوریتم پیشنهادی دارای جواب‌های بهتر نسبت به الگوریتم نمونه مورچگان معمولی است اما از نظر طول زمان اجرا دارای مقدار بیشتری می‌باشد. البته این نتیجه غیر قابل پیش‌بینی نبود زیرا بر اساس توضیحات ذکر شده با تغییر مقدار تشویق ضریب بهترین مسیر، الگوریتم دارای کیفیت بیشتری برای فرار از نقاط بهینه محلی می‌شود و بدین ترتیب فضای جواب مساله با گسترده‌گی بیشتری مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. این عمل سبب می‌شود که علیرغم اینکه زمان بیشتری صرف جستجو در فضای جواب مساله شود، الگوریتم بتواند به جواب‌های بهتری دست پیدا کند.

جدول ۷. مقایسه زمان اجرای الگوریتم‌ها فراابتکاری

نمونه	AS_{elite}	MAS_{elite}	MGA	$MACO$
Prv6	۲۷	۳۲	۴۳	۵۱
Pr152	۷۸	۷۵	۹۱	۱۲۸
Pr226	۱۲۵	۱۳۶	۱۶۵	۱۴۳
Pr299	۲۲۴	۲۵۶	۳۶۳	۲۸۸
Pr439	۴۰۵	۴۶۳	۶۲۳	۵۶۳
Pr1002	۱۷۹۰	۲۰۰۹	۲۸۹۲	۲۶۲۰

۷ نتیجه گیری و جهت گیری آینده

در این مقاله ابتدا یک فرمول بندی بر اساس مساله فروشنده دوره گرد برای مساله چندین فروشنده دوره گرد پیشنهاد شد و سپس الگوریتم اصلاحی نمونه مورچگان برای حل مساله مورد نظر مورد استفاده قرار گرفت که در چگونگی تشویق بهترین مسیر با الگوریتم نمونه مورچگان معمولی تفاوت داشت. در اینجا از تابعی استفاده شد که تا حد ممکن از همگرایی زودرس جلوگیری می کرد و باعث می شد که الگوریتم بتواند تا حد امکان از افتادن در بهینه های محلی نجات یابد. در نتیجه اگر چه الگوریتم زمان بیشتری را برای یافتن جواب های بهتر صرف می کرد اما توانست به جواب های با کیفیت تری دست پیدا کند. به نظر می رسد که توابع بهتری از این تابع پیشنهادی برای این ضریب وجود داشته باشد و همچنین این الگوریتم اصلاحی را بتوان برای مسایل دیگر بهینه سازی ترکیباتی همچون مساله مسیریابی وسیله نقلیه یا گسترش های آن به کار برد. از طرف دیگر ترکیب این الگوریتم با روش های فراابتکاری دیگر مانند ژنتیک، باز پخت شبیه سازی یا جستجوی ممنوع راهکار مناسب دیگری برای بهبود الگوریتم و یافتن جواب های با کیفیت تر می باشد که کاربردی کردن این پیشنهادها به مقاله های بعدی موکول می شود.

قدردانی و تشکر

این مقاله نتیجه انجام یک طرح پژوهشی است که هزینه های اجرای این طرح توسط باشگاه پژوهشگران جوان دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان تأمین و تخصیص یافته است.

منابع

- [1] Bektas, T., (2006). The multiple traveling salesman problems: an over-view of formulations and solution procedures. Omega, 34, 209-219.
- [2] Yadlapalli, S., Malik, W.A., Darbhaa, S., Pachter, M., (2009). A Lagrangian-based algorithm for a Multiple Depot, Multiple Traveling Salesmen Problem. Nonlinear Analysis: Real World Applications 10(4), 1990-1999.
- [3] Gavish, B., Srikanth, K., (1986). An optimal solution method for large-scale multiple traveling salesman problems. Operations Research, 34(5), 698-717.
- [4] Gromicho, J., Paixao, J., Branco, I., (1992). Exact solution of multiple traveling salesman problems. Springer.
- [5] AI, A., Kennington, J. L., (1986). Exact solution of multiple traveling salesman problems. Discrete Applied Mathematics, 13, 259-276.
- [6] Malik, W., Rathinam, S., Darbha, S., (2007). An approximation algorithm for a symmetric Generalized Multiple Depot, Multiple Travelling Salesman Problem. Operations Research Letters, 35(6), 747-753.
- [7] Zhanga, T., Yin, Y., Li, J., (2010). An improved approximation algorithm for the maximum TSP. Theoretical Computer Science, 411, 2537-2541.
- [8] Potvin, J., Lapalme, G., Rousseau, J., (1989). A generalized k-opt exchange procedure for the mtsp. INFOR, 21, 474-481.
- [9] Russell, R.A., (1977). An effective heuristic for the m-tour traveling salesman problem with some side conditions. Operations Research, 25(3), 517-524.
- [10] Masutti, T. A. S., Castrom L. N., (2009). Neuro-immune approach to solve routing problems. Neurocomputing, 72(10-12), 2189-2197.
- [11] Ryan, J. L., Bailey, T. G., Moore, J. T., Carlton, W. B., (1998). Reactive Tabu search in unmanned aerial reconnaissance simulations. Proceedings of the 1998 winter simulation conference 1, 873-879.

- [12] Yousefi Khoshtakht, M., Zafari, A., (2008). A new ant colony algorithm for solving multiple traveling salesman problem. The 2th Joint Congress on Intelligent and Fuzzy Systems (ISFS2008), 28-30 October, Malek-Ashtar University of Technology, Tehran, Iran.
- [13] Ghafurian, S., Javadian, N., (2011). An ant colony algorithm for solving fixed destination multi-depot multiple traveling salesmen problems. Applied Soft Computing, 11(1), 1256-1262.
- [14] Paydar, M. M., Mahdavi, I., Sharafuddin, I., Solimanpur, M., (2010). Applying simulated annealing for designing cellular manufacturing systems using MDmTSP. Computers & Industrial Engineering, 59(4), 929-936.
- [15] Dorigo, M., (1992). Optimization, Learning and natural algorithms. Ph.D Thesis, Dip.Electronica e Informazion, Politecnico di Milano Italy.
- [16] Dorigo, M., Maniezzo, V., Coloni, A., (1996). The ant system: optimization by a colony of cooperating agents. IEEE Trans on Sys 26.
- [17] http://www.or.deis.unibo.it/research_pages/orinstances/vrplib/vrplib.html
- [18] Tang, T., Liu, J., (2000). Multiple traveling salesman problem model for hot rolling scheduling in Shanghai Baoshan Iron & Steel Complex. European Journal of Operational Research, 24, 267- 282.
- [19] Junjie, P., Dingwei, W., (2006). An ant colony optimization algorithm for multiple travelling salesmen Problem. In ICICIC '06: Proceedings of the First International Conference on Innovative Computing, Information and Control, Washington, DC, USA, IEEE Computer Society, 210–213.