

## تغییر سطح ورودی‌ها و ارزیابی خروجی‌ها در DEA وقتی که تعدادی از خروجی‌ها نامطلوب هستند

سعید محرایان<sup>۱</sup>، مهدی عینی<sup>۲\*</sup>، بلال کریمی<sup>۳</sup>

۱- استادیار دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه تربیت معلم، گروه ریاضی، تهران، ایران

۲- هیأت علمی دانشگاه پیام نور، دانشگاه پیام نور مرکز کرمانشاه، واحد کنگاور، گروه ریاضی، کنگاور، ایران

۳- پژوهشگر دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات کرمانشاه، گروه ریاضی، کرمانشاه، ایران

رسید مقاله: ۲۱ آبان ۱۳۹۰

پذیرش مقاله: ۲۴ اسفند ۱۳۹۰

### چکیده

در این مقاله،  $DEA$  معکوس با ارجحیت محدودیت‌های مخروطی، زمانی که تعدادی از خروجی‌های واحدهای تصمیم‌گیری نامطلوب هستند، مورد بحث قرار می‌گیرد. بدین صورت که با تغییر سطح ورودی‌های واحد تحت ارزیابی و با حفظ مقدار کارایی، سطح خروجی مطلوب (نامطلوب)، افزایش (کاهش) می‌یابد. برای این منظور از مدل برنامه‌ریزی خطی چند هدفه ( $MOLP$ ) استفاده می‌کنیم.

**کلمات کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌ها، محدودیت‌های مخروطی،  $MOLP$ ، خروجی نامطلوب.

### ۱ مقدمه

در سال‌های اخیر تحقیقات و پژوهش‌های زیادی در زمینه  $DEA$  انجام شده است [۱]. تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی واحدهای تصمیم‌گیری را با چندین ورودی و خروجی اندازه‌گیری می‌کند.  $DEA$  یک مرز کارایی مشخص کرده و کارایی واحدهای تصمیم‌گیری را با کاهش سطح ورودی‌ها و افزایش سطح خروجی‌ها (در صورت امکان) نسبت به آن بهبود می‌دهد. گاهی ممکن است در بین خروجی‌ها، خروجی نامطلوب نیز وجود داشته باشد [۲و۳] که برای بهبود سطح کارایی باید سطح خروجی‌های مطلوب (نامطلوب) را افزایش (کاهش) داد. نمونه‌هایی از خروجی‌های نامطلوب عبارتند از: گازهای گلخانه‌ای تولیدی صنایع، پرداخت مالیات در مراکز تجاری و....

وای و همکاران [۴] با افزایش سطح ورودی (خروجی) های واحد تحت ارزیابی و حفظ مقدار کارایی آن، با استفاده از  $DEA$  معکوس سطح خروجی (ورودی) ها را ارزیابی کردند. جهان‌شاهلو و همکاران [۵]  $DEA$

\* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: mahdi\_eyni@yahoo.com

معکوس را در حالتی که تعدای از خروجی ها نامطلوب باشند، استفاده کردند. با توجه به این که مدل  $DEA$  معکوس با ساختار مخروطی وسیله ای موثرتر برای ارزیابی سطح خروجی ها می باشد [۶]، در این مقاله، از  $DEA$  معکوس با ارجحیت محدودیت های مخروطی برای ارزیابی سطح خروجی ها (مطلوب و نامطلوب) استفاده شده است که حالت دیگری از [۵] می باشد. بنابراین با تغییر سطح ورودی های واحد تحت ارزیابی و با حفظ مقدار کارایی، می توان با استفاده از مدل  $MOLP$  صرف نظر از کارایی یا ناکارایی واحد تحت ارزیابی، سطح خروجی مطلوب (نامطلوب) را، افزایش (کاهش) داد. سازمان دهی این مقاله چنین است:

در بخش ۲، ابتدا مساله را توضیح داده و در ادامه مدل  $MOLP$  با ارجحیت محدودیت های مخروطی برای ارزیابی سطح خروجی ها پیشنهاد می کنیم. در بخش ۳، روش ارائه شده را با مثالی توضیح می دهیم. سرانجام نتیجه گیری را در بخش ۴، بیان می کنیم.

## ۲ بیان مساله

فرض کنید  $n$  واحد تصمیم گیری داریم که هر کدام  $m$  ورودی را برای تولید  $s$  خروجی مصرف می کنند. بردار ورودی و خروجی هر واحد را به صورت  $(x_j, y_j)$ ،  $j=1, 2, \dots, n$  در نظر گرفته و فرض کنید  $\bar{U}^b, U^g \subset R_+^s$ ،  $V \subset R_+^m$  باشند که در آن  $K, \bar{U}^b, U^g, V$  به ترتیب قطب منفی  $K^*, \bar{U}^{b*}, U^{g*}, V^*$  و  $K \subset R_+^n$  به ترتیب مخروط ارجحیت نسبی ورودی ها، خروجی ها و واحدهای تصمیم گیری هستند. نیز فرض کنید:

$$j=1, 2, \dots, n \text{ به ازای هر } \bar{Y}_j^b \in -Int \bar{U}^{b*}, Y_j^g \in -Int U^{g*}, X_j \in -Int V^*$$

بر اساس [۵، ۶]، مدل  $BCC$  در ماهیت خروجی با ارجحیت محدودیت های مخروطی برای اندازه گیری کارایی واحد  $p$  ام به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} PO: \varphi_p^* &= \max \varphi \\ s.t. \\ X\lambda - X_p &\in V^*, \\ -Y^g\lambda + \varphi Y_p^g &\in U^{g*}, \\ -\bar{Y}^b\lambda + \varphi \bar{Y}_p^b &\in \bar{U}^{b*}, \\ \lambda &= 1, \\ \lambda &\in -K^*. \end{aligned} \quad (1)$$

که  $\bar{Y}_j^b = -Y_j^b + \eta$ ،  $\eta - Y_j^b \in -Int \bar{U}^{b*}$ ، یعنی بردار  $\eta$  را طوری انتخاب می کنیم که برای هر  $j=1, 2, \dots, n$  داشته باشیم:  $\bar{Y}_j^b \in -Int \bar{U}^{b*}$ .

در مدل  $P^O$ ، ناحیه شدنی غیر تهی است و  $\varphi_p^* \geq 1$  [۷و۸].

**تعریف ۱.** در مدل  $P^O$ ، اگر  $\varphi_p^* = 1$ ، می‌گوییم واحد تصمیم‌گیری  $p$  ام (حداقل) کارای ضعیف است. فرض کنید:  $\alpha_p \in R_+^m$  و سطح ورودی‌های واحد تصمیم‌گیری  $p$  از  $X_p$  به  $\alpha_p$  در امتداد مخروط محدب  $-V^*$  تغییر کند. حال با حفظ مقدار کارایی، سطح خروجی‌های واحد تحت ارزیابی  $p$  را ارزیابی می‌کنیم به طوری که، سطح خروجی‌های مطلوب (نامطلوب) در امتداد مخروط محدب  $-U^{g*}$  ( $-\bar{U}^{b*}$ ) افزایش (کاهش) یابند، یعنی  $(\bar{Y}_p^b - \bar{\beta}_p^b \in -\bar{U}^{b*}) \beta_p^g - Y_p^g \in -U^{g*}$ . مدل  $MOLP$  با ارجحیت محدودیت‌های مخروطی برای محاسبه سطح خروجی‌های (مطلوب و نامطلوب) به صورت زیر است:

$$M^O: \text{Max } \beta_p = (\beta_p^g, \bar{\beta}_p^b)$$

s.t.

$$\begin{aligned} X\lambda - \alpha_p &\in V^*, \\ -Y^g\lambda + \varphi_p\beta_p^g &\in U^{g*}, \\ -\bar{Y}^b\lambda + \varphi_p\bar{\beta}_p^b &\in \bar{U}^{b*}, \\ \beta_p^g - Y_p^g &\in -U^{g*}, \\ \bar{Y}_p^b - \bar{\beta}_p^b &\in -\bar{U}^{b*}, \\ \lambda &= 1, \\ \lambda &\in -K^*. \end{aligned} \quad (2)$$

با توجه به این که مدل (۲)، یک مدل  $MOLP$  است، روش‌های متفاوتی برای حل آن وجود دارد [۹]. یکی از این روش‌ها، روش وزن دهی است. در این روش، برای حل مدل (۲) می‌توان برای هر کدام از خروجی‌های مطلوب و نامطلوب، وزنی را در نظر گرفت. با توجه این که مدل (۲) با ارجحیت محدودیت‌های مخروطی به کار رفته است، بهتر است وزن‌ها را از مخروط ارجحیت نسبی خروجی‌ها انتخاب کرد. برای این منظور فرض کنید  $W_p^g$  و  $\bar{W}_p^b$  به ترتیب بردارهای وزنی، ارزش خروجی‌های مطلوب و نامطلوب  $\beta_p^g$  و  $\bar{\beta}_p^b$  باشند. در این صورت بدون تغییر محدودیت‌ها، فقط تابع چند هدفه  $M^O: \text{max } \beta_p = (\beta_p^g, \bar{\beta}_p^b)$  به تابع یک هدفه  $M^O: \text{max } W_p^g\beta_p^g + \bar{W}_p^b\bar{\beta}_p^b$  تبدیل شده و جواب بهینه به راحتی به دست می‌آید.

حال فرض کنید واحد  $(n+1)$  ام را، واحد جدیدی با ورودی‌ها و خروجی‌های تغییر یافته واحد  $p$  ام در نظر بگیریم. در این صورت مدل  $BCC$  در ماهیت خروجی با ارجحیت محدودیت‌های مخروطی برای اندازه‌گیری کارایی آن چنین است:

$$P^{O+}: \varphi_p^{*+} = \text{Max } \varphi$$

s.t.

$$\begin{aligned} X\lambda + \alpha_P \lambda_{n+1} - \alpha_P &\in V^*, \\ -Y^g \lambda - \beta_P^g \lambda_{n+1} + \varphi \beta_P^g &\in U^{g*}, \\ -\bar{Y}^b \lambda - \bar{\beta}_P^b \lambda_{n+1} + \varphi \bar{\beta}_P^b &\in \bar{U}^{b*}, \\ \lambda + \lambda_{n+1} &= 1, \\ (\lambda, \lambda_{n+1})^t &\in -K^* \subset R_+^{n+1}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\eta - \beta_P^b \in -\text{Int} \bar{U}^{b*}, \bar{Y}_{n+1}^b = \bar{\beta}_P^b = -\beta_P^b + \eta \quad \text{که}$$

**تعریف ۲.** اگر  $\varphi_p^{*+} = \varphi_p^*$  می گوئیم مقدار کارایی بدون تغییر مانده است.

**تعریف ۳.** فرض کنید  $(\beta_P, \lambda^{M^O}) = (\beta_P^g, \bar{\beta}_P^b, \lambda^{M^O})$  جواب شدنی مدل  $M^O$  باشد. اگر جواب شدنی

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_P^{g''} - \beta_P^g \in -\text{Int} U^{g*} \\ \bar{\beta}_P^b - \bar{\beta}_P^{b''} \in -\text{Int} \bar{U}^{b*} \end{array} \right. \quad \text{آنگاه} \quad (\beta_P'', \lambda'') = (\beta_P^{g''}, \bar{\beta}_P^{b''}, \lambda'')$$

می گوئیم  $(\beta_P, \lambda^{M^O}) = (\beta_P^g, \bar{\beta}_P^b, \lambda^{M^O})$  جواب کارای ضعیف مدل  $M^O$  وابسته با

$$(-\text{Int} U^{g*}, -\text{Int} \bar{U}^{b*}, -K^*) \text{ است.}$$

**تعریف ۴.** فرض کنید  $(\beta_P, \lambda^{M^O}) = (\beta_P^g, \bar{\beta}_P^b, \lambda^{M^O})$  جواب شدنی مدل  $M^O$  باشد. اگر جواب شدنی

$$(\beta_P'', \lambda'') = (\beta_P^{g''}, \bar{\beta}_P^{b''}, \lambda'')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{r_1 P}^{g''} - \beta_{r_1 P}^g \in -\text{Int} U^{g*} \\ \text{برای حداقلی از } r_1 \\ \bar{\beta}_{r_2 P}^b - \bar{\beta}_{r_2 P}^{b''} \in -\text{Int} \bar{U}^{b*} \\ \text{برای حداقلی از } r_2 \end{array} \right. \quad \text{و} \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_{r_1 P}^{g''} - \beta_{r_1 P}^g \in -U^{g*} \\ \text{برای تمام } r_1 \\ \bar{\beta}_{r_1 P}^b - \bar{\beta}_{r_1 P}^{b''} \in -\bar{U}^{b*} \\ \text{برای تمام } r_1 \end{array} \right.$$

آنگاه می گوئیم  $(\beta_P, \lambda^{M^O}) = (\beta_P^g, \bar{\beta}_P^b, \lambda^{M^O})$  جواب کارای قوی مدل  $M^O$  مرتبط با

$$(-\text{Int} U^{g*}, -\text{Int} \bar{U}^{b*}, -K^*) \text{ است.}$$

**قضیه ۱.** اگر  $(\beta_P, \lambda^{M^O}) = (\beta_P^g, \bar{\beta}_P^b, \lambda^{M^O})$  جواب کارای قوی مدل  $M^O$  وابسته با

$$\varphi_p^{*+} = \varphi_p^* \text{ باشد، آن گاه } (-IntU^{g*}, -Int\bar{U}^{b*}, -K^*)$$

**برهان.** چون  $(\beta_p, \lambda^{M^O}) = (\beta_p^g, \bar{\beta}_p^b, \lambda^{M^O})$  یک جواب شدنی مدل  $M^O$  است، بنابراین در شرایط زیر صدق می کند:

$$X\lambda - \alpha_p \in V^* \quad (۱)$$

$$-Y^g\lambda + \varphi_p\beta_p^g \in U^{g*} \quad (۲)$$

$$-\bar{Y}^b\lambda + \varphi_p\bar{\beta}_p^b \in \bar{U}^{b*} \quad (۳)$$

$$\beta_p^g - Y_p^g \in -U^{g*} \quad (۴)$$

$$\bar{Y}_p^b - \bar{\beta}_p^b \in -\bar{U}^{b*} \quad (۵)$$

$$\lambda = ۱ \quad (۶)$$

$$\lambda \in -K^*. \quad (۷)$$

از روابط (۱) الی (۳)، (۶) و (۷) نتیجه می شود  $(\varphi_p, \lambda^{M^O})$  یک جواب شدنی مدل  $P^{O+}$  است. بنابراین  $\varphi_p^{*+} \geq \varphi_p^*$ . از طرف دیگر با توجه به کارای قوی بودن جواب  $(\beta_p, \lambda^{M^O}) = (\beta_p^g, \bar{\beta}_p^b, \lambda^{M^O})$ ، از مدل های  $P^O$  و  $P^{O+}$  نتیجه می شود  $\varphi_p^* \geq \varphi_p^{*+}$  و لذا  $\varphi_p^{*+} = \varphi_p^*$ . ■

قضیه زیر نشان می دهد که هنگام ارزیابی سطح خروجی ها با در نظر گرفتن جواب کارای ضعیف مدل  $M^O$ ، مقدار کارایی واحد تحت ارزیابی حفظ خواهد شد.

**قضیه ۲.** فرض کنیم سطح ورودی ها در امتداد مخروط محدب  $-V^*$  تغییر کند. در این صورت اگر

$$(\beta_p, \lambda^{M^O}) = (\beta_p^g, \bar{\beta}_p^b, \lambda^{M^O}) \text{ یک جواب کارای ضعیف مدل } M^O \text{ مرتبط با}$$

$$(-IntU^{g*}, -Int\bar{U}^{b*}, -K^*) \text{ باشد، به طوری که سطح خروجی های مطلوب (نامطلوب) در امتداد مخروط محدب}$$

$$(-\bar{U}^{b*}) - U^{g*} \text{ افزایش (کاهش) یابند، آن گاه } \varphi_p^{*+} = \varphi_p^*$$

**برهان.** مشابه اثبات قضیه ۱ و طبق تعریف جواب کارای ضعیف، نتیجه برقرار می گردد. ■

**۳ مثال.** جدول ۱ شامل سه واحد تصمیم گیری  $A$ ،  $B$  و  $C$  با سه ورودی  $x_1, x_2$  و  $x_3$  سه خروجی  $y_1, y_2$  و  $y_3$  را در نظر بگیرید:

جدول ۱. داده‌های مربوط به ۳ واحد تصمیم‌گیری

|        | DMU   | A  | B  | C  |
|--------|-------|----|----|----|
| input  | $x_1$ | ۱۶ | ۸  | ۶  |
|        | $x_2$ | ۲۱ | ۱۰ | ۶  |
|        | $x_3$ | ۱۸ | ۱۲ | ۱۶ |
| output | $y_1$ | ۳  | ۵  | ۳  |
|        | $y_2$ | ۱  | ۷  | ۵  |
|        | $y_3$ | ۴  | ۸  | ۴  |

فرض کنید در جدول ۱، خروجی دوم نامطلوب است. بردار انتقال برای خروجی نامطلوب به صورت  $\eta = 20$  در نظر می‌گیریم. همچنین فرض کنید  $C$  واحد تحت ارزیابی بوده و مخروط ارجحیت نسبی ورودی‌ها و همچنین خروجی‌های مطلوب این واحد تصمیم‌گیری به ترتیب به صورت زیر باشد:

$$U^g = \left\{ (4 \times 10^4, 5)^t u_1 : u_1 \geq 0 \right\} \text{ و } V = \left\{ (4, 2, 5)^t v_1 : v_1 \geq 0 \right\}$$

فرض کنید مخروط ارجحیت نسبی خروجی‌های نامطلوب واحد تصمیم‌گیری  $C$  به صورت  $\bar{U}^b = R_+^1$  باشد. بنابراین مخروط قطب منفی ورودی‌های و همچنین خروجی‌های مطلوب آن به ترتیب به صورت زیر

$$U^{g*} = \left\{ (u_1, u_2)^t : (4 \times 10^4, 5) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \leq 0 \right\} \text{ و } V^* = \left\{ (v_1, v_2, v_3, v_4)^t : (4, 2, 5) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \leq 0 \right\}$$

بوده و مخروط قطب منفی خروجی‌های نامطلوب به صورت  $\bar{U}^{b*} = -R_+^1$  می‌باشد. با توجه به مطالب فوق، مدل  $BCC$  در ماهیت خروجی با ارجحیت محدودیت‌های مخروطی، به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \varphi_C^* &= \text{Max } \varphi \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} 16 & 21 & 18 \\ 8 & 10 & 12 \\ 6 & 6 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \in V^*, \\ & - \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \varphi \in U^{g*}, \\ & 19\lambda_1 + 13\lambda_2 + 15\lambda_3 \geq 15\varphi, \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0. \end{aligned}$$

جواب بهینه مدل فوق برابر است با

$$(\varphi_C^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)^t = (1/667, 0/7551, 0/25, 0)^t.$$

فرض کنید سطح ورودی‌های واحد تصمیم‌گیری  $C$  از  $(18, 12, 16)^t$  به  $(13, 9, 13)^t$  کاهش یابد. حال با حفظ مقدار کارایی، مدل  $MOLP$  مربوطه برای ارزیابی سطح خروجی‌های آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Max } & (\beta_1^g, \beta_2^g, \bar{\beta}_3^b) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} 16 & 21 & 18 \\ 8 & 10 & 12 \\ 6 & 6 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix} \in V^*, \\ & - \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + 1/667 \begin{pmatrix} \beta_1^g \\ \beta_2^g \end{pmatrix} \varphi \in U^{g*}, \\ & 19\lambda_1 + 13\lambda_2 + 15\lambda_3 \geq 1/667 \bar{\beta}_3^b, \\ & \begin{pmatrix} \beta_1^g \\ \beta_2^g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in -U^{g*}, \\ & 15 - \bar{\beta}_3^b \in -\bar{U}^{b*}, \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0. \end{aligned}$$

برای حل مدل فوق، از روش وزن‌دار کردن تابع هدف استفاده می‌کنیم. در این صورت اگر

$$W_r \in R_+^1 \text{ و } (W_1, W_r) \in U^g = \left\{ (4 \times 10^4, 5)^t u_1 : u_1 \geq 0 \right\}$$

بدون از دست دادن کلیت استدلال، فرض کنید:  $W_1 = 4 \times 10^4$ ،  $W_r = 1$ ،  $W_r = 5$ . از این رو مدل فوق به مدل برنامه‌ریزی زیر تبدیل می‌شود:

$$\text{Max } 4 \times 10^4 \beta_1^g + \bar{\beta}_r^b + 5 \beta_r^g$$

s.t.

$$\begin{pmatrix} 16 & 21 & 18 \\ 8 & 10 & 12 \\ 6 & 6 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_r \\ \lambda_r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix} \in V^*,$$

$$- \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_r \\ \lambda_r \end{pmatrix} + 1/667 \begin{pmatrix} \beta_1^g \\ \beta_r^g \\ \beta_r^g \end{pmatrix} \in U^{g*},$$

$$19\lambda_1 + 13\lambda_r + 15\lambda_r \geq 1/667 \bar{\beta}_r^b,$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1^g \\ \beta_r^g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in -\bar{U}^{b*},$$

$$15 - \bar{\beta}_r^b \in -\bar{U}^{b*},$$

$$\lambda_1 + \lambda_r + \lambda_r = 1,$$

$$\lambda_1, \lambda_r, \lambda_r \geq 0.$$

ملاحظه می‌گردد که

$$(\beta_1^{g*}, \beta_r^{g*}, \bar{\beta}_r^{b*})^t = (4/2864, 10/4679)^t \text{ و } (\beta_1^{g*}, \beta_r^{g*}, \bar{\beta}_r^{b*})^t = (4/2864, 11/1425)^t$$

به ترتیب جواب‌های کارایی قوی و ضعیف مدل فوق می‌باشند.

حال با تغییر سطح ورودی‌های واحد تصمیم‌گیری  $C$  و با در نظر گرفتن جواب‌های کارایی قوی و ضعیف مدل فوق، به ترتیب با استفاده از مدل  $P^{0+}$ ، کارایی واحد  $C$  را بار دیگر اندازه‌گیری می‌کنیم. داریم:



$$\varphi_C^{*+} = \text{Max } \varphi$$

s.t.

$$\begin{pmatrix} 16 & 21 & 18 & 13 \\ 8 & 10 & 12 & 9 \\ 6 & 6 & 16 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix} \in V^*,$$

$$-\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 4/2864 \\ 4 & 8 & 4 & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/2864 \\ . \end{pmatrix} \varphi \in U^{g*},$$

$$19\lambda_1 + 13\lambda_2 + 15\lambda_3 + 11/1425\lambda_4 \geq 11/1425\varphi,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1,$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$$

$$\varphi_C^{*+} = \text{Max } \varphi$$

s.t.

$$\begin{pmatrix} 16 & 21 & 18 & 13 \\ 8 & 10 & 12 & 9 \\ 6 & 6 & 16 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix} \in V^*,$$

$$-\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 4/2864 \\ 4 & 8 & 4 & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/2864 \\ . \end{pmatrix} \varphi \in U^{g*},$$

$$19\lambda_1 + 13\lambda_2 + 15\lambda_3 + 10/4679\lambda_4 \geq 10/4679\varphi,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1,$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$$

با حل هر یک از مدل های فوق، جواب بهینه برابر است با:

$$(\varphi_C^{*+}, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*)^t = (1/1667, ., 1, ., 0)^t.$$

ملاحظه می گردد که مقدار کارایی واحد تصمیم گیری  $C$  حفظ شده است، یعنی با کاهش سطح ورودی های واحد  $C$ ، با حفظ مقدار کارایی، سطح خروجی نامطلوب آن کاهش و سطح خروجی های مطلوب آن افزایش یافته است.

## ۴ نتیجه گیری

با توجه به مطالب بیان شده، با تغییر سطح ورودی‌های واحد تحت ارزیابی، در صورت وجود خروجی نامطلوب در بین خروجی‌ها، با حفظ مقدار کارایی، می‌توان سطح خروجی‌های مطلوب (نامطلوب) را افزایش (کاهش) داد. در این مقاله از *DEA* معکوس با ارجحیت محدودیت‌های مخروطی استفاده شده است، که در آن برای ارزیابی سطح خروجی‌ها (مطلوب و نامطلوب) صرف نظر از کارایی یا ناکارایی واحد تصمیم‌گیری، می‌توان مدل *MOLP* را به کار گرفت.

## منابع

- [1] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2, 429-444.
- [2] Koopmans, T. C., (1951). Analysis of production as an efficient combination of activities, in: T.C. Koopmans (Ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, Cowles Commission, Wiley, New York, 33-97.
- [3] Smith, P., (1990). Data envelopment analysis applied to financial statements, *Omega: Int. j. Manage. Sci.*, 18, 131-138.
- [4] Wei, Q. L., Zhang, J., Zhang, X., (2000). An inverse DEA model for inputs/outputs estimate. *European J. Oper. Res.*, 121(1), 151-163.
- [5] Jahanshahloo, G. R., Hadi Vencheh, A., Foroughi, A. A., Kazemi Matin, R., (2004). Inputs/output estimation in DEA when some factors are undesirable, *Appl. Math. Comput.*, 156, 19-32.
- [6] Yan, H., Wei, Q., Hao, G., (2002). DEA models resource reallocation and production inputs/outputs estimation, *European J. Oper. Res.*, 136, 19-31.
- [7] Yu, G., Wei, Q. L., Brockett, P., (1996). A generalized data envelopment analysis model: A unification and extension of existing methods for efficiency analysis of decision making units. *Annals of Operations Research*, 66, 47-89.
- [8] Charnes, A., Cooper, W. W., Wei, Q. L., Huang, Z. M., (1989). Cone ratio data envelopment analysis and multi-objective programming. *International Journal of System Science*, 20, 1099-1118.
- [9] Steuer, R. E., (1986). *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application*, Wiley, New York.